EL MECANISMO *COLLECTING* PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SERIE NUMÉRICA

Collecting as a mechanism for numerical series concept understanding

M. Laura Delgado Martín[a], María Teresa González Astudillo[a], Consuelo Monterrubio Pérez[a] y Myriam Codes Valcarce[b]

[a]Universidad de Salamanca, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

Resumen

En esta comunicación se utiliza el modelo de Pirie y Kieren para analizar el trabajo de una pareja de alumnos universitarios mientras resuelven una tarea en la que han de estudiar el carácter de dos series numéricas. Durante el proceso de solución, los alumnos recurren al mecanismo "collecting" como una forma de folding back para incorporar un conocimiento previo necesario. Este mecanismo se manifiesta en dos momentos a lo largo de la resolución de la tarea.

Palabras clave: *modelo de Pirie y Kieren, comprensión, collecting, series numéricas.*

Abstract

In this paper, the Pirie-Kieren model is used to analyze the work of two university students, while they are solving a task in which they have to determine the convergence of two numerical series. During the process, the students use the mechanism called "collecting", a type of folding back, to invoke their previous knowledge. This mechanism appears twice along the task resolution.

Keywords: Piere and Kieren model, understanding, collecting, *numerical series.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha aumentado el número de investigaciones que centran su foco de atención en distintos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de las series numéricas. Su interés radica tanto en su complejidad como en la de algunos conceptos vinculados a ellas, como sucesión o infinito. El centro de atención de muchos de estos trabajos, tanto a nivel nacional como internacional, gira en torno a la dualidad proceso/objeto de estos entes matemáticos (Codes, 2010; Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005a, 2005b; Kidron, 2002; McDonald, Mathews y Strobel, 2000, Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger, 2004), focalizado en aspectos relacionados con el aprendizaje de los estudiantes.

En los últimos años se ha abierto una nueva línea en la que se estudia las series numéricas desde la perspectiva del currículo, los libros de texto y la práctica del docente en el aula (González-Martín, 2013; González-Martín, Seffah, Nardi y Biza, 2009; González-Martín, Seffah y Nardi, 2009).

En este trabajo, continuando con el enfoque cognitivista centrado en la comprensión del estudiante, se utiliza el modelo de Pirie y Kieren para caracterizar el proceso que lleva a cabo una pareja de estudiantes cuando resuelven en el aula una tarea que involucra el manejo de series armónicas. En estos estudiantes, la acción consciente de buscar un conocimiento y aplicarlo para resolver satisfactoriamente una tarea caracteriza un tipo de folding back denominado *collecting* (Martin, 2008).

MARCO TEÓRICO

El modelo de Pirie y Kieren ofrece una manera de observar y describir el proceso a través del cual se crea y reorganiza el conocimiento matemático. Se centra en cómo los estudiantes reflexionan

Delgado, M. L., González, M.T., Monterrubio, C. y Codes, M. (2013). El mecanismo *collecting* para la comprensión del concepto de serie numérica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 245-252). Bilbao: SEIEM.

acerca de su conocimiento en un entorno de aprendizaje en el que cada uno realiza su interpretación personal a través de una actividad (Pirie & Kieren, 1992).

Este modelo considera la comprensión como un proceso dinámico y activo en el que se combinan construcción y acciones concretas en un movimiento continuo entre diferentes maneras de pensar representadas en el modelo con ocho "capas" o "niveles": Primitive Knowing, Image Making, Image Having, Property Noticing, Formalising, Observing, Structuring e Inventising (Pirie y Kieren, 1994).

Pirie y Kieren (1994) representan los ocho niveles en un diagrama en dos dimensiones (figura 1) en el que los círculos correspondientes a cada nivel están anidados uno dentro de otro. Este anidamiento ilustra el hecho de que el crecimiento en la comprensión no es ni lineal ni unidireccional y que cada nivel contiene todos los anteriores y está incluido en los niveles siguientes. Esto enfatiza y representa de forma gráfica el hecho de que la comprensión de un concepto matemático tiene una naturaleza "embebida", esto es, incluye dentro de sí a otros muchos (Martin, 2008).

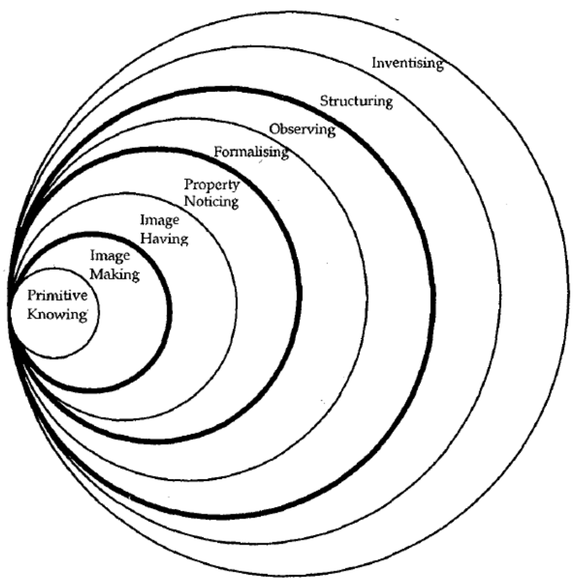

Figura 1. Modelo de Pirie-Kieren (Pirie & Martin, 2000)

Entre estas capas se puede transitar no sólo avanzando, sino también retornando a una capa inferior, para reflexionar, o incorporar comprensiones previas sobre un concepto matemático: "folding back" (Pirie y Kieren, 1992). Una forma de folding back se produce cuando un alumno vuelve a una capa interior para recuperar un conocimiento que ya tiene y que necesita para resolver la tarea. En este caso se habla de "collecting" o "folding back to collect" (Martin, 2008).

METODOLOGÍA

Se ha analizado la resolución de una tarea propuesta en el primer curso de Ingeniería técnica en Informática de una Universidad privada española, sobre el carácter de dos series numéricas. Éstas se estudiaron en el segundo cuatrimestre de la asignatura Fundamentos Matemáticos I, en el tema de sucesiones y series numéricas. Los alumnos trabajaron en pequeño grupo y los datos que se presentan en esta comunicación corresponden a uno de los dos grupos analizados. Se trata de dos estudiantes con buen expediente académico, no sólo en la asignatura de matemáticas, sino en general en todas. Aunque no eran compañeros de clase habituales, aceptaron que se les grabara mientras resolvían un ejercicio llamado "Actividad La Torre".

Esta actividad se formuló al final del tema de sucesiones y series numéricas, tras haberlas definido y después de haber enunciado criterios de convergencia de series numéricas, como el de comparación, el del cociente, el de las series geométricas, o el de la integral.

El primer contacto que tuvieron los estudiantes con las series numéricas fue a través de la serie geométrica de razón ½. El criterio de convergencia de las series geométricas se demostró en clase y el conocimiento de esta convergencia se utilizó para aplicar el criterio de comparación. También se demostró el criterio de la integral para estudiar la convergencia de las series armónicas ($\frac{1}{n^{\alpha}}$, con α real) e igualmente se utilizaron éstas para aplicar el criterio de comparación. Para el caso de α=1, la profesora explicó cómo Oresme dedujo la divergencia de la suma $\frac{1}{n}$ agrupando términos cuya suma es mayor que ½.

El enunciado de la tarea es el siguiente:

Se quiere construir una torre formada por cilindros de altura igual al radio de la base. El radio de la base es inversamente proporcional a la posición del cilindro en la torre, de modo que el radio del primer cilindro es 1, el del segundo es ½, el del tercero 1/3 y así sucesivamente. Si no hay restricciones en el número de piezas para construir la torre, ¿cuál es la altura y el volumen final de la torre? Deja los resultados indicados.

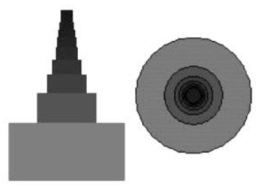

Figura 2: Ilustración del enunciado de la actividad

Para resolverla, los estudiantes han de explorar el carácter de dos series armónicas, una convergente y otra divergente a infinito

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En la resolución de esta tarea se han distinguido dos partes, una que corresponde con el proceso seguido hasta que se determinan las series de la altura y al volumen de la torre y la otra cuando se estudia el carácter de cada una de las series.

Determinación de las series

Comienzan a resolver el problema desde el Nivel Image Making fijándose en los elementos geométricos de cada cilindro que conforma la torre y extrayendo sus características.

José M.: La altura de cada cilindro, ¿cuánto es? Siempre la misma, ¿o no? O sea, la altura de cada cilindro, ¿cuánto es?

(…)

Carlos: No sé. Hache. No, no te da un dato.

José M.: Sí, pero tiene que tener una altura.

Carlos: Bueno, siempre va a ser positiva. O sea, no sé si variará.

Ante las dudas que les surgen para poder hacerse una idea de cómo está construida la torre, precisan la ayuda de la profesora que lee con ellos el enunciado del problema haciendo hincapié en la frase "*de altura igual al radio*". Con esta pequeña ayuda, consiguen acceder a un nivel exterior, Image Having, en el que son capaces de actuar sobre representaciones mentales, sin necesidad de pensar en un objeto concreto.

José M. ¿Cuál es la altura y el volumen final? Pues la altura, la altura va a ser… Mejor se… se saca primero el…

(…)

Carlos: La altura es sólo como los radios, ¿sabes?

José M.: La altura… Pero sacamos primero la expresión general de lo que es cada cilindro, y después el sumatorio es la altura, ¿no?

Estos alumnos utilizan el lenguaje simbólico matemático para expresar la altura de un cilindro cualquiera. Ser capaces de expresar una propiedad general de esta índole constituye una evidencia de que han alcanzado el nivel Property Noticing:

Carlos: Sí. A uno partido… Sí es esta, a uno partido de ene.

Finalmente, se desligan por completo de la imagen concreta y consideran el concepto como objeto formal determinando cuál es la serie correspondiente a las alturas (Formalising).

José M.: Es igual a uno partido ene. Sí, pero no. Pero desde… desde ene igual a uno

Una vez establecida la serie correspondiente a la altura se plantean calcular el volumen de la torre para lo que necesitan recordar la fórmula del volumen de un cilindro (Primitive Knowing). No se están replanteando la construcción de la serie correspondiente al volumen, simplemente, necesitan un recurso concreto para seguir avanzado en la resolución de la tarea y poder expresar la serie correspondiente al volumen de la torre.

José M.: Y el volumen, es… Volumen sub ene es… pi al cuadrado por hache. Entonces es pi…

Carlos: El radio al cubo.

Para determinar la serie correspondiente al volumen de la torre, estos alumnos reutilizan la construcción que llevaron a cabo con la serie de la altura y junto con el recuerdo correspondiente a la fórmula del volumen del cilindro (collecting) son capaces de pasar directamente de Primitive Knowing al nivel de Property Noticing.

José M.: … y el radio es uno partido de ene al cubo. Ya está. Ese es el volumen sub ene

A partir de aquí, es inmediata la generalización y determinación de la expresión correspondiente a la serie del volumen (Formalising).

Carlos: O sea, que el volumen total…

José M.: Entonces, el volumen total es el sumatorio desde ene igual a uno de pi…

Carlos: Pi.

José M.: …por pi, eh… uno partido de ene al cubo.

Estudio de la convergencia de las dos series

Para estudiar la convergencia los alumnos comienzan analizando el tipo de series que han construido. Como anteriormente habían resuelto una tarea sobre series geométricas (Codes, 2010) lo primero que se les ocurre es comprobar si se trata de una de éstas series. Por ello se preguntan acerca de la razón; en esta primera tentativa están pensando en calcular la suma de la serie y no sólo en estudiar su convergencia. Al comparar las expresiones algebraicas de las series geométricas que tienen en sus apuntes y las que han obtenido se dan cuenta de que la suma empieza en 1 y en las geométricas en 0. Comienzan a discutir qué pueden hacer para empezar desde 0 y así "arreglar su serie" para que se adapte a las condiciones con las que han trabajado previamente.

José M.: … ¿Ahora cómo se hace el sumatorio? La razón… (*Están buscando en los apuntes*) ¿Tienes tú la fórmula del sumatorio?

Carlos: Esto y… pero hay que saber… n está entre cero y uno, sí, siempre, sí

José M.: Bueno, es que siempre está, siempre empieza en uno, hay que quitar después lo que valga para cero. Pero es que lo que valga para cero no se puede sacar.

(…)

Carlos: Cero. Es verdad, no podemos dar ese valor. Esta va a ser…

José M.: No, ¿sabes lo que podemos hacer?, hacerlo desde cero y que salga la misma. Iba a decir, hacerlo desde cero y cambiar la expresión. Ene menos uno. No al revés es,… ¿Sabes cómo te digo? O sea, en lugar de decir ene igual a uno, dices ese hache igual a sumatorio de (*lo está escribiendo mientras lo dice*) y ene igual a cero, de uno partido de… Vamos a ver, tenemos un problema, que si lo hacemos con ene igual a uno…

Carlos: No podemos restar…

José M.: … no podemos después restar porque el denominador es cero.

Este razonamiento corresponde a un nivel Image Making puesto que están intentando adaptar la serie a otra que ellos conocen para luego poder estudiar la convergencia. Además, no se están dando cuenta de que están confundiendo en una potencia el exponente con la base (Warner, 2008).

Con la ayuda de la profesora se toman conciencia de que no se trata de una serie geométrica y consiguen identificar lo que caracteriza a este tipo de series (Property Noticing). Superan su confusión de base y exponente lo que constituye una reflexión autoconsciente (Martin 2008) al cuestionarse sobre su propia comprensión acerca de dicho concepto y reconocer que no estaban utilizando de forma adecuada los conceptos y debían reajustarlos para resolver la tarea:

José M.: Lo que va a multiplicar, eh elevado a ene, ¿no?

Deben comenzar de nuevo desde el nivel Image Making para estudiar las expresiones que tienen de las series y así poder determinar su carácter. Casi de una forma inmediata se dan cuenta de que la serie de las alturas diverge a infinito. Los alumnos recuerdan (collecting) que en clase se dedujo la divergencia de la serie armónica generalizada utilizando el criterio de la integral, y que para el caso en que el exponente es uno, aplicando el método utilizado por Oresme establecen la divergencia a infinito de la serie de las alturas:

Carlos: Esta es infinito. Esta es infinito, la de arriba.

(…)

José M.: Esta es igual a infinito por Oresme. Hala, ya está. Por lo que vimos ayer de…, por eso.

Alcanzan así el nivel Property Noticing puesto que se dan cuenta de una propiedad que han estudiado anteriormente y que pueden aplicar en este caso. La divergencia de la serie se confirma cuando recurren al test de la integral que se había manejado durante las clases teóricas para establecer el carácter de las series armónicas generalizadas. De esta forma alcanzan el nivel Formalising:

Carlos: Míralo. Espérate, pero era… alfa.

José M.: Espérate, que voy…

Carlos: …igual a uno, no converge.

José M.: No converge, con lo cual tiende a infinito, ¿no?

Carlos: Hala. Sí, porque a menos infinito es imposible. Tiene que ser positivo.

José M.: Claro, por el criterio integral.

A continuación, para establecer la convergencia de la serie correspondiente al volumen, combinan lo que han averiguado de la serie de las alturas con el criterio de la integral de nuevo. Se mantienen en el nivel Formalising puesto que están aplicando algo que ya han averiguado a una nueva situación al igual que hicieron al determinar la serie correspondiente al volumen.

José M.: Pero, ¿y la otra? La otra es igual

Carlos: No, porque tiene pi. Por el criterio integral no.

José M.: Sí bueno, …

Carlos: Míralo. Es uno partido ene elevado a…

José M.: Si alfa es mayor que uno… converge.

Carlos: Mayor que uno, converge. Pero esto es uno. Bueno, converge, sí, a… por pi.

José M.: Aunque sea pi, converge.

Carlos: Pero no sabemos a qué. Y además esto no es pi, es … Y aquí es pi.

Esta última intervención de Carlos les lleva a hacer un folding back porque se encuentran inseguros de que se pueda aplicar este criterio al aparecer en la expresión simbólica de la serie el número π. La dificultad que han encontrado, que puede resultar de la instrucción, no está tan asociada con el establecimiento del carácter de la serie cuanto con la aplicación de la propiedad de la linealidad: si una serie converge al multiplicarla por un número sigue convergiendo.

La inseguridad de Carlos les conduce a revisar otros criterios de convergencia de series de números reales de términos positivos para resolver este problema. Ello implica comenzar a aplicar cada criterio desde el nivel Image Making e ir avanzando hasta llegar a alguna conclusión. Comienzan intentándolo con el criterio de sandwich:

José M.: Venga vamos a ver, un momento. Si, si esa… mira por lo del sándwich. Si es pi, aquella va a estar por encima. Si esa converge, ah, esa no sabemos si converge.

Como no llegan a ninguna conclusión valoran calcular el límite, cuando n tiende a infinito, del término enésimo aunque esa sólo es una condición necesaria pero no suficiente para determinar la convergencia, como podrían haber comprobado con la serie de la altura.

Carlos: El término enésimo no nos dice nada, porque ya lo he mirado yo. (…) Míralo, siempre va a ser más grande, tiende a cero. O sea, que no se sabe nada.

Intentan buscar una serie cuyos sumandos sean mayores y que converja para aplicar el criterio de comparación:

José M.: Criterio de comparación. ¿No tienes tú estos que hicimos... que eran así estándares?

Carlos: ¿Cuál?

José M.: Por comparar. Uno que sea mayor que este, que converja. ¿Sabes? Mayor que éste y que converja. ¿Cuál podría ser? Cualquier exponencial es mayor que este. No, cualquier exponencial es más pequeño, porque está dividiendo. Claro, ¿o no? … una exponencial.

Carlos: Más pequeño.

José M.: (*Susurrando*) uno partido de… Por ejemplo, uno partido de ene al cuadrado es más pequeña, ¿no? Ah no, pi.

Carlos: ¿Uno partido…?

José M.: De ene al cuadrado. Es más pequeña.

Carlos: Al principio, pero luego… Más pequeño al principio, los primeros términos.

Como no consiguen encontrar una serie que les ayude para aplicar ese criterio, lo intentan con el criterio del logaritmo:

José M.: Vamos a ver con el criterio del logaritmo. (…) Ya está, ya lo tengo, converge. ¿Sabes? Lo he hecho con éste, con el criterio del logaritmo. A ver, es… el logaritmo neperiano de uno partido de pi elevado a… partido de ene al cubo, ¿no? ¿A ver cómo sería? (*escribe*). Partido del logaritmo neperiano de ene. Es decir, logaritmo neperiano de ene es ene al cubo partido de pi, ¿no? Y logaritmo neperiano de ene. Logaritmo neperiano de ene tiende a infinito, ¿no? Y esto te… bueno, lo sacas y dices tres por el logaritmo neperiano de ene, que tiende a infinito, menos k, eh no, logaritmo de en… logaritmo neperiano de pi, que es un número K, ¿no? Entonces dices, como este es tres y este tiendo a infinito, logaritmo neperiano de ene igual que aquí, bueno hago este logaritmo, ¿no? Pues tres partido… tres, converge. Lambda es mayor que uno, converge.

Aunque no han reconocido la serie como una armónica generalizada sí han sido capaces de establecer el carácter de la serie mediante el criterio del logaritmo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El modelo de Pirie y Kieren nos ha permitido describir y caracterizar el proceso que han seguido los alumnos para resolver la tarea planteada. En este proceso, juega un papel fundamental un tipo de folding back denominado collecting.

Los alumnos primero determinan la serie de la altura y posteriormente hacen lo mismo con la del volumen. En la primera, comienzan desde el nivel Image Making intentando hacerse a la idea de cómo está construida la torre. La intervención de la profesora les ayuda a acceder a un nivel exterior, Image Having, en el que son capaces de trabajar con la representación mental adquirida. Cuando utilizan el lenguaje simbólico y reconocen propiedades, avanzan hacia el nivel Property Noticing, y finalmente consiguen trabajar con el objeto formal, alcanzando el nivel Formalising. Hasta aquí podríamos considerar una evolución a través de los niveles del modelo de forma graduada a medida que su comprensión se va haciendo más estable.

Cuando se plantean determinar la serie del volumen, lo primero que hacen es volver al nivel Primitive Knowing, porque necesitan recordar un conocimiento elemental de geometría como es la fórmula del volumen de un cilindro. Esto les permite volver al nivel Property Noticing y a continuación al de Formalising. Es en este proceso donde se produce el tipo de folding back llamado “collecting”: han sido capaces de recurrir intencionalmente a conocimientos previos aplicándolos adecuadamente. Otro grupo de alumnos para construir la serie del volumen comienzan desde el nivel más interior avanzando gradualmente sin aprovechar la construcción de la serie de la altura (Codes, Delgado. González y Monterrubio, en prensa).

Para determinar la convergencia de la serie de la altura parten del nivel Image Making intentando adaptar las series encontradas a la forma de series geométricas que han trabajando previamente. La intervención de la profesora les facilita superar este obstáculo y avanzar hasta el nivel Property Noticing. En este momento aparece de nuevo el fenómeno de “collecting” ya que necesitan volver al nivel Image Making y recuperar el conocimiento adquirido sobre criterios de convergencia (integral, Oresme) para averiguar el carácter de la serie de la altura.

Este modelo ha permitido describir el proceso de solución de la tarea por este grupo de alumnos; el mecanismo collecting caracteriza la forma en que los alumnos recuperan un conocimiento ya adquirido y lo incorporan a la compresión del concepto serie numérica.

Referencias

Codes. M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca

Codes, M. Delgado, M.L. González, M.T y Monterrubio, M.C. (en prensa) Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las ciencias*.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. y Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: part I. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. y Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part II. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 253-266.

González-Martín, A. (2013). Students' personal relation to series of real numbers as a consequence of teaching practices. *8th CERME*. Antalya: Turquía.

González-Martín, A., Seffah, R. y Nardi, E. (2009). The concept of series in the textbooks: A meaningful introduction? En M. Tzekaki, M. Kalmidrimou, y C. Sakonidis (Eds.), *33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 105-112). Thessaloniki, Grecia: PME.

González-Martín, A., Seffah, R., Nardi, E. y Biza, I. (2009). The understanding of series: The didactic dimension. *61st Meeting of CIEAEM* (pp. 203-207). Montreal, Canada.

Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. En A. D. Cockbrun y E. Nardi (Eds.), *26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 209-216). Norwich, England: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.

Martin, L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior, 27,* 64-85.

McDonald, M. A., Mathews, D. M. y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects, En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*. *IV*. *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, 8*, 77-102.

Pirie, S. y Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in* Mathematics, *23*, 505-528.

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190

Pirie, S. y Martin, L. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal, 2,* 127-146.

Warner, L.B. (2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical ideas? *Journal of Mathematical Behavior, 27*, 206-227.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. y Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the American Mathematical Society, 51*(7), 741-750.