ESTRATEGIAS DE FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA EN PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers

Rut Almeida y Alicia Bruno
Universidad de La Laguna

Resumen

Este trabajo analiza las estrategias de resolución de problemas aditivos simples con números negativos por parte de futuros profesor de enseñanza primaria. Los resultados muestran seis estrategias diferentes que dependen de la dificultad del problema y en especial, de la posición de la incógnita. Los futuros profesores usan números negativos en los problemas que les resultan más sencillos y recurren a otras estrategias en los problemas más complejos. Las respuestas evidencian dificultades que se suponen, son superadas en la enseñanza obligatoria.

Palabras clave: *futuro profesor, problemas aditivos, números negativos.*

Abstract

This study analyzes the strategies used by pre-service primary school teachers for solving simple addition problems involving negative numbers. The findings reveal six different strategies that depend on the difficulty of the problem and, in particular, on the unknown quantity. We note that students use negative numbers in those problems they find easy and resort to other strategies in more complex problems. Furthermore, the problem-solving strategies reveal lingering difficulties involving negative numbers.

Keywords: *prospective teacher, additive problems, negative numbers.*

Almeida, R. y Bruno, A. (2013). Estrategias de futuros profesores de primaria en la resolución de problemas aditivos con números negativos. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 127-136). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

La preocupación por mejorar la enseñanza y aprendizaje de los números negativos se ha manifestado en la publicación de numerosos trabajos que comienzan alrededor de 1970 (Vergnaud y Durand, 1976; Marthe, 1979) y han aumentado progresivamente hasta la actualidad (Cunnigham, 2009; Gallardo y Saavedra, 2011; Steiner, 2004; Widjaja, Stacey, y Steinle, 2011). También en España este tópico ha sido foco de interés desde distintas perspectivas (Bruno y Martinón, 1999; González, 1995; Maz, 2005) Las investigaciones más numerosas se han realizado con alumnado de primaria y secundaria, y en menor medida, con futuros profesores.

En el currículo de matemáticas en España, el primer contacto de los alumnos con los números negativos se propone al final de la Educación Primaria, y su estudio más profundo corresponde a la Educación Secundaria. Los futuros profesores de ambos niveles deben manejar con soltura situaciones cotidianas que permitan dar significado a las operaciones de números enteros, ya que son esas las que utilizarán en su futura docencia.

Las investigaciones indican que los alumnos de educación primaria pueden utilizar los números negativos y realizar con ellos operaciones simples de suma y resta. Para ello siguen estrategias sencillas y construyen modelos mentales basándose en su conocimiento sobre los positivos, y suelen tener mayores dificultades al tratar las operaciones formalmente (Peled, Mukhopadahyay y Resnick, 1989).

El conocimiento intuitivo de los alumnos refleja una distancia importante entre la comprensión del significado de los números negativos, frente a su representación abstracta, a través de símbolos. En este trabajo analizamos las estrategias que utilizan un grupo futuros profesores de Primaria al resolver problemas aditivos simples con presencia de números negativos, con el objeto último de analizar si en ellos también se produce ese *distanciamiento entre lo concreto y lo simbólico*.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

Las investigaciones sobre problemas relativos a estructuras aditivas con números negativos están centradas en distintos aspectos: a) dificultad de los problemas según sus estructuras semánticas (cambio, combinación, comparación), b) procedimientos de resolución, c) tipos de representación, d) influencia del contexto y de los signos de los números, e) dificultad de los problemas según la edad de los alumnos. Vergnaud y Durand (1976) concluyeron que los problemas con estructura de cambio son más sencillos que los que combinan dos cambios. Sin embargo, tiene más influencia en la dificultad de los problemas la posición de la incógnita que la estructura (Bruno y Martinón, 1999). Marthe (1979) indicó que cuando los problemas tienen signos opuestos (sumar o restar un número positivo con otro negativo) son más complejos que cuando tienen el mismo signo.

El contexto del enunciado es un factor menos determinante en la dificultad que la estructura, aunque también puede producir diferencias en el éxito (Bell, 1986). El contexto de deber-tener lleva a más éxito y el contexto de cronología es el que produce mayor fracaso (Bruno y Martinón, 1999).

Se han analizado las estrategias de resolución, encontrando que los alumnos resuelven estos problemas con operaciones y/o mediante representaciones, como la recta numérica. Las estrategias varían en función del contexto y de la dificultad del problema. Para la mayoría de los alumnos los contextos deber-tener y cronología inducen a un menor uso de la recta que los otros contextos.

Para muchos alumnos hay problemas aditivos especialmente difíciles, en los que no logran encontrar la operación adecuada con números negativos. Se hace necesario buscar métodos de enseñanza que ayuden a establecer relaciones entre el conocimiento abstracto y las situaciones contextualizadas.

El conocimiento de los futuros docentes de primaria o secundaria sobre los números negativos no ha sido objeto de estudio en muchos trabajos.

Widjaja, Stacey y Stente (2011) analizan los errores al representar en la recta numérica números decimales negativos futuros profesores de primaria, indicando que es un reto importante para una proporción significativa de futuros profesores de primaria. Steiner (2009) evaluó la comprensión conceptual de la suma y resta de enteros de futuros profesores de primaria usando un modelo que combina la recta numérica y las fichas de colores. El estudio mostró que el modelo ayudó a los participantes a una mejor comprensión de los números y los algoritmos de suma y resta.

En Bruno, Espinel y Martinón (1997) se analiza la resolución de problema aditivos con números negativos con diferentes estructuras de problemas de futuros docentes de primaria. Se observó cómo tienden a usar números positivos antes que negativos y recurren a estrategias basadas en métodos gráficos. En este trabajo complementamos el citado estudio, centrándonos en cuatro estructuras y analizando las estrategias con más profundidad.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Este trabajo amplia el conocimiento sobre la forma de resolver determinados tipos de problemas aditivos con números negativos por parte de los futuros profesores de primaria, siendo el objetivo del estudio el siguiente:

> *Estudiar las estrategias que emplean los futuros profesores de primaria para resolver los problemas aditivos de cambio, comparación, cambio-comparación e igualación, en función del tipo de estructura e incógnita*.

Tipos de problemas del estudio

Este trabajo estudia los problemas de cambio, comparación e igualación y una variante de problemas que puede considerarse híbrido entre cambio y comparación que denominamos cambio-comparación. A continuación describimos los problemas considerados.

a) Comparación e Igualación

En ciertas situaciones numéricas encontramos dos estados, (estado 1 y estado 2) que se comparan (diferencia), utilizamos el esquema:

estado 1 + diferencia = estado 2

Hay dos formas básicas de expresar la diferencia. En los problemas de comparación la diferencia se expresa por medio de “más que” o de “menos que”. En los problemas de igualación se dice cuánto debe aumentar el estado menor para igualar al mayor o lo que debe disminuir el mayor para igualar al menor.

b) Cambio y Cambio-comparación

En otras situaciones hay un estado inicial, una variación y un estado final. Estos problemas tienen un esquema:

estado inicial + variación = estado final

Hay dos tipos de expresión de la variación. En los problemas de cambio la variación se expresa de manera simple (ganar, subir bajar...). En los problemas de cambio-comparación se expresa la variación con “más que” o “menos que”, de forma similar a los problemas de comparación (ver ejemplo en el Anexo).

c) Dato desconocido

Además de la diferencia entre las estructuras, en los problemas también es relevante la posición de la incógnita.

Problemas de incógnita 3: el dato desconocido es el tercero de los esquemas anteriores

(estado 2 o estado final).

Problemas de incógnita 2: el dato desconocido es el segundo en los esquemas anteriores (diferencia y variación).

Problemas de incógnita 1: el dato desconocido el estado 1 o el estado inicial

Los problemas de incógnita 1 no se analizan en este trabajo.

En los problemas de incógnita 3 la resta significa quitar, mientras que en los problemas de incógnita 1 y 2 se asocia a la distancia entre dos cantidades.

Metodología

Se ha realizado una prueba escrita con 8 problemas aditivos, 4 de ellos de incógnita 3 y 4 de incógnita 2 (enunciados en Anexo).

Los contextos utilizados responden a aquellos que implican una representación vertical (temperatura, nivel del mar y ascensor). Dado que el signo de los números influye en el éxito y la forma de resolver los problemas, se limitó los signos de los números de la siguiente forma:

positivo + negativo = negativo (problemas de incógnita 3)

negativo - positivo = negativo (problemas de incógnita 2)

Recogida de datos

La prueba escrita la contestaron 137 estudiantes futuros profesores de Educación Primaria que cursaban el segundo curso de Maestro de Primaria de la Universidad de La Laguna y habían recibido docencia en las asignaturas de Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas. La prueba se realizó en una sesión habitual de clase de una hora.

RESULTADOS

En el análisis de los resultados se ha tenido en cuenta si la respuesta es correcta/incorrecta y la estrategia de resolución. En muchas ocasiones los alumnos emplean diferentes estrategias en un mismo problema.

Estrategias de resolución de los problemas

Los estudiantes resolvieron los problemas utilizando seis estrategias básicas. Mostramos un ejemplo de cada una tomando las respuestas de distintos alumnos a un mismo problema, el de Cambio-Comparación, CbCp2.

Por la mañana, la temperatura en París era de 4º sobre cero y a lo largo del día bajó hasta quedarse en 5º bajo cero por la noche. ¿Cuántos grados más abajo, estaba la temperatura por la noche que por la mañana?

Respuesta con números negativos: $-5 - (+4) = -9$; $-5 - 4 = -9$

Estrategia 1. Plantear una operación de números positivos

En esta estrategia se resuelven los problemas con una suma o una resta de números positivos, utilizando los dos números dados en el enunciado. El hecho de usar números positivos implica que para llegar a la solución correcta es necesario contextualizar el resultado a la situación negativa (Figura 1).

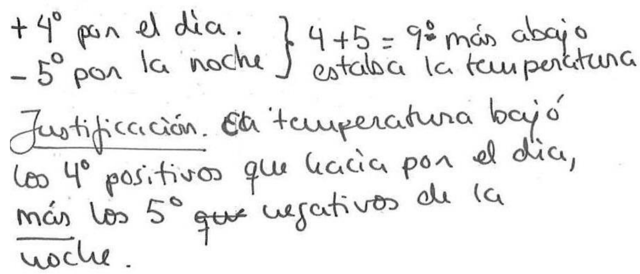


Figura 1. Respuesta del alumno 67

Estrategia 2. Plantear una operación de números negativos

Esta estrategia implica utilizar los dos números del enunciado del problema y efectuar con ellos una operación de suma o resta (Figura 2).

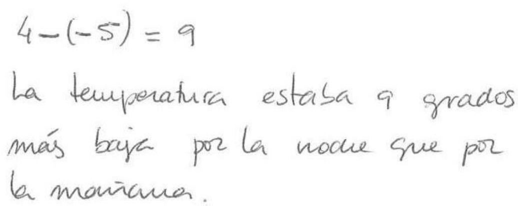


Figura 2. Respuesta del alumno 112

3. Representar en la recta numérica

Esta estrategia consiste en realizar una representación de los números en la recta numérica y establecer comparaciones entre los números señalados, contar sobre ella, o bien señalar un movimiento (Figura 3).

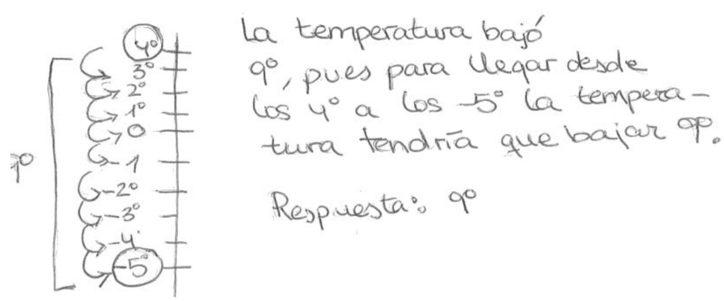
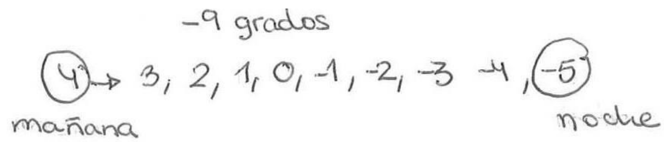


Figura 3. Respuesta del alumno 2

Estrategia 4. Contar siguiendo la secuencia numérica

Implica escribir un parte de la secuencia numérica, empezando y acabando con los dos números dados en el enunciado del problema. La secuencia numérica se escribe en forma horizontal o vertical. La secuencia vertical puede considerarse una representación simplificada de la recta numérica, aunque también puede entenderse como una forma de "seguir el conteo" (Figura 4).



Mañana Noche

Figura 4. Respuesta del alumno 36

Estrategia 5. Dar una explicación verbal

Consiste en redactar las posiciones de los números dados en el enunciado y los movimientos o comparaciones que se producen entre ellos, para llegar, de una manera verbal, a la solución contextualizada (Figura 5). No se escribe ninguna operación, ni dibuja una representación gráfica. Esta estrategia implica un proceso mental, ya sea de conteo, para estimar las distancias entre los números o para efectuar una operación (aunque esas estrategias paralelas no quedan explícitas en la escritura de los alumnos).

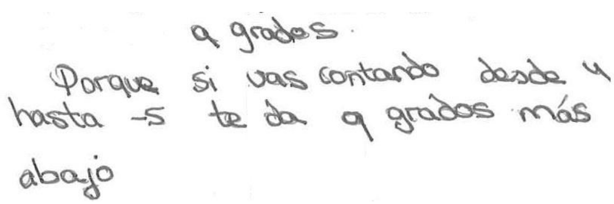


Figura 5. Respuesta del alumno 76

Estrategia 6. Hacer un esquema o dibujo

En esta estrategia se hace un dibujo o un esquema de la situación que describe el problema, situando los números dados en el enunciado y razonando a partir de dicha representación. En ocasiones, el dibujo realizado está muy detallado y real, y en otras, es un simple esquema (Figura 6).

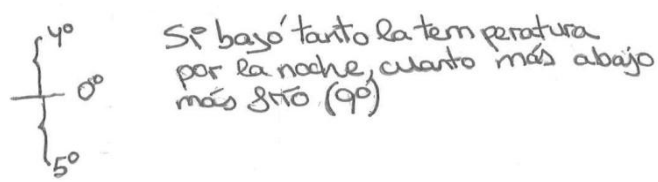


Figura 6. Respuesta del alumno 57

Estrategias según los problemas

En el análisis de resultados se ha considerado como correctas las respuestas que dan el número negativo que resuelve el problema, o bien, su opuesto número positivo, contextualizado al problema. Por ejemplo, el problema cuya resolución con números negativos es (+6)+(-7)=-1, o bien, 6-7=-1, también se ha clasificado como correctas las respuestas -1 o 1 grado bajo cero.

En la tabla 1 aparecen los porcentajes de éxito en los 8 problemas de la prueba. Todos los problemas de incógnita 3 tuvieron porcentajes altos de éxito excepto el problema de comparación que presentó los resultados más bajos de la prueba (68%). Los problemas de incógnita 2 tuvieron un éxito ligeramente inferior a los de incógnita 3, excepto el problema de cambio que tuvo un éxito del 88%, más próximo a los porcentajes de la mayoría de los problemas de incógnita 3.

Tabla 1. Porcentaje de éxito de los problemas

Problemas de Incógnita 3				Problemas de Incógnita 2			
Cb3	Cb-Cp3	Cp3	Ig3	Cb2	Cb-Cp2	Cp2	Ig2
92	90	68	88	88	76	77	77

Los problemas tuvieron más dificultad de lo que se esperaba para alumnos universitarios, ya que no se exigía que la operación con números negativos en su forma "canónica". Las dificultades fueron contextuales o debidas a incorrectas interpretaciones del enunciado, pero reflejan deficiencias en el conocimiento de los números negativos.

Tabla 2. Porcentajes de estrategia según los problemas

	Problemas							
	Incógnita 3				**Incógnita 2**			
Estrategias	Cb3	CbCp3	Cp3	Ig3	Cb2	CbCp2	Cp2	Ig2
Operación positivos	3	2	24	6	11	23	21	36
Operación negativos	54	37	16	35	5	7	5	3
Recta numérica	10	11	9	17	12	22	15	8
Secuencia	7	17	18	21	20	20	22	15
Explicación	9	15	12	6	39	17	18	8
Dibujo	-	1	5	2	4	1	6	2
Operación positivos y Otra estrategia	-	-	2	-	2	2	4	18
Operación positivos y Otra estrategia	17	15	7	13	1	5	3	1
Recta Secuencia Dibujo	-	2	7	-	-	3	6	8

La tabla 2 muestra las diferentes estrategias utilizadas en los problemas. La mayoría de las veces se emplean de forma única, y en otras se combinan dos o tres estrategias.

Los problemas de incógnita 3, Cb3, CbCp3 y Ig3, tienen resultados similares en el éxito y en las estrategias (tablas 1 y 2). La estrategia predominante es *operar con números negativos,* y hay un escaso uso de *operaciones con números positivos* y de realización de *dibujos*.

El problema Cp3 presenta un comportamiento diferente a los tres anteriores, ya que 39 alumnos de los 124 dieron una respuesta errónea. Muchos alumnos interpretaron que el enunciado del problema da la posición del pájaro (+2) y la posición del pez (-6) y se les pide la distancia entre ambos o la comparación entre las posiciones, es decir, realizaron una reestructuración del enunciado del problema como si fuera de incógnita 2 (Figura 7).

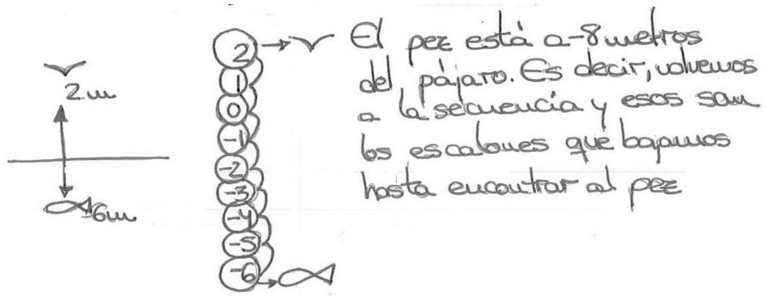


Figura 7. Respuesta del alumno 75

La errónea interpretación del enunciado por parte de tantos alumnos puede estar provocada porque se realiza una lectura rápida del mismo, después de haber contestado anteriormente a cinco problemas de enunciados semejantes. El hecho de que lo interpretaran como un problema de incógnita 2 hace que las estrategias sean similares a las de estos problemas.

En los problemas de incógnita 2 disminuye la estrategia *operar con números negativos*, pasando a ser la menos usada en los cuatro problemas, lo que indica una ausencia de conocimiento del significado de la resta como diferencia de dos estados de números negativos.

Los problemas Cp2 y el CbCp2 presentan estrategias similares, las cuales están muy repartidas. Parece que la semejanza de los enunciados en cuanto a la forma de expresar la comparación y la variación lleva a empelar las mismas estrategias.

En el problema Cb2 destaca la estrategia de dar una *explicación* verbal por encima de las demás (39%), esto se debe la pregunta del enunciado *¿Cuál fue el movimiento del ascensor?*, llevó a muchos futuros profesores a dar una respuesta en la que sólo indicaban la dirección del movimiento ("el movimiento fue de bajada", "que descendió", etc.). Es decir, no dieron una respuesta numérica del tipo: "el ascensor bajó 5 plantas".

En el problema Ig2, un 54% de los alumnos escribieron la operación con números positivos 3+5=8. Un número considerable de alumnos (al menos un 25%) mostraron lo que Peled et al. (1989) denominó *el modelo de recta dividida*. Un alumno cuando usa este modelo describe la distancia de un número positivo hasta el 0, y a continuación suma la distancia del 0 al número negativo que da el enunciado del problema. El alumno 35 contestó: *8 metros*. *Sumé 3 a 5, ya que tendría que bajar 3 metros para ponerse al nivel del mar, más otros 5 para ponerse al a altura del submarinista*. Los alumnos que no usen este modelo ven la distancia o el movimiento como un continuo desde 3 hasta menos 5.

CONCLUSIONES

Hemos encontrado una variedad de estrategias en las respuestas de los futuros profesores de primaria para resolver los problemas aditivos que reflejan diferentes modos de pensamiento. Los estudiantes analizados identifican los problemas con situaciones en las que están implicados los números negativos, ya que en algún paso del problema escriben números con signo negativo. Sin embargo, no expresan la operación en todos los problemas con la misma facilidad y recurren a otras estrategias, lo que ha provocado una variedad de respuestas.

Encontrar la solución correcta a los problemas no ha sido excesivamente difícil (el rango de error ha estado entre un 8% y 32%), pero lo que ha resultado complejo es resolverlos planteando una operación con números negativos. Hay una clara diferencia en las estrategias de resolución según los problemas en cuanto a la posición de la incógnita (los de incógnita 3 se resuelven con números negativos y los de incógnita 2 con otras estrategias) y escasa diferencia en cuanto a las cuatro estructuras de problemas (cambio, comparación, cambio-comparación e igualación), como había reflejado en Bruno y Martinón (1997).

Los futuros profesores no logran resolver con números negativos los problemas en los que el dato desconocido es la variación o la diferencia y recurren al "sentido común" para expresar la solución de forma contextualizada o gráficas. Su proceso de enseñanza-aprendizaje no les ha llevado a distinguir las situaciones de resta asociadas a "quitar" de la resta como "diferencia de dos estados". Sin embargo, las situaciones de resta como diferencia son más fáciles para explicar el significado de la resta números negativos, ya que la resta como "quitar" (o "bajar" en nuestros problemas) implica una concepción más sofisticada. En cierta forma reflejan la misma dificultad que la encontrada en alumnado de primaria y secundaria, en cuanto al distanciamiento entre la comprensión intuitiva de estos problemas y la formalización de los mismos a través de una operación con números negativos.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación. Ministerio de Ciencias e Innovación. Madrid.

Referencias

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199-208.

Bruno, A., Espinel, C., y Martinón, A. (1997). Prospective teachers solve additive problems with negative numbers. *Focus on learning problems on mathematics*, *19*(4), 36-55.

Bruno A, y Martinón A. (1999). The teaching of numerical extensions: the case of negative numbers. *International Journal in Mathematic Education Science and Technology*, *30*(6), 789-809.

Cunnigham, A. W. (2009). Using the number line to teach signed numbers for remedial community college mathematics. *Mathematics Teaching Research Journal Online*, *3*(4), 1-40.

Gallardo, A., y Saavedra, G. (2011). Significados de los números negativos fraccionarios en estudiantes de secundaria. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 361-369). Ciudad Real: SEIEM.

González, J.L. (1995). *Los números enteros relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Marthe, P. (1979). Additive problems and directed numbers. *Proceedings of the III PME*, 153-157. Warwick.

Maz, A. (2005). *Números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral Universidad de Granada. Granada.

Peled, I. Mukhopadahyay, S., y Resnick, L.B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. *Proceedings of the XIII PME*, 106-110.

Steiner, C. J. (2009). *A study of pre-service elementary teachers'conceptual understanding of integers*. Unpublished doctoral dissertation, Kent State University, Kent.

Vergnaud, G. y Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, *36*, 28-43.

Widjaja, W., Stacey, K., y Steinle, V. (2011). Locating negative decimals on the number line: Insights into the thinking of preservice primary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 80-91.

ANEXO

Enunciados y tipos de los problemas del estudio

Incógnita 3	
Luis observó la temperatura por la mañana y por la noche. Por la mañana, la temperatura era de 6º sobre cero y a lo largo del día, bajó 7º. ¿Qué temperatura hacía por la noche?	**Cambio (Cb3)** estado inicial + variación = estado final (+6) + (-7) = -1 6 - 7 = -1
Antes de moverse, el ascensor de un edificio estaba parado en la planta 4. Ahora está 6 plantas más abajo de esa posición. ¿En qué planta está ahora?	**Cambio-Comparación (CbCp3)** estado inicial + variación = estado final +4 + (-6) = -2 4 - 6 = -2
Un pájaro vuela a 2 metros sobre el nivel del mar y un pez está 6 metros por debajo del pájaro ¿En qué posición está el pez?	**Comparación (Cp3)** estado 1 + diferencia = estado 2 +2 + (-6) =-4 2 – 6 = -4
En Madrid la temperatura es de 3º sobre cero. Si la temperatura en Madrid baja 5 grados se iguala a la de Bilbao ¿Cuál es la temperatura en Bilbao?	**Igualación (Ig3)** estado 1 + diferencia = estado 2 +3 + (-5) = -2 3 – 5 = -2
Incógnita 2	
Un ascensor estaba en la planta 3, se movió y se paró en la planta 2 del sótano. ¿Cuál fue el movimiento del ascensor?	**Cambio (Cb2)** estado inicial + variación = estado final -2 - (+3) = -5 -2 - 3 = -5
Por la mañana, la temperatura en París era de 4º sobre cero y a lo largo del día bajó hasta quedarse en 5º bajo cero por la noche. ¿Cuántos grados más abajo, estaba la temperatura por la noche que por la mañana?	**Cambio-Comparación (CbCp2)** estado inicial + variación = estado final -5 - (+4) = -9 -5 – 4 = -9
Un edificio tiene dos ascensores (A y B). El ascensor A está en la planta 4 y el ascensor B está en la planta 1 del sótano. ¿Cuántas plantas más abajo está el ascensor B que el A?	**Comparación (Cp2)** estado 1 + diferencia = estado 2 -1 - (+4) = -5 -1 - 4 = -5
Un paracaidista vuela a 3 m. sobre el nivel del mar y un submarinista nada a 5 m. bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros tiene que bajar el paracaidista para estar en la misma posición que el submarinista?	**Igualación (Ig2)** estado 1 + diferencia = estado 2 -5 - (+3) = -8 -5 - 3 = -8