LA INVESTIGACIÓN EN VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL. PASADO, PRESENTE Y FUTURO

Research on visualization and spatial reasoning. Past, present and future.

Teresa Fernández Blanco

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

En este trabajo intentaré poner de manifiesto que la visualización sigue siendo un tema de interés para futuras investigaciones en el ámbito de la geometría y el razonamiento espacial. Un breve recorrido por los antecedentes recordará aquellos tópicos que han sido objeto de estudio en este campo y aquellas líneas de investigación que permanecen abiertas. Para terminar expondré los resultados de una investigación reciente que pone de manifiesto las carencias de los futuros maestros en este tema y la importancia de planificar y desarrollar acciones formativas.

Palabras clave: *investigación, visualización, razonamiento espacial y geometría.*

Abstract

In this work I will try to show that visualization keeps on being of great interest for future investigations in the field of geometry and spatial reasoning. A brief overview of the background will remember us those topics that have been studied in this field and those research lines that are still open. To finish I will show the results of a recent investigation that show us deficiencies of future teachers in this field and the importance of planning and developing training activities.

Keywords: *Research, visualization, mathematics, spatial reasoning and geometry.*

INTRODUCCIÓN

A lo largo las dos últimas décadas se ha podido constatar un resurgimiento de la investigación centrada en la visualización (Arcavi, 2003; Battista, 2007; Gutiérrez, 1998; Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Phillips, Norris, y Macnab, 2010; Presmeg, 2006, 2008; Rivera, 2011; Zimmerman y Cunningham, 1991) debido principalmente a dos razones. La primera de ellas tiene que ver con la presentación de conceptos, formas, relaciones y propiedades a través de nuevos elementos y entornos de aprendizaje propios del mundo altamente tecnológico en el que vivimos. Estos avances tecnológicos se convierten en potentes herramientas matemáticas y científicas al inferir dinamismo a muchas entidades que antes eran presentadas por medio de tablas, fórmulas y símbolos. Por otra parte, estos cambios en las herramientas tecnológicas conducen a cambios en los recursos semióticos y en las representaciones y viceversa lo que lleva a investigar sobre los procesos visuales que están teniendo lugar (Rivera, 2011, p.10).

La segunda de las razones antes citadas está relacionada directamente con cambios en la concepción de la propia naturaleza de la matemática, según los cuales la matemática es entendida como una búsqueda de patrones y la visualización será una herramienta fundamental para reconocer esos patrones (Hershkowitz et al., 1996, p. 163).

Uno de los grandes problemas de la visualización como objeto de investigación ha sido su propia definición y los diferentes nombres con los que se asocia. En Gutiérrez (1996a), Guillén (2010), Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012); Fernández (2012) aparecen listados de diferentes concepciones de la visualización espacial en las que el concepto de imagen juega un papel central,

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

junto con otros tres elementos: las representaciones externas, los procesos para manipular esas imágenes y las habilidades para la creación y procesamiento de las imágenes (del Grande, 1990; Gutiérrez, 1991; 1996a). En este trabajo no trataremos estos aspectos de la visualización de forma específica sino que serán abordados desde la óptica de las investigaciones llevadas a cabo.

La principal característica atribuida por Arcavi (2003, p. 216) a la visualización es que "ofrece un método de ver lo invisible", tanto entendiendo la visualización como nombre (el producto, la imagen visual) o bien como verbo (el proceso, la actividad). Cuando Arcavi (2003) habla de "ver lo invisible", en su sentido más profundo y figurativo, se refiere a percibir un mundo abstracto que la tecnología (ni óptica ni electrónica) no puede ver por nosotros. Las matemáticas tratan con objetos y entidades diferentes de los fenómenos físicos, y dependen en gran medida de la visualización en sus diferentes formas y diversos niveles, mucho más allá del cuerpo de la geometría y la visualización espacial. En los monográficos de Batista (2007), Phillips, Norris y Macnab (2010), Presmeg (2006) y Rivera (2011) se puede encontrar información muy completa de artículos sobre visualización en diferentes áreas de la matemática.

En este documento me centraré en el análisis de la investigación en visualización y razonamiento espacial (VRE). Dado que la geometría tiene un soporte muy fuerte en elementos visuales, esta ha sido una de las áreas en las que más se ha investigado esta relación (Phillips, 2010). Sin embargo, como los objetos de estudio en geometría están relacionados casi siempre con una entidad física o visual, esta relación entre geometría y visualización es más complicada de lo que, a priori, puede parecer.

La primera parte del trabajo presenta una revisión bibliográfica con la intención de describir qué tópicos han sido objeto de estudio y análisis en las investigaciones. En la segunda parte se describirá una investigación reciente que pondrá de manifiesto diversas carencias de futuros maestros de Educación Primaria en actividades que implican visualización y razonamiento espacial. En la tercera parte se enunciarán algunos trabajos de investigación que se están llevando a cabo en este campo y se mostrarán posibles caminos a seguir teniendo en cuenta cuestiones de investigación que han sido propuestas por diversos autores (Guillén 2010, Presmeg, 2006, Phillips et al., 2010).

ANTECEDENTES

Esta revisión de la bibliografía sobre visualización y razonamiento espacial se hará a través de cuatro facetas o dimensiones (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica) descritas en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), que permitirá una visión desde una perspectiva diferente a la habitual. A causa de la evidente limitación de espacio, no se pretende proporcionar una relación exhaustiva de referencias sino presentar una idea más o menos general del estado de la cuestión.

Faceta epistémica

Las principales cuestiones epistemológicas abordadas por las investigaciones que nos ocupan son dos: una se refiere a la argumentación y demostración y la otra se deriva de la ambigüedad de la palabra *representación*.

La primera está relacionada con el estatus otorgado a la visualización en la educación matemática; puesto que, aunque la mayoría de los matemáticos confían y utilizan la argumentación visual en su trabajo, muchos de ellos son reacios a mostrarla como un recurso habitual. Ello se debe, principalmente, a que durante los siglos XIX y XX los estándares para la publicación se basaban en un pensamiento lógico y formal lo que implicaba cierta hostilidad hacia las argumentaciones visuales. Sin embargo, a finales del siglo XX los matemáticos redescubren el poder del razonamiento visual y sugieren demostraciones y teoremas puramente visuales.

Según Battista y Clements (1995, p. 53), tanto la teoría de Piaget como la de van Hiele indican que los estudiantes pueden comprender y trabajar explícitamente con sistemas axiomáticos sólo después de haber alcanzado los niveles más altos de ambas jerarquías:

> El camino más efectivo para engendrar un uso útil de la demostración en geometría en la escuela secundaria es evitar la demostración formal durante gran parte del trabajo con los estudiantes. Si nos centramos en ayudar a los estudiantes a construir unos cimientos empíricos y visuales para los niveles más altos del pensamiento geométrico, podemos llegar a conseguir que aprecien la necesidad de una prueba formal. Sólo entonces, serán capaces de utilizarlo significativamente como un mecanismo para justificar ideas.

Por su parte, Arcavi (2003, p. 224) argumenta que la visualización puesta al servicio de la resolución de problemas puede también ir más allá de su papel procedimental e inspirar una solución general y creativa. Asimismo, las representaciones de formas visuales pueden ser elementos legítimos en las demostraciones matemáticas.

Diversas investigaciones, como la de Soto-Andrade (2008), muestran que, a pesar de que el razonamiento visual está contemplado en los currículos, en general, los profesores lo siguen presentando como un argumento auxiliar o introductorio, un accesorio al que no asignan el estatus que debería tener. Como consecuencia, los alumnos no lo consideran como un tipo de razonamiento básico para su formación ni como una acción del todo válida para hacer matemáticas.

La otra cuestión epistemológica que adquiere un papel importante en el campo de la visualización es la noción de *representación*.

La noción abstracta de representación implica una relación entre dos o más configuraciones, en la cual una representa a la otra en un sentido que se determine (Goldin, 2002, p. 207). En el contexto de la psicología del aprendizaje matemático y de la resolución de problemas, es preciso considerar por un lado las configuraciones internas del individuo (configuraciones verbales y sintácticas, visual imaginería, reglas y algoritmos, esquemas, heurísticos, etc.) y por otro las configuraciones externas, generalmente observables a través del entorno (objetos de la vida real, gráficos, figuras geométricas, palabras escritas y habladas, etc.). Además, debemos considerar las posibles relaciones que representan o pueden representar.

El rechazo de la corriente conductista a las configuraciones internas y, por otra parte, el rechazo de los constructivistas radicales a las configuraciones externas, motiva que esta definición de representación no sea aceptada por ninguno de estos dos grupos. Estos enfoques se ven reflejados en dos puntos de vista en la educación matemática: el primero de ellos, el tradicional, tiende a centrarse en las producciones de los estudiantes, su rendimiento matemático, sus logros matemáticos, rechazando o no enfatizando los aspectos relacionados con lo interno. Por su parte, el otro punto de vista se centra en procesos cognitivos y cualitativos de la comprensión matemática, sin acentuar lo externo. Estas dos perspectivas se sustentan en un desequilibrio que provoca que la noción de representación como una interacción descriptiva de lo externo y lo interno no sea aceptada.

Sin embargo, según Goldin (2007), la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El interés primario del proceso de instrucción se centra en la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes. Las conexiones entre representaciones se pueden sustentar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación. Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

Algunos autores como Presmeg (2006, p. 206), afirman que la imaginería visual (representación interna) es subyacente a la creación de una disposición espacial o a un dibujo o diagrama, por lo que no tiene sentido la separación entre representación interna y representación externa. Esta autora prefiere utilizar los términos *imaginería* e *inscripciones* (Roth, 2004) puesto que capturan de una manera muy concisa los aspectos visuales de esos dos tipos de representaciones.

Para Duval (1999, pp. 4-5) la distinción entre representaciones internas y externas se realiza atendiendo al modo de producción y no a su forma o naturaleza y que, en ese sentido, los signos no son ni una cosa ni la otra. Por ese motivo, este autor sostiene que la distinción debería hacerse entre un tipo de representaciones cognitivas que son producidas de forma intencional por un sistema semiótico (mental o externo), llamadas representaciones semióticas, y aquellas representaciones cognitivas que son producidas de forma casual o automática por un dispositivo físico (fotografías, reflexiones) o por un sistema orgánico (sueños, memoria visual de imágenes), que reciben el nombre de representaciones físicas/orgánicas.

Una cuestión más que atañe a la faceta epistemológica es el estudio de los contenidos matemáticos. El análisis de los distintos documentos revisados nos ha llevado a establecer seis categorías teniendo en cuenta el tipo de contenido propiamente matemático en el que se centran: representaciones planas de objetos tridimensionales, desarrollos planos de cuerpos espaciales, clasificación de figuras, comprensión de conceptos y propiedades, transformaciones geométricas y validez de la demostración o argumentación visual.

En Gonzato, Fernández y Godino (2011) se hace una revisión de la clasificación de tareas de visualización presentadas por diversos autores. La variedad de tipos de tareas muestra la complejidad del tema y apoya la propuesta de clasificar en tres familias los tipos de problemas en los que intervienen habilidades de visualización y orientación espacial.

Faceta cognitiva

Desde el punto de vista de la faceta cognitiva muchos trabajos se han centrado en el análisis de teorías para el desarrollo del aprendizaje geométrico. La Teoría de van Hiele es el marco teórico dominante cuando se trabaja en didáctica de la geometría. La teoría e investigación desde la perspectiva de Van Hiele tiene fuertes implicaciones en la instrucción en geometría de cara a organizar unidades de enseñanza y para evaluar el progreso de los estudiantes (Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1998). Siguiendo esta teoría, la visualización aparece en primer plano en el primer nivel de razonamiento, imprescindible en la jerarquía del pensamiento geométrico. Gutiérrez (1992) aplica este modelo para comprender y organizar la adquisición de habilidades de visualización espacial en geometría tridimensional.

Según Batista (2008, p. 342) un "*objeto cognitivo* es una entidad mental sobre la que se opera durante el razonamiento y una *representación* es algo que se pone en el lugar de otra cosa". De esta manera, en geometría uno razona sobre objetos mediante representaciones. La mayor parte de los investigadores distinguen entre dos tipos de objetos cognitivos que se presentan durante el razonamiento geométrico: *dibujo y figura*. Este autor defiende que esta dicotomía es insuficiente para capturar la complejidad de los objetos del razonamiento geométrico y propone cuatro tipos de objetos geométricos:

> El objeto físico que es una entidad concreta (puerta, pelota, dibujo o figura arrastrable, etc.); el objeto perceptivo es una entidad mental percibida por un sujeto cuando está viendo un objeto físico; el objeto conceptual que es un modelo mental que es activado cuando un objeto es percibido, cuando una entidad es recordada mediante reflexión y análisis, o cuando se encuentra una descripción verbal. Por último, un objeto geométrico es una especificación verbal explícita formal de una relación espacial o de las características que definen una categoría de formas (p. 343).

Para Laborde (1993, p. 49), la distinción entre figura y dibujo está en que “el dibujo se refiere a la entidad material, mientras que la figura se refiere a un objeto teórico”. Esta distinción también la lleva al contexto de la geometría dinámica, donde una *figura* (como concepto geométrico abstracto) es invariante cuando pasa la prueba de arrastre (es decir, sigue manteniendo las mismas características que el objeto básico) mientras que un dibujo no las mantiene.

De igual forma, Presmeg (1997, p. 305) observó que “Un dibujo o un diagrama es, por su naturaleza, un caso concreto, que incluso para el pensamiento matemático más trivial es necesario abstraer y generalizar”. Esta autora sostiene que la concreción de un caso de dibujos e imágenes es el origen de muchas dificultades en el razonamiento matemático basado en la visualización.

Desde el punto de vista de Duval (1995) existen dos características por las cuales una figura geométrica no puede ser vista como un dibujo de un objeto físico: la primera surge de las limitaciones internas de organización que existen en las figuras geométricas y no existen en los dibujos físicos de los objetos; la segunda es debida a diferencias funcionales, pues una figura debe ayudar o dar una clave para resolver un problema. Esas diferencias se mantienen independientemente de si la representación es en papel o en la mente.

Las cogniciones de los sujetos y las relaciones entre ellas sobre los distintos objetos básicos que se identifican en el razonamiento geométrico y espacial son las que van a permitir comprender este tipo de razonamiento. Para ello hay que tener en cuenta dos consideraciones: La primera está relacionada con la manera en que la concepción afecta a la percepción. “Lo que uno ve está afectado por lo que uno sabe y piensa” (Battista, 2007, p. 844). La segunda consideración está relacionada con el papel que pueden jugar los diagramas, según actúen como datos o como representaciones. Battista (2008, pp. 348-349) sostiene que ambos, figura y dibujo, pueden ser representaciones u objetos dependiendo de la función que estén realizando. Este autor considera que la educación matemática no ha tenido en cuenta que los diagramas pueden ser objetos gráficos geométricamente analizables y se ha centrado en ellos como representaciones imperfectas de conceptos geométricos abstractos.

Podemos distinguir tres centros de interés, dentro de esta faceta, que han suscitado la atención de los investigadores:

1- Aprendizaje de conceptos

Según Vinner y Hershkowitz (1983, p. 20) existen dos dificultades importantes al tratar con la formación de conceptos: una es la propia noción de concepto y otra es cómo determinar si un concepto se ha formado en la mente de alguien. Al ser las matemáticas una ciencia deductiva, los conceptos se definen a partir de conceptos previos, salvo que sean conceptos primarios con lo cual siguen indefinidos. Por lo tanto, si un concepto no es primario la definición matemática únicamente determina todos los ejemplos y no ejemplos del concepto, y de este modo la actividad se centra en identificar los ejemplos del concepto.

Hershkowitz (1990, p. 81), destaca el papel de los procesos visuales en la formación de la imagen de un concepto, papel que es especialmente importante en el caso de objetos tridimensionales. Para ella, el concepto se deriva de su definición matemática, por lo que tiene atributos críticos (o relevantes, que son los que un concepto tiene que tener para ser modelo del concepto) y atributos no críticos (irrelevantes, que sólo los poseen algunos ejemplos). En general, los atributos irrelevantes se logran primero porque tienen fuertes características visuales y son los que permiten hacer las clasificaciones dentro de un mismo concepto. Para describir el desarrollo cognitivo de los estudiantes en relación con las imágenes de los conceptos, esta autora considera lo que denomina el *fenómeno prototipo*:

> Cada concepto tiene un conjunto de atributos críticos o rasgos relevantes y un conjunto de ejemplos. Todos estos ejemplos son matemáticamente equivalentes ya que satisfacen la definición del concepto

> y contienen todos sus atributos críticos, pero son diferentes el uno del otro visualmente o psicológicamente (Hershkowitz, 1989, p. 63).

Sin embargo, hay ejemplos que tienden a ser más populares que otros y esos son los llamados *ejemplos prototipo*. Generalmente, los ejemplos prototipo tienen la lista de atributos mayor, son los que primero se adquieren y existen en la imagen de concepto de la mayoría de los estudiantes.

Por otra parte cabe destacar la idea de concepto figural de Fischbein (1993). La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales (las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales.

> Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales como idealidad, abstracción, generalidad, perfección. (Fischbein, 1993, p. 143).

De la investigación de Fischbein y Nachlieli (1998) se deduce que hay que distinguir entre conceptos que se corresponden con figuras invariantes y conceptos que se corresponden con variedad de figuras. Por ejemplo, la diferencia de resultados entre el concepto de ángulo recto y el de paralelogramo es que la forma del primero es siempre la misma mientras que el segundo puede aparecer en formas diferentes. Este hecho conduce a que, con la edad, este conflicto entre lo figural y lo conceptual se supere, ya que el primero es más un problema perceptivo que matemático.

La clasificación también se halla relacionada con el aprendizaje y formación de conceptos, tal y como muestran De Villiers (1994) y Jones (2000). La distinción entre las clasificaciones jerárquicas, que utilizan definiciones *inclusivas,* y las particionales, que utilizan clasificaciones exclusivas, pone de manifiesto este hecho.

En el modelo de formación de conceptos matemáticos descrito por Presmeg (1992, p. 607) las imágenes de patrones, como base de los conceptos matemáticos, son la única construcción propia de los individuos y no es accesible a otros. Sin embargo, estas construcciones están basadas, en una cantidad más o menos elevada, de imágenes concretas que surgen de experiencias matemáticas y que pueden haber sido compartidas con otros.

2- Procesos y estrategias

Desde el punto de vista de la educación matemática cuando nos referimos a la visualización como "verbo" estamos centrándonos en el proceso, en la actividad, en el cómo de la visualización. Diversos investigadores han analizado este aspecto, bastante complejo y difícil pero muy interesante desde el punto de vista de la educación, a través de modelos, fases y modos cognitivos.

Según Bishop (1989, p. 177), las imágenes visuales, mentales o físicas, son aquellos objetos que se manipulan en la actividad de la visualización. Esa manipulación se realiza según dos tipos de procesos:

- *Interpretación de información figurativa* (IFI). Es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Esto incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales e imágenes visuales. Se trata de una capacidad de contenido y de contexto, y particularmente se refiere a la forma del estímulo material.

- *El procesamiento visual* (VP) es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, así como el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Se trata de una capacidad de proceso y no se refiere a la forma del estímulo del material presentado. Su naturaleza es privada y personal, siendo el proceso inverso del anterior.

En el modelo de Burden y Coulson (1981) toda estrategia de resolución de un determinado ítem espacial obedece a tres características: el modo de representación, aquello sobre lo que el sujeto concentra su atención y los medios concretos auxiliares. El modo de representación hace referencia a si el sujeto necesita formar o hacer uso de una imagen mental en el curso de la realización del ítem espacial. En cuanto al modo de concentrar la atención del sujeto, estos autores distinguen dos modos en que los alumnos dirigen su estrategia hacia el objeto considerándolo globalmente o parcialmente. Los medios concretos auxiliares utilizados por el sujeto durante la resolución del ítem espacial hacen referencia a los movimientos realizados por ciertos sujetos desplazando sus lápices en el aire, al tomar notas, si inclinan sus cuerpos o cabeza un cierto ángulo, etc.

Tomando como punto de inicio el estudio de Burden y Coulson (1981) y modificándolo para ajustarlo a sus objetivos, Gorgorió (1998) analiza las estrategias de los estudiantes desde tres puntos de vista, que no corresponden a tres tipos de estrategias cognitivas sino a tres aspectos diferentes de la estrategia de resolución del estudiante: la estructuración de la estrategia, el procesamiento de la estrategia y el centro de atención de la estrategia.

Por su parte, Duval (1995) distingue cuatro tipos de aprehensión cognitiva cada una con sus leyes de organización y procesamiento: aprehensión perceptiva, secuencial, discursiva y operativa. Según Duval (1995, p. 155) “La aprehensión operativa no trabaja independientemente de las otras, particularmente de la aprehensión discursiva, sino que usualmente el procesamiento heurístico figural está subordinado a esa aprehensión”. Asimismo, el contraste entre la representación física de un objeto (un dibujo en papel o en una pantalla) y la imagen mental de ese objeto no es la característica más importante desde el punto de vista de las figuras geométricas ya que tienen la misma complejidad cognitiva. Las figuras pueden ser internalizadas y las imágenes pueden hacerse manifiestas.

Una de las hipótesis del trabajo de Soto-Andrade (2008, pp. 5-6) es que “La visualización es provocada por la activación de metáforas previas que implican un cambio de modo cognitivo del estudiante”. Este autor entiende por modo cognitivo nuestra forma preferida de pensar, percibir, recordar, de conocer y que aparece por sí misma cuando estamos resolviendo un problema. Se puede hablar de cuatro modos cognitivos que son resultado de combinar dos dicotomías: verbal/no verbal y secuencial/no secuencial (relacionados con el hemisferio del cerebro derecho e izquierdo y el frontal y occipital). Ese cambio de modo cognitivo que se produce con la activación de las metáforas se mueve desde el verbal al no verbal (visual) y finalmente, desde el secuencial al simultáneo.

Gal y Linchevski (2010, p. 166) analizan las dificultades implicadas en los procesos figurales del aprendizaje de la geometría a través de tres fases: la organización perceptiva, la fase de reconocimiento y la fase de representación. Estos autores muestran cómo los principios de la Gestalt de la organización perceptiva pueden ser utilizados para explicar algunas de las dificultades encontradas en tareas geométricas. En la siguiente fase, la de reconocimiento, la forma y objetos, una vez percibidos, son reconocidos. El objeto es dividido en sub-objetos cada uno de los cuales es clasificado para posteriormente, cuando esas piezas y su configuración están determinadas, el objeto se reconoce como un patrón compuesto por dichas piezas. El reconocimiento de esos patrones se puede realizar mediante un proceso de abajo-arriba o de arriba-abajo. La última fase, la fase de representación, ocurre cuando, una vez que los objetos son reconocidos, se representan en la mente.

3- Preferencia del método.

El objetivo de las investigaciones se centra en analizar las características de los visualizadores y el efecto de una enseñanza visual o no visual sobre visualizadores y no visualizadores en términos de rendimiento en VRE.

Siguiendo la premisa de que todo problema matemático involucra lógica y razonamiento para su resolución, un método es visual si involucra imágenes visuales como una parte esencial del trabajo. En ese sentido, Presmeg (1986b, pp. 42-43) define un *visualizador* como una persona que prefiere usar métodos visuales al tratar con problemas matemáticos que pueden ser resueltos por ambos métodos, mientras que un *no visualizador* es aquel que los resuelve por métodos no visuales.

Partiendo de la clasificación anterior, una línea de investigación se ha interesado en los estudiantes que sobresalen en visualización. Una de las razones que nos da Woolner (2004, p. 450) para intentar explicar cuál es el motivo de que los visualizadores no estén entre los estudiantes de éxito matemático, tiene que ver con que el estilo de aprendizaje preferido por los visualizadores no concuerda con el estilo claramente verbal de la enseñanza y evaluación tradicional. Otra razón se deriva de que las diferencias entre enfoque visual y enfoque verbal pueden proceder de la existencia de distintos tipos de visualizadores. Kozhevnikov, Hegarty y Mayer (2002) argumentan que algunos visualizadores tienden a utilizar imágenes pictóricas concretas mientras que otros obtienen el éxito a través de imágenes más abstractas que requieren de más habilidades espaciales. De ahí que los visualizadores puedan tener alta o baja capacidad espacial. También se ha sugerido que los problemas de los visualizadores provienen de la falta de equilibrio entre la comprensión visual y la verbal.

Presmeg (1986a, pp. 103-105) explica que este fenómeno puede deberse a factores externos (la propia naturaleza de las matemáticas, limitación en los tiempos de evaluación, los libros de texto y métodos de enseñanza) e internos (requieren más carga cognitiva y las imágenes concretas pueden hacer pensar en detalles irrelevantes o incluso introducir información falsa). Ambos factores pueden interactuar para producir una preponderancia de no visualizadores entre alumnos de alto rendimiento matemático.

Faceta instruccional

Según Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988, p. 68), "los efectos de la instrucción para incrementar las habilidades de visualización espacial proporcionan evidencia que soporta la noción de que esas habilidades pueden ser enseñadas y aprendidas".

La mayor parte de los trabajos presentan propuestas para trabajar la conversión de representaciones planas de objetos 3D, conceptos geométricos básicos, exploración de transformaciones geométricas en el plano y desarrollos planos de sólidos. También se analiza el efecto de los recursos en esa instrucción, tanto de los materiales manipulativos como de los nuevos entornos tecnológicos. A continuación comentaré sólo algunos trabajos a modo de ejemplo.

Hershkowitz et al. (1996), describen tres proyectos centrados principalmente en la perspectiva de la educación visual para la interacción de las formas con el espacio real. Desde el punto de vista de estos autores, estos proyectos muestran una importante contribución a la educación visual: en los tres el punto de partida de la actividad de enseñanza aprendizaje son las formas en el espacio, a los estudiantes se les guía hacia la matematización del entorno visual con el que interactúan y, las herramientas y acciones matemáticas son ricas y variadas, yendo más allá de la identificación y análisis de las componentes y propiedades de entidades visuales, considerando relaciones dinámicas y niveles superiores entre entidades visuales en el espacio.

Tal y como señala Gutiérrez (1998, p. 6), hay numerosos estudios que han analizado las componentes específicas de la visualización en la geometría espacial. Varios de ellos se centran en las representaciones planas de objetos tridimensionales. Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) parten de la base de que en la representación plana de objetos tridimensionales hay una pérdida de información que dificulta tanto el análisis de las propiedades de los objetos como el propio reconocimiento de los mismos. La comunicación de información espacial a partir de figuras bidimensionales demanda la aplicación de ciertos convencionalismos, no triviales, que no son enseñados en la escuela tradicional y que son fundamentales para interpretar dichas representaciones planas y poder reconstruir el objeto tridimensional.

La premisa de Malara (1998) se basaba en que la única forma de que los profesores incluyeran cierto tipo de actividades de sólidos geométricos en sus clases (no habituales en los planes de estudio) era que ellos mismos discutieran y comprobaran la potencia, las dificultades y problemas que podrían surgir de los mismos. Este trabajo se centra exclusivamente en la representación de objetos en una trama isométrica con una propuesta de ejercicios que implican la habilidad de visualizar mentalmente los sólidos en nuevas posiciones, desde varios puntos de vista, dibujar tales representaciones, identificar objetos y completar su representación, etc.

Según Pallascio, Allaire y Mongeau (1993, pp. 8-9), desde la investigación en visualización emergen dos tipos de imágenes mentales, aquellas que pertenecen a un consumo de datos inmediato y que están relacionadas con competencias analíticas (percepción) y las que tratan con la reconstrucción mental de objetos, relacionadas con competencias sintéticas (representación). El trabajo de estos autores pretende mostrar el desarrollo de competencias espaciales a través de una propuesta de actividades que alternen o combinen competencias analíticas y sintéticas.

Cohen (2003, p. 229) sugiere que hay una diferencia fundamental en el proceso mental que se necesita para visualizar desarrollos de sólidos curvos frente al que se necesita para desarrollar poliedros, ya que en estos últimos toda la superficie del sólido aparece en la misma forma, mientras que en los primeros (conos y cilindros) hay superficies curvas que tienen un aspecto totalmente diferente cuando se tumban sobre el plano. Según Cohen imaginar estos desarrollos depende en gran medida de las experiencias llevadas a cabo con acciones de plegar y desplegar sólidos.

Según Gutiérrez (1996b) el software especial que permite ver diferentes representaciones de sólidos en pantalla y poder transformarlos favorece la creación y manipulación de imágenes mentales. Un ejemplo de ello lo tenemos en la investigación de Pittalis, Mousoulides, y Antreou (2009) cuyo objetivo es examinar los procesos de visualización de los estudiantes para construir imágenes visuales dinámicas de formas 3D cuando estaban trabajando en un entorno dinámico. Estos autores hablan de habilidades espaciales dinámicas como aquellas que se requieren para razonar sobre estímulos en movimiento (visualización dinámica). Normalmente, el aprendizaje a través de estos entornos combina representaciones simbólicas, estáticas y dinámicas que pueden ser modificadas de forma interactiva. A su vez, estos nuevos entornos demandan de los estudiantes la necesidad de procesar y relacionar diferentes representaciones, así como controlar y evaluar interacciones con esas representaciones para construir representaciones mentales coherentes. Sus conclusiones afirman que el software permitió a los estudiantes construir imágenes visuales dinámicas, poniendo de manifiesto el gran potencial de estas para mejorar su aprendizaje.

Las propuestas didácticas de Guillén (2001, 2005), centradas en la clasificación de sólidos, muestran la gran ventaja del material manipulativo así como de los entornos dinámicos que permiten construir o generar familias de sólidos.

Por otra parte, Acuña y Larios (2008) abordan dos fenómenos relacionados con la operación de arrastre que obstaculizan una visualización adecuada. El primero surge cuando los estudiantes son incapaces de visualizar todos los momentos intermedios de la transformación, de manera que sólo consideran la construcción hecha antes de ser modificada por el arrastre y la construcción final (esto puede ser considerado como una forma de rigidez geométrica ya que trata con la incapacidad de imaginar cada una de las situaciones intermedias como una posición discreta de la construcción). El segundo tiene que ver con la internalización de la propia herramienta y la capacidad de proporcionar un significado matemático coherente. “Para que esta internalización tenga lugar los atributos figurativos deben alcanzar un cierto grado de identificación y fusión con los atributos conceptuales” (Acuña y Larios, 2008, p. 7).

El trabajo de Sinclair (2003) resalta la distinción entre los diagramas de los libros de texto y los bocetos en geometría dinámica para poder extraer todos los beneficios de la realidad visual. Los estudiantes que tratan las imágenes dinámicas como modelos de los libros de texto pierden la evidencia visual que podría proporcionar una mayor comprensión de las relaciones geométricas. Esto también es corroborado por la investigación llevada a cabo por Sack y Vazquez (2008, p. 222).

Pese a que la mayor parte de los estudios sobre la importancia de la visualización en el aprendizaje de la geometría se centran en la geometría espacial, algunos investigadores, como Orton (1997) se han preocupado por analizar su influencia en el aprendizaje de conceptos de geometría plana. Este autor analiza modelos de reconocimiento de figuras planas en diferentes orientaciones mediante la manipulación mental de las mismas.

White y Mitchelmore (2003, p. 403), teniendo en cuenta que el reconocimiento visual del concepto de ángulo no es trivial, presentan una propuesta para la enseñanza de este concepto que va desde actividades físicas con materiales concretos al concepto abstracto general.

Al igual que en la geometría espacial, en la geometría plana el uso de entornos de geometría dinámica y software adecuado puede facilitar la construcción y definición de conceptos (Pratt y Davison, 2003). Así mismo, permite desarrollar conexiones entre las figuras y sus propiedades, formando relaciones jerárquicas entre clases de formas y facilitando el paso de un nivel de van Hiele a otro (De Villiers, 1998; Markopoulus y Potari, 1996).

En general, muchos investigadores consideran, sobre todo en el nivel de enseñanza secundaria, que la finalidad de las actividades de construcción en entornos de geometría dinámica es actuar de puente hacia la justificación y la demostración (Healy y Hoyles, 2001; Mariotti, 2001; Marrades y Gutiérrez, 2000).

Faceta ecológica

En la faceta ecológica se recogen aquellas investigaciones que tratan diferencias de género y diferencias culturales en cuanto a rendimiento en test de VRE. Además, también se contemplan trabajos en los que la visualización opera con conceptos matemáticos que no contienen aspectos espaciales y aquellas investigaciones que intentan enfatizar la importancia de la visualización de cara a incluirla en los documentos curriculares así como aquellas que realizan propuestas concretas.

En la revisión hecha por Gutiérrez (1998), se concluye que existe un amplio acuerdo en que la capacidad de visualización está más desarrollada en los hombres que en las mujeres, sin embargo, en cuanto a razonamiento lógico las capacidades son muy similares. Otros investigadores, como Arrieta (2003, 2006) y Presmeg y Bergsten (1995), presentan conclusiones diferentes, observando que, en ciertas etapas, las chicas superan a los chicos.

Los trabajos de Clements y Battista (1992) y Gorgorió (1996, 1998) señalan que es importante comprender la complejidad de la investigación en términos de diferencia de géneros, esas diferencias se han atribuido a factores culturales, biológicos o a ambos. Además, incluso cuando no se encuentran esas diferencias en una tarea determinada, no se debería asumir que los chicos y las chicas hayan usado las mismas estrategias para resolverlas.

Algunas investigaciones, como la de Bishop (1983) y la de Mitchelmore (1980), han mostrado que los estudiantes no pertenecientes a culturas occidentales son pobres en habilidades espaciales, debido, principalmente, a la falta de familiaridad con las convenciones occidentales. Presmeg (1989) indica que, al igual que en las culturas occidentales, hay preferencias individuales a la hora de utilizar o no métodos visuales en la resolución de problemas. Esta autora centra su atención en mostrar de qué manera la visualización puede mejorar la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas en clases multiculturales. La necesidad de imágenes adquiere gran importancia cuando nos encontramos en situaciones de instrucción en las que el lenguaje empleado no es la lengua materna de muchos de los estudiantes, por lo tanto, en pequeña o gran medida, la visualización facilitará una comprensión que la falta de fluidez verbal no permite (Presmeg, 1989, p. 9).

En cuanto a implicaciones curriculares, los educadores matemáticos involucrados en el currículum recomendaban, desde hace ya más de dos décadas, que se debería impartir un curso de intuición visual en geometría antes de empezar con el curso deductivo. La educación visual es fundamental para una buena adaptación a esta nueva sociedad tecnológica y debe estar recogida desde propuestas curriculares (Arcavi, 2003; Battista, 2007; Cunningham, 1991; Phillips et al., 2010; Guillén, 2000; Hershkowitz et al., 1996; Mariotti, 2001; Rivera, 2011; Stylianou, 2001).

Ben-Chaim et al. (1989), Hershkowitz, et al. (1996) recalcan la fuerte relación que tiene la visualización con muchos aspectos del currículo en la escuela infantil y primaria (razonamiento deductivo/inductivo, razonamiento proporcional, formación de conceptos matemáticos, etc.). En estas etapas adquiere gran importancia debido a que los niños tienen una fuerte dependencia de las representaciones visuales de las ideas matemáticas y confían en ellas mucho más que los adultos.

Para Bishop (1989, p. 11) tanto la visualización como la imaginería visual son cuestiones muy personales; ya que cada alumno necesita un tiempo específico para la creación de las imágenes y, además, la forma de operar con esas visualizaciones depende de cada uno. Esas características han de ser contempladas en la enseñanza, pues muchos profesores esperan que los alumnos creen imágenes idénticas como resultado de procesos que son personales. Así mismo, comprender en profundidad el proceso de visualización supone tener en cuenta diferentes contextos, variedad de tareas y diversos estímulos.

Desde la teoría de los conceptos figurales, Fischbein (1990, pp. 155-156) llega a la conclusión de que el proceso de construcción de conceptos figurales en la mente de los estudiantes no debe ser considerado como un efecto espontáneo de los cursos usuales de geometría. El proceso de integrar las propiedades figurales y conceptuales en una misma unidad mental con predominancia de las limitaciones conceptuales sobre las figurales no es un proceso natural, por lo que debe ser objeto de preocupación para el profesor.

Según Presmeg (1989, p. 20), una forma de ayudar a los estudiantes a comprender las diferentes formas de vida, a entender y apreciar los elementos y el pensamiento propio de cada cultura, sería incorporar al currículo todas esas actividades que introducen elementos visuales que emanan de ellas.

La propuesta del informe "Learning to Think Spatially" publicado por las academias Nacionales de US (National Academy of Sciencies, National Academy of Engineering, Institute of Medicine) (National Research Council, 2006), incluye el pensamiento espacial en el currículo como un paso necesario para promover una alfabetización espacial que se hace fundamental en el tecnológico siglo XXI.

Diezmann y Lowrie (2009, p. 423) nos indican seis formas de conseguir el objetivo anterior: introducir en el currículo el desarrollo de habilidades espaciales y variedad de tareas espaciales; ayudar y apoyar a los estudiantes en el desarrollo de su vocabulario espacial y proporcionar situaciones para que lo utilicen; fomentar el desarrollo de habilidades espaciales (memoria visual, visualización de zonas oscuras y colocación y orientación de formas); proporcionar ejemplos de tareas para que sea más fácil después visualizar situaciones y fomentar la conexión con experiencias previas; hacer un seguimiento de las dificultades y errores de los alumnos, y finalmente, obtener rendimiento del uso de las tecnologías, como los juegos 3D, que proporcionan entornos informales para el aprendizaje sobre orientación.

UNA APROXIMACIÓN ONTOSEMIÓTICA A LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO ESPACIAL.

El objetivo principal de esta investigación se centra en la evaluación de habilidades de visualización y razonamiento espacial de futuros profesores de Educación Primaria. El enfoque del trabajo es de índole cognitivo, en el sentido de que se pretende evaluar conocimientos, formas de razonar y habilidades de pensamiento de los sujetos sobre los que se realiza el estudio. Teniendo en cuenta la diversidad de planteamientos y de nociones cognitivas usadas en las investigaciones, así como la finalidad educativa del estudio, se ha optado por utilizar un marco teórico integrativo sobre el conocimiento y la instrucción matemática, como es el “enfoque ontosemiótico” (EOS) que Godino y colaboradores vienen desarrollando para la Didáctica de las Matemáticas (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007).

El interés de abordar este objetivo se basa en el papel que la visualización tiene en el aprendizaje matemático en general y, de manera especial, en el aprendizaje de la geometría, por lo que su evaluación y desarrollo debe ser un objetivo de la enseñanza en los distintos niveles educativos. En el caso de la Educación Primaria así se reconoce en los diseños curriculares de los diversos países (NCTM, 2000; MEC, 2006), lo que plantea un reto para la formación de profesores, tema que ha sido objeto de un menor número de investigaciones. El conocimiento de las habilidades iniciales de los futuros profesores sobre visualización y razonamiento espacial es, sin duda, una información necesaria para el diseño de acciones formativas fundamentadas sobre este contenido curricular.

Se ha empleado como instrumento de evaluación para analizar las habilidades de visualización y razonamiento espacial un cuestionario elaborado específicamente para esta investigación, el cual se ha pasado a una muestra de 400 alumnos. El análisis se ha centrado en aplicar las categorías de objetos matemáticos primarios que propone el EOS (objetos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos, situaciones-problemas), y las dualidades cognitivas (ostensivo – no ostensivo, particular – general, unitario – sistémico, expresión – contenido y personal – institucional) con el fin de elaborar una caracterización de la visualización espacial, que servirá de base para describir las habilidades de los estudiantes a la hora de resolver las tareas propuestas y comprender los conflictos que manifiestan.

En este marco teórico se considera que el análisis de la actividad matemática, de los objetos y procesos que intervienen en la misma, centra la atención inicial en las *prácticas* que realizan las personas implicadas en la solución de determinadas situaciones-problema. La aplicación de este planteamiento a la visualización nos lleva a distinguir entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Con dicho fin se fija el interés en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica los cuales serán considerados como visuales si ponen en juego signos icónicos, diagramáticos o índices (Peirce, 1965). Aunque las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales) consisten en inscripciones visibles, no consideraremos dichas inscripciones como propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales.

Desde este marco se asume, en términos generales, la definición de visualización propuesta por Arcavi (2003, p. 217): "La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas". Vamos a interpretar la noción cognitiva de habilidad en términos de las nociones teóricas del EOS como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona realiza para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas y de la configuración de objetos y procesos ligados a tales prácticas

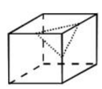
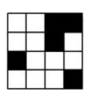
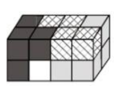
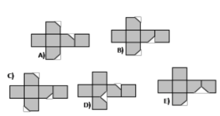
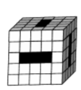
Las tareas seleccionadas serán cuestiones importantes desde el punto de vista de la investigación, al ser consideradas como tareas visuales según el marco teórico adoptado (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012) y por corresponderse con tipos de tareas de investigaciones previas, permitiendo una comparación con los resultados de las mismas. Por otra parte, en dichas actividades intervienen contenidos matemáticos que forman parte, explícita o implícitamente, del currículo de la formación de maestros. En la tabla 1 de describen brevemente las diferentes tareas seleccionadas.

Tabla 1. Clasificación de las tareas del cuestionario

Nº de ítem	Espacio	Acción (ejecutar/imaginar)	Tipo de respuesta
Ítem 1	3D	Conteo de elementos	Identificar
Ítem 2	2D	Realizar simetría	Dibujar e Identificar
Ítem 3	3D	Componer y descomponer en partes	Identificar
Ítem 4	3D	Plegar y desplegar	Identificar
Ítem 5	3D	Conteo de elementos	Identificar
Ítem 6	2D	Componer y descomponer en partes	Identificar
Ítem 7	3D	Rotar	Dibujar

Dada la distribución de respuestas correctas por ítem (Tabla 2), con porcentajes inferiores al 40% salvo en el ítem 4, se hace evidente que las tareas presentadas no forman parte de la práctica habitual de estos estudiantes. Se ha realizado un análisis de la varianza multifactorial para determinar qué factores tienen un efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación total y, en nuestro caso, hemos encontrado diferencias estadísticamente significativas en el factor género a favor de los hombres.

Tabla 2. Distribución del número de respuestas correctas por ítem

Ítem	Distintivo gráfico	Frecuencia	Porcentaje
1		73	18,25
2		34	8,50
3		154	38,50
4		304	76,00
5		85	21,25
6		151	37,75
7		16	4,00

Uno de los objetivos específicos del trabajo fue determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que ponen en juego los sujetos cuando realizan las prácticas requeridas en la solución de tareas de VRE. Hablar de los objetos y procesos que ponen en juego los sujetos al realizar las prácticas requeridas en la solución de tareas de VRE es hablar de las configuraciones cognitivas en el marco del EOS (Fernández, Godino y Cajaraville, 2012). También se analizará en cada ítem la "efectividad" de cada una de las configuraciones asociadas. Esta idea de la "efectividad" se toma de Gorgorió (1998, p. 227) y se modifica para que sea pertinente sólo para aquellas configuraciones susceptibles de producir resultados correctos (configuración válida para lograr el resultado que se espera).

Atendiendo a la variedad de configuraciones cognitivas fue posible describir niveles de habilidad/competencia sobre VRE. Estos niveles están sujetos a ciertas condiciones que dependen directamente de la tarea que se está realizando. Por ejemplo, el nivel 1 en el ítem 1 no tiene por qué corresponderse con el nivel 1 en la tarea 2; sino que se refiere a que son los niveles más bajos encontrados. En cada nivel puede haber varias configuraciones y en cada configuración las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) implicadas pueden tener distinto peso.

Clasificamos las configuraciones para cada ítem en aquellas que consideramos de alto nivel y aquellas que corresponden a niveles bajos. Se observa que en los ítems 3, 5 y 6 las configuraciones de alto nivel superan en porcentaje a las de bajo nivel. Eso pone de manifiesto que los estudiantes, en dichas tareas, tienen configuraciones dónde movilizan variedad y cantidad de objetos visuales (propiedades visuales, imágenes mentales, etc.). Esto no quiere decir que las acciones sobre esos elementos se hagan siempre de manera correcta, como se puede comprobar si se analiza la efectividad de dichas configuraciones. Probablemente esto último sea debido a que los estudiantes no saben cómo trabajar con esos objetos y procesos visuales o bien que no están habituados a hacerlo.

En los demás ítems se observa que la diferencia de porcentaje entre las configuraciones de bajo y alto nivel es muy significativo. Esta alta incidencia de las configuraciones cognitivas de bajo nivel se puede explicar en términos de la complejidad de los objetos y procesos requeridos para la resolución de las tareas de VRE incluidas en el instrumento de evaluación. En la búsqueda de algún tipo de característica común o diferenciadora de cada pareja, se observa que la respuesta solicitada en los ítems 2 y 7 supone el dibujo de una figura y que además los conceptos implicados se refieren a movimientos en el plano o en el espacio: eje de rotación/simetría, puntos fijos y las propiedades equidistancia al eje y perpendicularidad entre el eje y el segmento que une un punto con su transformado. En el ítem 7 aparece además el concepto de trayectoria, hueco y agujero. En el caso de los ítems 1 y 4 la conexión para estos resultados se establece en los conceptos: intersección de planos, sólidos truncados y ángulos poliedros.

Otro objetivo específico de la investigación fue determinar los principales conflictos manifestados por los sujetos ante la resolución de las tareas seleccionadas. Los principales conflictos que se han detectado están directamente asociados con la interpretación de la representación plana de los objetos tridimensionales y la de los diagramas presentados. También aparecen conflictos entre la definición verbal de una figura y la imagen que se presenta de la misma y dificultades en los estudiantes a la hora de argumentar la respuesta dada.

Se ha constatado que las características de la tarea, fundamentalmente la acción requerida (Gorgorió, 1998), es uno de los elementos que más afectó a la resolución de la misma. Así, aquellas que requieren la acción de dibujar, fueron las que menor porcentaje de aciertos tuvieron. También se ha observado que muchas configuraciones de alto nivel en VRE no alcanzan el 100% de efectividad debido, además, al tipo de respuesta exigido (Tabla 1).

Por otra parte, el análisis ontosemiótico ha permitido explicar que en la resolución de la mayoría de las tareas, las referencias o restricciones visuales son más fuertes para los alumnos que las que vienen dadas a partir de una sentencia verbal. Este poder de lo visual sobre lo verbal ha de ser canalizado, es decir, es necesario aprender a manipularlo para poder trabajar y razonar sobre esas imágenes.

Duval (1999, pp. 4-5) sitúa en el centro de la comprensión en matemáticas la representación y la visualización y, por tanto, es fundamental analizar en qué medida estos dos elementos interactúan para producir aprendizaje. A diferencia de otros campos de conocimiento, el uso de representaciones semióticas es esencial para tener acceso a los objetos matemáticos; sin embargo, hay que tener en cuenta que la comprensión de las matemáticas requiere distinguir un objeto de su representación. Hemos visto en este trabajo como uno de los mayores conflictos que se encontraron a la hora de resolver las tareas tiene que ver con esa falta de interrelación entre representación y visualización.

Desde una perspectiva formativa, esta investigación ha revelado las importantes carencias de los estudiantes para maestro en cuanto a conocimiento común y especializado del contenido de visualización y razonamiento espacial (Hill, Ball y Schilling, 2008). Se deriva por tanto la necesidad de diseñar, implementar y evaluar acciones formativas específicas para promover la mejora de dichos conocimientos.

CARACTERIZACIÓN DE LA VRE EN LOS ENFOQUES ACTUALES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En el campo de la Educación Matemática, Battista (2007), Gutiérrez (1996a, 1998), Nemirovsky y Noble (1997), Phillips (2010) y Presmeg (2006, 2008) nos ofrecen un amplio y variado conjunto de trabajos teóricos sobre visualización, a la vez que hacen un recorrido por el estado de la cuestión. La monografía de Rivera (2011) ha dejado fuera los resultados de investigación sobre estudios implicando estadística, geometría y tecnología en el aprendizaje matemático, sin embargo indica que hay coincidencias interesantes en términos de resultados e implicaciones. Este autor incide en que los avances en las herramientas tecnológicas van a proporcionar el impulso necesario para llevar a cabo más investigación en la visualización en matemáticas.

Presmeg (2006, pp. 233-234) apunta una serie de direcciones a seguir en cuanto a temas de investigación en este campo y también enumera una lista con trece cuestiones que parecen ser las más significativas para la investigación sobre visualización en educación matemática. Además, esta autora insiste en que la necesidad de investigación en visualización sigue siendo un asunto primordial tanto en la resolución de problemas como en la interacción de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas a todos los niveles. Otras cuestiones formuladas por Presmeg se dirigen principalmente a cómo promover las habilidades de visualización en la enseñanza de las matemáticas.

En la búsqueda de un marco teórico para la visualización en educación matemática, Presmeg (2008) afirma que las teorías anteriores han resultado útiles como lentes para interpretar los resultados de investigaciones empíricas y propone ampliar la taxonomía sugerida por Marcou y Gagatsis (2003) y aspectos relacionados de la teoría lingüística que incluye metáfora y metonimia. Según esta autora, la base teórica descrita anteriormente puede proporcionar un punto de inicio para interpretar fenómenos de visualización matemática en muchas áreas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y a muchos niveles; pero aún falta que esta teoría siga evolucionando y que pueda nutrirse de futuras investigaciones empíricas (Presmeg, 2008, pp. 9-10).

En Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012) se intenta avanzar en dar una respuesta al problema de elaborar una teoría que esclarezca la naturaleza y componentes de la visualización y su relación con otros procesos implicados en la actividad matemática, su enseñanza y aprendizaje. Un aspecto clave de la elaboración de una teoría de la visualización en educación matemática debe incluir el estudio de las relaciones de esta forma de percepción con otras modalidades de expresión ostensiva (lenguajes analíticos o secuenciales), y sobre todo, su relación con los objetos matemáticos no ostensivos (sean considerados como mentales, formales, o ideales).

Phillips et al. (2010, pp. 88-89) enuncian cinco cuestiones que deberían ser abordadas empíricamente en futuras investigaciones. Una de ellas se refiere a estudiar en qué situaciones la visualización puede no ayudar, lo cual les lleva a formularse la pregunta de si es mejor tratar ciertos tópicos a nivel abstracto y, de ser así, analizar el porqué de estas diferencias entre unos y otros.

Partiendo de que el pensamiento visual subyace de forma obvia en la geometría, Clements y Battista (1992, p. 457) consideran que "el pensamiento visual tiene diferentes capas, desde la más primitiva a la más sofisticada y que cada una juega un papel diferente en el pensamiento, dependiendo de la capa que esté activada". Siguiendo esa línea, Battista (2007) incide en que sería conveniente que las nuevas investigaciones describan exactamente la interacción de la visualización y la conceptualización geométrica durante el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial.

A la hora de centrar mi recorrido por los trabajos realizados en el seno la SEIEM relacionados con la VRE, tomaré como fecha inicial el año 2010 puesto que en el simposio de ese mismo año ya se recogen los anteriores en el texto de una de las ponencias. En dicho simposio, se dedica un seminario a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, presentado y coordinado por Ángel Gutiérrez. La ponencia de Guillén (2010, pp. 51-52) centrada en los sólidos no excluyó la visualización como línea de investigación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Esta autora plantea una serie de cuestiones que abren caminos a explorar en este campo. En este mismo seminario, Fortuny, Iranzo y Morera (2010, p. 74) se centran en el papel de la tecnología en la educación geométrica y recogen las aportaciones sobre educación geométrica y tecnología durante los cinco años anteriores. Ello les lleva a considerar la visualización de procesos, relacionado con la interpretación de diagramas y representaciones gráficas que ofrecen los entornos informáticos, como uno de los procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica que se deben coordinar con otros para el aprendizaje de la geometría. En ese mismo simposio se presenta una comunicación que reabre el debate entre la relación entre visualización y talento matemático en el campo de la geometría (Ramirez, Flores y Castro, 2010).

En la siguiente tabla (Tabla 3) recojo las investigaciones actuales sobre VRE en el seno de la SEIEM y reuniones asociadas.

Encuentro	Título	Autores
SEIEM 2010	Visualización y talento matemático. Una experiencia docente.	Ramirez, R. Flores, P. y Castro, E.
I Encuentro AprenGeom2010	Geometría y visualización 3D para maestros en formación.	Polo, I. y González, M. J
II Encuentro AprenGeom2011	Estrategias de resolución geométrica por insight.	Sánchez, F.
	Un estudio de la capacidad espacial desde la educación infantil hasta la universidad.	Arrieta, I.
SEIEM 2011 Grupo aprengeom	Habilidades de visualización manifestadas por los alumnos con talento matemático en tareas geométricas.	Ramirez, R. Flores, P. y Castro, E.
SEIEM 2012 Grupo aprengeom	Resultados de una evaluación sobre habilidades de visualización y razonamiento espacial en futuros profesores de educación primaria.	Fernández, M. T.
SEIEM 2013	Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales.	Gonzato, M. Godino, J. D.; Contreras, A. y Fernández, T.

Los últimos trabajos presentados dentro de este campo de investigación se mueven, principalmente, en tres direcciones:

- Relación entre niveles de van Hiele y habilidades de visualización. El interés se orienta en términos de desarrollo de dichas habilidades y su efecto sobre los niveles y viceversa.
- Formación inicial y continua del profesorado. Los estudios realizados muestran que es necesario el desarrollo de acciones formativas encaminadas a mejorar la competencia de los futuros profesores a la hora de enfrentarse a tareas de visualización espacial y a la hora de seleccionar tipos de tareas para su práctica docente (conocimiento común y especializado del profesor).
- Los nuevos entornos de geometría dinámica. Ante el objetivo de explotar la potencia que ofrecen estos recursos, es preciso analizar el papel de la visualización, detectando nuevas variables y características, así como sus efectos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Estas tres direcciones no son en absoluto excluyentes, como se puede observar en varias de las referencias descritas. Por otra parte, estas líneas intentan resolver cuestiones abiertas o propuestas por los principales trabajos de referencia en este tópico, citados en la primera parte del presente documento.

A nivel internacional, la visualización sigue estando presente en los principales foros y reuniones. Como ejemplos de ello tendríamos los casos del ICME12, donde uno de los tópicos sigue titulándose "Visualization in the teaching and learning of mathematics", o en el grupo de pensamiento geométrico enmarcado dentro del CERME8, donde una de las líneas de trabajo llevaba el título de "Spatial and figural abilities, as geometric reasoning about two-dimensional and three-dimensional shapes".

Por otra parte, recoger referencias correspondientes a las numerosas investigaciones que se están llevando a cabo sobre la visualización y las tecnologías en el campo de la geometría supondría un tarea que está fuera del alcance de los objetivos de este documento. El número de estudios publicados relacionados con la tecnología informática, animación y efectos visuales interactivos ha aumentado de forma exponencial desde el año 2000 (Phillips, 2010, p. 78).

CONCLUSIONES

La revisión bibliográfica nos ha permitido identificar aquellos tópicos que han sido objeto de interés para los investigadores a lo largo de más de cincuenta años y encuadrarlos en una de las cuatro facetas descritas dentro del marco teórico del enfoque ontosemiótico.

Por otra parte, se ha realizado un recorrido por las principales cuestiones de investigación formuladas alrededor de la visualización y el razonamiento geométrico y espacial desde diferentes marcos teóricos.

Presmeg, (2008, pp. 9-10) establecía que era necesario encontrar un marco teórico común para la visualización. Phillips (2010, p. 83) responde que hasta el momento no lo hay aunque contamos con modelos parciales. Según este último autor, tanto los educadores como los investigadores deberían utilizar los resultados disponibles sólo en contextos similares a aquellos en los que fueron encontrados. Esta cuestión del marco teórico se ha retomado desde el entorno ontosemiótico como se ha visto en la anterior sección.

Otra cuestión que surge en documentos referenciados en la revisión bibliográfica es la relacionada con la visualización y los alumnos con talento matemático. Woolner (2004) se preguntaba si la conclusión, de diversos estudios, de que los visualizadores logran bajo rendimiento en test de geometría podría ser distinta si ciertos factores externos cambian (metodología de enseñanza, tiempos de evaluación, libros de texto, etc.). La investigación llevada a cabo por Ryu, Chong y Song (2007) sigue sugiriendo que alumnos con rendimiento alto en geometría presentan dificultades en procesos de visualización espacial. Por otro lado, la idea de que los alumnos con talento matemático evitan estrategias propias de visualizadores no concuerda con los resultados del trabajo de Ramírez, Flores y Castro, (2010, 2012), que pueden arrojar un poco de luz sobre estas cuestiones.

Diversos estudios recientes indican que la reticencia al empleo de la visualización está disminuyendo, debido en parte a las reformas de los currículos, que inciden en las representaciones visuales, y a la creciente facilidad que tienen los estudiantes para acceder a la tecnología gráfica. Sin embargo, estos cambios, en relación a los estudiantes, pueden ser superficiales ya que a pesar de que puedan estar dispuestos a utilizar formas de representación visual, carecen de entrenamiento en este tipo de habilidades (Stylianou, 2001, p. 230).

Arcavi (2003, p. 235) apunta la necesidad de crear flexibilidad entre las representaciones visuales y analíticas de una misma situación de cara a obtener una adecuada comprensión de las matemáticas. Ello supone que la clásica dicotomía analítico/visualizador no es la más adecuada para describir los procesos de aprendizaje, sino que esa dicotomía debe ser analizada en términos de estrategias, enfoques y experiencias más que en términos de preferencias individuales. De igual modo intenta mostrar cómo los enfoques analíticos se enriquecen mediante la visualización y como el pensamiento analítico beneficia los enfoques visuales. Esta idea también se puede extraer del trabajo de Godino, Fernández, Gonzato y Wilhelmi (2013).

Tal y como indica Presmeg (2006, p. 233) un tema que no ha sido tratado en profundidad hasta ahora es la manera en que la visualización interactúa con la Didáctica de la Matemática. De hecho, los pocos trabajos que hay sobre ello son el de la citada Presmeg (1991) y el de Woolner (2004).

En la actualidad, la visualización en el aprendizaje de las matemáticas no sólo es contemplada como una propuesta ilustrativa sino que está siendo reconocida como una componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración, como se puede observar en Battista (2007); Presmeg (2006), Phillips et al. (2010) y Rivera (2011). Todos ellos inciden en que una de las vías que abre más líneas de trabajo para la investigación en geometría es la que contempla el uso de las nuevas tecnologías como entornos de aprendizaje y/o como herramientas. Ese camino no se puede recorrer sin tener en cuenta la presencia de la visualización (estática y/o dinámica), lo que necesariamente debe implicar la implementación de acciones formativas centradas en el desarrollo de habilidades y procesos visuales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Referencias

Acuña, C. & Larios ,V. (2008). Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/193

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación Matemática*, 15 (3), 57-76.

Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la educación matemática: estructura y medida. *Educación matemática,* 18 (1), 99-132.

Arrieta, I. (2011). Un estudio de la capacidad espacial desde laeducación infantil hasta la universidad. *II Encuentro AprenGeom*. Extraído el 3 de mayo de 2013 desde http://www.ciem.unican.es/node/836

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives*. Greenwich, CY: Information Age Publishing Inc.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal*, 25, 51-71.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 49- 59.

Bishop, A. J. (1983). Space and Geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16.

Burden & Coulson, S. A. (1981). *Processing of spatial tasks*. Thesis, Monash University, Melbourne.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York : Macmillan Publishing Co.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 2, 229-236.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19 (pp. 67-76). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

De Villiers, M. (1994). The role and function of Hierarchical classification of Quadrilaterals. *For the learning of Mathematics*, 14(1), 11-28.

De Villiers, M. (1998) To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the 22nd PME International Conference,* 2, 248–255.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37* (6), 14-20.

Diezmann, C. & Lowrie, T. (2009). Primary students´ spatial visualization and spatial orientation; an evidence base for instruction. En Tzekaki, M.; Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference,* 2, 417-424.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and specific Processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME,* 3-26.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt fur Didactic der Mathematik*, 26(4), 109-113.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19 (pp. 25-37). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Fernández, M. T. (2012). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Tesis doctoral. Santiago de Compostela. Universidad de Santiago de Compostela.

Fernández, M. T. (en prensa). Resultados de una evaluación sobre habilidades de visualización y razonamiento espacial en en futuros profesores de primaria. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*. *Comunicaciones de los grupos de investigación* (pp. 285 - 294). Jaén: SEIEM.

Fernández, M. T.; Godino, J. D. y Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema*, 26 (42).

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research, 14* (1).

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 139-162.

Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211.

Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida. SEIEM.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74 (2), 163-183.

Godino, J. D. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. *La matematica e la sua didattica*, 4, 434-450.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A.; Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias,* 30 (2), 163-184.

Godino, J. D.; Fernández, M. T.; Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (en prensa). Synergy between visual and analytical languages in mathematical thinking. In procceedings CERME8.

Goldin, G. A. (2002). Representation in Mathematical learning and Problem Solving. In Lyn D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Goldin, G.A. (2007). Representation in School Mathematics A Unifying Research Perspective. In J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.275-285). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gonzato, M.; Fernández, T. y Godino, J.D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial: un estudio sistemático basado en la investigación didáctica. *Números* 77, 99-117.

Gorgorió, N. (1996): Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference,* 3, 3-19.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics* 35, 207-231.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias,* 18(1), 35-53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias* 19(3), 415-431.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática,* 17(2), 117-152.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida. SEIEM.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría* (pp. 44-59). México D.F.: CINVESTAV.

Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference,* 1, 3-19.

Gutiérrez, A. (1996b). The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. In Batturo, A.R. (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 23-32). Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.

Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. Text of an invited conference in "*Encuentro de Investigación en Educación Matemática*", TIEM-98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona), manuscript.

Healy, L. & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 235-256.

Hershkowitz, R. (1989). Visualitation in geometry- Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61- 76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, P. y J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge U.P.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Dormolen, J. Van (1996). Space and shape. In, A. J. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education*. (pp. 161-204). London: Kluwer.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Student's interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in Mathematics*, 44(1/2), 55-85.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M. & Mayer, R.E. (2002). Revising the visualizer –Verbalizer dimension: evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruccion*, 20, 47-77.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology,* 121, 48-67.

Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En Olivier, A y Newstead, K. (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.

Marcou & Gagatsis (2003). A theoretical taxonomy of external systems of representation in the learning and understanding of matehamtics. In A. Gagatsis & I. Elia, (Eds.), *Representations and geometrical models in the learning of mathematics*, 1, (pp. 171-178). Nicosia: Intercollege Press.

Mariotti, M.A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 257-281.

Markopoulus, C. & Potari, D. (1996). Thinking about geometrical shapes in a computer environment. In L. Puig, L. & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Mathematics Education*, 337-334.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* 44(1/2), 87-125.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.

Mitchelmore, M.C. (1980). Three dimensional geometrical drawing in three cultures. *Educational studies in Mathematics*, 11, 205-216.

National Research Council (2006). *Learning to think Spatially: GIS as a Support System in the K-12 Curriculum*. Washington, D.C.: Author.

Nemirovsky, R. & Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 99-131.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. EEUU: National Council of Teachers of Mathematics. (Edición electrónica: http://standards.nctm.org/).

Orton, J. (1997). Pupil's perception of pattern in relation to shape. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th PME International Conference*, 3, 304-311.

Pallascio, R. Allaire, A. & Mongeau P. (1993). The development of Spatial Competencies through alternating analytic and synthetic activities. *For the learning of mathematics*, 13(3), 8-15.

Peirce, C. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). Visualization in mathematics, reading and science education. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Pittalis, M.; Mousoulides, N. & Andreou, A. (2009). Construction of dynamic visual images of 3D Geometry shapes. In C. Bardini, P. Fortin, A. Oldknow & D. Vagost (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Extraído el 2 de febrero de 2010 desde http://www.ictmt9.org/files/contributors/28f9525538800f9ebcdf852e2f425baa/PITTALIS_Dynamic%20visualisation_fullpaper.pdf

Pittalis, M.; Mousoulides, N. & Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference,* 4, 385-392.

Polo, I. y González, M. J (2010). Visualización 3D para maestros en formación. *I Encuentro AprenGeom*. Extraído el 3 de mayo de 2013 desde http://www.ciem.unican.es/node/800

Pratt & Davison (2003). Interactive whiteboards and the construction of definitions for the kite. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, 4, 31-38.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualization and mathematical gittedness. *Educational studies in Mathematics*, 17, 297-311.

Presmeg, N. C. (1986b). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.

Presmeg, N. C. (1989). Visualization in multicultural mathematics classrooms. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 17- 24.

Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics. In Furinghettti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 3, 191-198.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational studies in Mathematics,* 23, 595-610.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and metonymies in mathematics learning* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. C. (2008). An overarching theory for research in visualization in mathematics education. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/97

Presmeg, N. C. & Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: An international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, 3 58-65.

Ramirez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida. SEIEM.

Ramírez, R.; Flores, P. y Castro, E. (2012). Habilidades de visualización manifestadas por los alumnos con talento matemático en tareas geométricas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 11-26). Ciudad Real: SEIEM.

Rivera, F. D. (2011). Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues. Dordrecht: Springer.

Roth, W. M. (2004). *Towards an anthropology of graphing: Semiotic and activity-theoretic perspectives*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ryu, H., Chong, Y., Song, S. (2007). Mathematically gifted students spatial visualization abiltiy of solid figures. En *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for PME*, Vol. 4, pp. 137-144. Seoul: PME.

Sack, J. & Vazquez, I. (2008). Three-dimensional visualization: Children's non-convencional verbal representations. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlpeda, (Eds.), *Proceeding of the Joint Meeting 32nd Conference of the international Group for the psychology of Mathematics Education and the North American chapter XXX,* 4 (pp. 217-224). Morealia, Michoacán, México: PME.

Sánchez, F. (2011). Estrategias de resolución geométrica por insight. *II Encuentro AprenGeom*. Extraído el 3 de mayo de 2013 desde http://www.ciem.unican.es/node/836

Sinclair, M.P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. In N. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proccedings of the 27th PME International Conference*, 4, 191-198.

Soto-Andrade, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/ document/get/771

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 4, 225-232.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), 149-155.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Mathematik*, 83(1), 20-25.

White, P., & Mitchelmore, M. C. (2003). Teaching angle by abstraction from physical activities with concrete materials. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 403-410.

Woolner, P. (2004). A comparison of a visual-spatial approach and a verbal approach to teaching mathematics. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 449-456.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.