

# DEFINICIONES DE LA PROBABILIDAD Y PROBABILIDAD CONDICIONAL POR FUTUROS PROFESORES

## Prospective teachers' definitions of probability and conditional probability

J. Miguel Contreras<sup>1</sup>, Carmen Díaz<sup>2</sup>, Carmen Batanero<sup>1</sup> y Gustavo R. Cañadas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Granada, <sup>2</sup>Universidad de Huelva

### Resumen

*En este estudio se analizan las definiciones de probabilidad simple y condicional proporcionadas por una muestra de 196 futuros profesores, clasificándolas en función de su corrección y precisión. Se comparan los resultados en dos grupos de profesores, de acuerdo a su formación inicial y con los obtenidos en estudiantes de psicología.*

**Palabra claves:** *futuros profesores, probabilidad simple y condicional, definición.*

### Abstract

*In this study we analyze the definitions given by a sample of 196 prospective teachers and classify them taking into account its correctness and accuracy. We compare results in two groups of teachers with different background as well as with definitions provided by a sample of psychology students.*

**Keywords:** *prospective teachers, conditional and simple probability, definition.*

## INTRODUCCIÓN

Aunque la probabilidad es parte importante del currículo, no es frecuente que los futuros profesores de matemáticas tengan una preparación específica suficiente para llevar a cabo su enseñanza. Aunque muchos futuros profesores de Educación Secundaria tienen una licenciatura en matemáticas, otros provienen de otras licenciaturas o ingenierías y no han hecho un curso de cálculo de probabilidades. Además, ninguno recibe formación específica sobre didáctica de la probabilidad. Ello lleva a algunos profesores, una vez incorporados a la docencia, a reducir o incluso omitir la enseñanza de la probabilidad (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Es urgente ofrecer una mejor educación previa a estos profesores, si queremos mejorar la enseñanza de la probabilidad, pero ello requiere una evaluación previa de sus necesidades formativas.

La importancia de las definiciones ha sido analizada por Zazkis y Leikin (2008) quienes señalan que la capacidad de dar una definición muestra la comprensión de un concepto y en futuros profesores indica sus preferencias pedagógicas. Las definiciones, determinan también el enfoque de la enseñanza, el conjunto de propiedades y la forma en que se presentará a los estudiantes; por tanto modelan la relación entre esta definición y la imagen del concepto que crean los estudiantes (Vinner, 1991). Leikin y Winicki-Landman (2001) indican que definiciones dan nombre a los conceptos y establecen sus condiciones necesarias y suficientes; deben incluir un número mínimo de tales condiciones y suelen incluir otros conceptos previamente definidos. Desde el punto de vista matemático, definir supone nombrar un objeto que previamente existía; por ello la definición da vida a algo que no existía para el estudiante (Mariotti y Fischbein, 1997).

Todo ello indica la importancia de que los futuros profesores sean capaces de dar definiciones precisas de conceptos obligatorios en el currículo, como la probabilidad simple y condicional, incluida tanto en la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2007a), como en el Bachillerato (MEC, 2007b). En este trabajo analizamos esta competencia en una muestra de futuros profesores españoles de Educación Secundaria, comparando con las definiciones proporcionadas por estudiantes de psicología en la investigación de Díaz (2007). En lo que sigue presentamos el marco teórico, antecedentes, método y resultado del estudio.

## MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Una extensa investigación describe los componentes del conocimiento de los profesores. Nosotros nos basamos en el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza de Hill, Ball, y Schilling (2008), o: “conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (p. 374).

Dentro del conocimiento del contenido matemático, los autores diferencian: (a) el *conocimiento común del contenido*, puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona; (b) el *conocimiento especializado del contenido*. Que incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema; y (c) el *conocimiento en el horizonte matemático* que incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias. Para el conocimiento pedagógico del contenido proponen tres componentes: (a) El *conocimiento del contenido y los estudiantes* o “conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular” (p. 375); (b) el conocimiento del *contenido y la enseñanza*, que resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido; y (c) el conocimiento del *contenido y el currículo*.

Este modelo sugiere que los conocimientos matemáticos no son suficientes para enseñar probabilidad de una manera efectiva. En concreto, el conocimiento de las definiciones correctas de los conceptos probabilísticos, que evaluamos en este trabajo forma parte tanto del conocimiento especializado del contenido, como del conocimiento del contenido y la enseñanza.

### Antecedentes

Las investigaciones relacionadas con la comprensión de la probabilidad por parte de futuros profesores son escasas y la mayoría se centra en profesores de educación primaria (por ejemplo, Azcárate, 1995, Batanero, Cañizares y Godino, 2005, Estrada y Díaz, 2007). Todos estos estudios coinciden en la necesidad de aumentar la formación de estos profesores.

Respecto a los futuros profesores de educación secundaria, Fernández y Barros (2005) sugieren las dificultades de 37 docentes para formular sucesos y comprender los sucesos compuestos y Contreras, Díaz, Arteaga, y Cañadas (2012) la extensión de la falacia de la conjunción en 106 futuros profesores. Carter (2008) analizó las respuestas de 210 futuros profesores a un cuestionario, indicando errores en la comprensión de secuencias aleatorias, e indiferencia al efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad del muestreo. Chernoff (2009) analiza las justificaciones de 19 futuros profesores, que aparentemente tenían una percepción incorrecta de aleatoriedad. Concluye que sus razonamientos podrían ser consistentes con visiones no estándar del espacio muestral del experimento y no serían debidas a falta de razonamiento probabilístico.

El objetivo del presente trabajo es ampliar esta investigación centrándonos en las definiciones, punto que no ha sido estudiado en trabajos previos.

## MUESTRA Y TAREA PROPUESTA

En España los futuros profesores de matemáticas de secundaria han de cursar el Máster titulado Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en la especialidad de matemáticas (en lo sucesivo Máster de Secundaria). Alrededor del 50% de los que acceden a dicho Máster son Licenciados de Matemáticas, y el resto provienen de otras especialidades. Por otro lado, el 90% de los egresados de la Licenciatura de Matemáticas, realizan el concurso para profesor de matemáticas.

En consecuencia en España los profesores de matemática, son licenciados en Matemáticas o bien egresados del Máster de Secundaria o las dos cosas. Para conseguir una muestra representativa de futuros profesores de secundaria españoles se decidió tomar estos dos tipos de alumnos, de varias universidades. La muestra estuvo formada por 196 estudiantes: 95 estudiantes del último curso de la licenciatura de matemáticas (de las Universidades de Granada, La Laguna y Salamanca) y 101 alumnos del Máster de Secundaria (Universidades de Alicante, Barcelona, Cádiz, Extremadura, Granada, Salamanca, Santiago de Compostela, Pública de Navarra y Valladolid).

Los datos se tomaron como parte de una actividad de formación en didáctica de la probabilidad. La tarea, cuya finalidad de la tarea es valorar la comprensión de la probabilidad simple y condicional y la capacidad para definirla se presenta a continuación.

**Tarea.** Explica con tus propias palabras la diferencia entre una probabilidad simple y una probabilidad condicional.

Consideramos correctas las respuestas donde, o bien la definición es correcta, se pone un ejemplo adecuado, o se indican correctamente las diferencias entre los conceptos o ejemplos. Es decir, se cumplen las mínimas condiciones necesarias y suficientes (Leikin y Winicki-Landman, 2001); en los dos últimos supuestos los futuros profesores estarían mostrando su imagen del concepto (Vinner, 1991).

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados se clasifican ampliando la clasificación de Díaz (2007), quien sólo distingue definiciones correctas, incorrectas e imprecisas:

*C0: Definiciones incorrectas:* La definición no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna condición necesaria (Leikin, Winicki-Landman, 2001) o se confunden conceptos implicados. Hemos encontrado tres tipos:

*C0.1. Errores formales.* El sujeto incluye el término que desea definir en la definición o da una definición que corresponde a otro concepto. Por ejemplo: “*Como su nombre indica la probabilidad condicionada viene condicionada por otra sentencia. Al variar algo varia otro*”(S123).

*C0.2. Errores producidos por confundir conceptos que intervienen en la definición.* En el siguiente ejemplo se confunde probabilidad simple y conjunta, confusión observada por Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987): “*Probabilidad simple trata dos sucesos que no guardan relación directa, por ejemplo la probabilidad que llueva en Santiago y luzca el sol en Buenos Aires. Probabilidad condicional se refiere a que los sucesos están relacionados entre sí*” (S33).

*C0.3. Definiciones apoyadas en fórmulas que contienen errores.* En el siguiente ejemplo, hay un error en la fórmula de la probabilidad condicional, donde, además de invertir numerador y denominador, se sustituye la intersección por la unión de sucesos, confusión frecuente según Einhorn y Hogarth (1986): “*Probabilidad simple: es cuando intervienen los elementos sin estar*

*condicionados a algo. Probabilidad condicional: cuando los elementos esta condicionados a otros, cuando depende de otros:  $P(A/B) = P(A)/P(A \cup B)$ ” (S162).*

*C1. Definición imprecisa de la probabilidad condicional.* La definición incluye todas sus condiciones necesaria o suficientes (Leikin y Winicki-Landman, 2001) pero es confusa o añade condiciones no necesarias. Hay dos tipos:

*C1.1. Asume que el suceso condicionante precede al condicionado.* por tanto añade una condición innecesaria, donde subyace, por tanto la falacia del eje de tiempos (Tversky y Kahneman, 1982): “*Probabilidad condicional: ocurrido un suceso la probabilidad de ocurrir los venideros*” (S134).

*C1.2. Suponer un suceso dependiente del otro.* De nuevo se añade una condición no necesaria y podría subyacer la confusión entre condicionamiento y causalidad (Falk, 1986): “*Una probabilidad condicional es una probabilidad de un suceso que depende de otro suceso. Por ejemplo la probabilidad de la segunda extracción de una bola depende de la primera extracción*” (S54).

*C2. Define correctamente sólo la probabilidad condicional.* Encontramos tres grupos:

*C2.1. Olvida definir la probabilidad simple, y define verbalmente la condicional:* “*Cuando tratamos de calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, conociendo una información adicional, hablamos de probabilidad condicionada*” (Sujeto 1).

*C2.2. Olvida definir la probabilidad simple, y define la probabilidad condicional con fórmulas.* Una respuesta de este tipo sería utilizar la descomposición de la probabilidad condicional como cociente de la probabilidad conjunta y de la condición, dando una definición correcta, pero olvidando dar la definición de probabilidad simple: “*No conozco el termino de probabilidad simple. La probabilidad condicionada de un suceso A condicionado a otro B siendo A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio se formula:  $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$ ” (S6).*

*C2.3. Error al definir la probabilidad simple.* En el siguiente ejemplo se añade la condición de independencia para definir la probabilidad simple: “*Sean A y B dos sucesos posibles donde A y B son independientes si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ , entonces la probabilidad respecto A y B es simple*” (Sujeto 116).

*C3. Define imprecisamente las dos probabilidades pedidas.* Es el caso en que aparezcan imprecisiones en las dos definiciones. Hemos encontrado seis grupos; no comentamos los tres primeros pues son similares a otros ya comentados:

*C3.1. Suponer que el suceso condicionante tiene que ocurrir antes que el condicionado,* ya comentado. La diferencia ahora es que además la definición de la probabilidad simple es imprecisa.

*C3.2. Suponer que el suceso condicionante es dependiente del suceso condicionado,* ya comentado. La diferencia ahora es que además la definición de la probabilidad simple es imprecisa.

*C3.3. Fórmulas imprecisas para definir las probabilidades.*

*C3.4. Indican la diferencia entre probabilidad simple y compuesta, pero son imprecisas.* En la siguiente respuesta se define la diferencia aludiendo a la dependencia, que como hemos visto no es necesaria: “*La probabilidad condicional se diferencia de la simple en que está afectada por un suceso que no es independiente*” (S12).

*C3.5. En lugar de dar una definición, da un ejemplo:* “*La probabilidad simple, es por ejemplo, la probabilidad de sacar un oros de una baraja española. Una probabilidad condicionada, es por*

*ejemplo la probabilidad de sacar un oro de una baraja española condicionada a que la primera carta fue copas” (S29).*

*C4. Define correcta y de manera precisa las dos probabilidades.* Hemos encontrado dos grupos:

*C4.1. Definir ambas probabilidades verbalmente: “La probabilidad condicionada mide el valor de la probabilidad de un suceso A a partir de información de otro suceso B. Mientras que la probabilidad simple sólo da el valor de la probabilidad de ocurrencia de un suceso sin tener en cuenta otro suceso” (S64).*

*C4.2. Usar fórmulas para definir ambas probabilidades. “Probabilidad simple: Es una función  $f: \Omega \rightarrow R$  que a cada suceso le hace corresponder un  $n^\circ$  rea, verificando que  $P(A) \geq 0$ ,  $P(A) \leq 1$ ,*

$$P(A) = \frac{\text{Casos – Favorables}}{\text{Casos – Posibles}}$$

*Probabilidad condicionada: Dado un suceso B, cuando queremos saber la ocurrencia de otro suceso A a partir de información del suceso B;  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ” (S 22).*

En la Tabla 1 presentamos los resultados que muestran la escasa competencia de los participantes en el estudio para dar las dos definiciones en forma correcta (15,9%). Es una proporción muy pequeña tratándose de futuros profesores. En su lugar observamos la alta frecuencia de participantes que asumen la dependencia de sucesos (25,6% en las categorías C1.2 y C3.2) donde pudiera haber confusión entre condicionamiento y causalidad (Falk, 1986). La falacia temporal (Tversky y Kahneman, 1982; Gras y Totohasina, 1995) es también frecuente (19,9%; C1.1 y C3.1). Sumando las categorías anteriores un 45,5% de los participantes presenta errores en la definición al añadir condiciones innecesarias.

Con menor frecuencia, aparecen errores formales (5,6%, C0.1), definiciones imprecisas (14,3%, C3.3, C3.4 y C3.5), errores en fórmulas (1%, C0.3), confusión de conceptos (5%, C0.2 y C2.3), no definir la probabilidad simple (4%, C2.1 y C2.2) o respuestas en blanco (8,7%).

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en la definición

		Frecuencia	Porcentaje
Errores en las dos definiciones	C0.1. Errores formales	11	5,6
	C0.2. Confunde conceptos	6	3,1
	C0.3. Confunde fórmulas	2	1,0
Definición imprecisa de la probabilidad condicional	C1.1. Falacia temporal	5	2,6
	C1.2. Asume dependencia	1	0,5
Define correctamente sólo la probabilidad condicional	C2.1. Define verbalmente	4	2,0
	C2.2. Define con fórmulas	4	2,0
	C2.3. Error conceptual al definir la p. simple	4	2,0
Definición imprecisa de las dos probabilidades	C3.1. Falacia temporal	34	17,3
	C3.2. Asume dependencia	49	25,0
	C3.3. Fórmulas imprecisas	9	4,6
	C3.4. Indica diferencias en forma imprecisa	10	5,1
	C3.5. No da definición, sino ejemplo	9	4,6
Define correctamente las dos probabilidades	C4.1. Verbalmente	23	11,7
	C4.2. A través de fórmulas	8	4,1
	En blanco	17	8,7

En la Tabla 2 se resumen estas categorías en los cinco tipos principales, comparando los resultados con los de Díaz (2007). Por un lado, constatamos la menor proporción de definiciones correctas en los futuros profesores respecto a los alumnos de Psicología: aunque también dan en mayor porcentaje definiciones incorrectas.

Tabla 2. Resultados en futuros profesores y estudiantes de psicología

	Futuros pr. (n=196)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
C0. Errores en las dos definiciones	36	18,3	119	28,7
C1. Define imprecisamente la probabilidad condicional	6	3,1	28	6,8
C2. No define la probabilidad simple	12	6,0	90	21,7
C3. Definición imprecisa de las dos probabilidades	111	56,7	50	12,1
C4. Def.correcta de las dos probabilidades	31	15,9	127	30,7
Total	196	100	414	100

La diferencia se debe a la gran proporción de futuros profesores que da definiciones imprecisas de las dos probabilidades en comparación con los alumnos de psicología. Como hemos visto (Tabla 1), estas imprecisiones se producen al añadir condiciones innecesarias que corresponden a sesgos de razonamiento (falacia temporal o confusión de condicionamiento y condicionalidad) que aparecen en un 42,3% de los participantes y mucho menos en los alumnos de psicología, debido a que estudian estos sesgos en las asignaturas relacionadas con la psicología del razonamiento.

### CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Nuestros resultados sugieren que dar una definición correcta no fue fácil para los participantes en la muestra; esta competencia se relaciona con conocimiento especializado del contenido, como del conocimiento del contenido y la enseñanza en nuestro marco teórico (Hill, Ball, y Schilling, 2008), que es en consecuencia bajo en el caso de la probabilidad para estos profesores. Las definiciones fueron imprecisas al añadir los estudiantes condiciones no necesarias, que reflejan sesgos de razonamiento, que persisten a pesar de la mayor preparación formal (respecto a estudiantes de psicología).

Estos resultados son motivo de preocupación, pues el conocimiento de las definiciones fijadas por los profesores afecta sus decisiones curriculares, la forma en que enseñan los conceptos y sus concepciones sobre la forma en que los estudiantes pueden aprender dicho concepto (Zazkis y Leikin, 2008)

Estamos de acuerdo con Falk(1986) que el lenguaje cotidiano que utilizamos para indicar un problema de probabilidad condicional carece de precisión y por lo tanto es ambiguo. Sin embargo, un futuro profesor debe dominar el concepto y el lenguaje utilizado en la enseñanza. Ello es especialmente importante en el caso de la definición, pues los estudiantes adquirirán los conceptos a través de su definición y usarán estas definiciones para resolver problemas y en sus argumentaciones (Vinner, 1991).

En consecuencia, se sugiere la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que estos futuros maestros reciben durante su formación y la necesidad de discutir con ellos sus definiciones y sus sesgos de razonamiento, para prepararlos adecuadamente para su futura labor docente. Será también necesario familiarizarlos con las diferentes aproximaciones clásica, frecuencial y subjetiva,

así como con el enfoque de modelización en la enseñanza de la probabilidad, sugerido por Coutinho (2007).

## Referencias

- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. 1995. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.
- Batanero, C., Cañizares, M. J. y Godino, J. D. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service school teachers. *Proceedings of the First African regional conference of ICMI*. Ciudad del Cabo: ICMI. CD-ROM.
- Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.
- Chernoff, E. (2009). *Subjective probabilities derived from the perceived randomness of sequences of outcomes*. Tesis Doctoral. Simon Fraser University.
- Contreras, J. M., Díaz, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2012). La falacia del eje temporal: un estudio con futuros profesores de educación secundaria. En A. Estepa y otros (Eds.), *Actas del XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 197-208). Baeza: SEIEM.
- Coutinho, C. (2007). Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *Revemat.* 2(3), 50-67.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin.* 99, 3-19.
- Estrada, A. y Díaz, A. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO.* 44, 48-58.
- Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swif (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Fernandes, J. A. y Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos em estocástica. *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM)*, Porto: Faculdade de Ciências [CD].
- Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39( 4), 372-400.
- Leikin, R. y Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, 3, 62–73.
- Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.
- MEC. (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.
- MEC (2007b). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establecen la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255–269.

- Serradó, A., Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En: A. Rossman y B.Chance, (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Association for Statistical Education. Online: [www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications).
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En: Kahneman, D.; Slovic, P.; Tversky, A. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*(pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Vinner, S. (1991).The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.En: Tall, D. O. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer. p. 65–81.
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square.*Educational Studies in Mathematics*, 69, 131–148.