DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL, UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Ricardo Cantoral Uriza
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav del IPN, México
rcantor@mail.cinvestav.mx
Pensamiento Variacional

Resumen

La ciencia y su educación están ligadas a prácticas sociales y culturales específicas, sin embargo, las matemáticas, como es bien sabido, se han desarrollado bajo la premisa de que ellas tratan con objetos abstractos, anteriores por tanto a la praxis social y en consecuencia externas al individuo. Esta visión platónica del conocimiento, impregna por igual al quehacer didáctico de nuestros días cuando un profesor "comunica verdades preexistentes" a sus alumnos mediante un discurso; la *forma* entonces, asume esta visión, hará develar más temprano que tarde el significado de los objetos abstractos entre los alumnos. Sostenemos que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas. Esto no habrá de entenderse en el sentido de que todo conocimiento obedece a una necesidad de naturaleza práctica, puesto que los historiadores y filósofos de la ciencia han documentado suficientemente que algunas nociones matemáticas no provienen de sucesivas abstracciones y generalizaciones de la empiria. Más bien, nuestra tesis tiene una orientación socioepistemológica, puesto que establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos. En este sentido, cabe decir que la premisa inicial que sustenta la orientación de investigación de nuestro grupo de trabajo consiste en asumir que la enseñanza y el aprendizaje constituyen tanto una práctica humana como social, y que el compromiso de la disciplina, la Matemática Educativa, con la práctica educativa de referencia es lo que provee de sentido a su desarrollo. Es así que asumimos que el nombre mismo de *Matemática Educativa* da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual; en el mundo anglosajón, el nombre han dado a dicha práctica es el de *Mathematics Education*, mientras que en la Europa continental le llaman *Didactique des Mathématiques* o *Didaktik der Mathematik*.

En esta ocasión, presentaremos una serie de ejemplos sobre cómo desarrollamos estrategias que favorecen al pensamiento y lenguaje variacional bajo un enfoque socioepistemológico. Este *pensamiento y lenguaje variacional* estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida, pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es a la vez que una ruta de desarrollo, una línea de investigación que posee una orientación múltiple. Pues por un lado se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término, estudia las funciones cognitivas que las personas desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades del cambio, en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio.

Presentación

La *socioepistemología*, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza. Este enfoque, propuesto explícitamente por vez primera en el seminario de investigación en matemática educativa del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN en la ciudad de México (conocido ampliamente como *seminario de los jueves*), y en una de las conferencia plenarias de la Research Conference in Collegiate Mathematics Education dictada en la Central Michigan University de EUA, ambas por el autor en el año de 1997, y que ha sido desarrollado, sistemática y ampliamente, en forma cooperativa por una comunidad académica en el curso de la década pasada y se sintetiza en (Cantoral & Farfán, 2003). Con este enfoque socioepistemológico se plantea, desde su inicio, una tesis que aun hoy consideramos *revolucionaria*, pues produjo en la comunidad de matemáticos educativos de esos años, una verdadera ruptura al plantearse una descentración del objeto de estudio como prerrequisito de la acción teórica, se exigió por así decirlo, de un cambio de perspectiva respecto de los enfoques clásicos de la investigación, enfoques entonces dominantes, relativo al problema del conocimiento y a sus vínculos sociales con los factores del aprendizaje y con las circunstancias de su enseñanza institucionalizada.

Al inicio de la década de los ochentas, el artículo de Tall y Vinner (1981) trató el problema del aprendizaje sobre la base de una inteligente metáfora del conocimiento humano, que en cierto sentido explicaba los aprendizajes, o en su caso, las causas de los escasos aprendizajes por parte de los estudiantes universitarios, ante nociones matemáticas como número real, límite, continuidad, series infinitas, función, derivada o integral, explicación basada en la dualidad «*concept image*» y «*concept definition*». Esta centración en las relaciones sujeto - objeto, a la luz de la imagen que se forma el individuo y a la imagen a la que se aspira alcanzar con la instrucción, no cuestionaba en modo alguno la naturaleza del saber matemático puesto en juego, ni su función y origen social, o su relación con otras prácticas de referencia como aquellas del saber cultural, saber instrumental, saber escolar, saber tecnológico o saber artesanal, que antes que conocimiento, son sin duda alguna una organización de prácticas sociales. Nos preguntamos, si las causas de los resultados expuestos por Tall y Vinner y replicados por una gran cantidad de estudios locales, podrían encontrarse en otras razones que atendieran a la naturaleza misma del saber matemático en juego, o a los niveles de su funcionamiento en la vida escolar (Brousseau, 1986), o a las restricciones impuestas por los particularidades del saber matemático en los sistemas de enseñanza y, ahí nacía nuestra tesis fundamental respecto de la naturaleza de las prácticas de referencia y del papel que estas juegan en la construcción y difusión institucional del saber matemático. Saber que no conocimiento, fue un factor propiamente de orden «socio» que fue sistemáticamente ignorado por la literatura especializada, literatura que insistía en suponer que el saber matemático escolar, y sobre todo el universitario, obedece a leyes internas de la matemática per se...

Una reciente referencia hecha sobre nuestra aproximación socioepistemológica se cita en un capítulo escrito por Aline Robert y Natasha Speer, del libro *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. En él se dice:

> *The history of calculus has also been looked at from a socioepistemological perspective by other research groups, for instance the research group on advanced mathematics at Cinvestav in Mexico. This group starts with the assumption that the present structure of theoretical mathematical discourse in analysis obscures the essential emprirical sources of the development of the field. Thus, looking at historical development provides alternative ways to introduce and develop knowledge in the field. This is especially necessary if one has in mind not the training of future mathematicians but the training of scientific students and engineers. Such a perspective has been used by Cinvestav in order to study the*

learning and teaching of variation, from high school to studies in advanced analysis engineering. They have coordinated mathematical and historical analyses, the socio analysis of the waty variation is dealt with in different professional and social contexts, the cognitive analyisis of learning processes, and didactic engineering designs (see e.g., Cantoral and Farfán, 1998; Cordero, 1994; Farfán, 1997; Ortega, 2000). A. Robert, p. 285, en (Holton, 2001).

De este modo, el enfoque socioepistemológico inicia con una mirada crítica de las tradiciones formalistas y de los enfoques clásicamente constructivistas de aquellos años. Señala que ni el primero, el formalista, con su habitual centración en el problema del conocimiento desde el punto de vista de los fundamentos o de la estructura lógico formal, ni tampoco el segundo, el constructivista, que si bien relativisa el asunto de la lógica de la demostración y se coloca al nivel de las heurísticas o lógicas del descubrimiento, no abandonan, ninguno de ellos, su predilección por tomar como centro de sus metáforas teóricas al conocimiento matemático en sí. Una especie de cogno-centrismo matemático. De este modo, los formalistas se ocuparon de estudiar a profundidad las relaciones asociadas con la afirmación $p \to q$ en la que p y q podrían ser propiamente la hipótesis y la tesis de una implicación lógica, aunque también podría representar los papeles respectivos de antecedentes y consecuentes en una secuenciación temática de estudios. En ambos casos, su preocupación mayor se ubicaría en el carácter de las implicaciones válidas. El análisis minucioso que llevara a cabo el programa formalista, ubicó en consecuencia al nivel de las inferencias lógicas al conocimiento y se ocupó en detalle de la cuestión de los fundamentos. Por ejemplo, tanto sus programas educativos como sus libros de texto y sus sistemas de evaluación del aprendizaje, en tanto formas culturales de difusión del saber, usan verbos en los que reflejan con cierta claridad la visión que los acoge: verbos como *demostrar*, *aplicar*, *calcular*, *deducir*, *verificar*,... De modo que difunden una noción de la matemática escolar centrada en su carácter lógico y estructural, desde el punto de vista de la axiomática.

Veamos una escena hipotética, típica de este enfoque, que discute una presentación de la ecuación de la línea recta en una clase de matemáticas. Imaginemos por ejemplo que se trata de la clase de geometría analítica o de precálculo en el bachillerato.

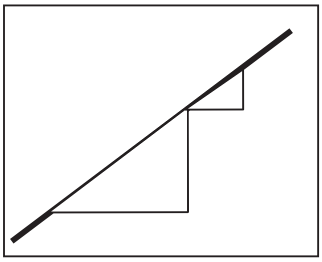
Profesor: Vamos a encontrar la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos A, de coordenadas (0, 1) y B, de coordenadas (2, 3). [El profesor dibuja sobre el pizarrón una línea recta en el plano cartesiano pasando efectivamente por A y B, coloca enseguida dos etiquetas: A(0, 1) y B(2, 3)]

Alumnos: ... murmullos... [Los alumnos trazan en sus cuadernos el dibujo de la recta AB y copian las etiquetas que hizo su maestro... levantan la mirada para no perder la siguiente acción física de su profesor]

Profesor: Ahora tomemos un punto arbitrario P sobre la recta que tendrá coordenadas (x, y) [elige P sobre la recta AB, de suerte que quede a la derecha y más arriba que B]

Alumnos: ... murmullos... [quizá su duda esté puesta en el carácter arbitrario de P, o en sus coordenadas, empero los alumnos copian en su cuaderno sobre la recta AB al punto P y colocan su etiqueta ... levantan la mirada para detectar nuevamente cuál es el siguiente movimiento... En este momento él dibuja un par de triángulos rectángulos como se exhibe a continuación y sobre los que reconocerá la proporcionalidad de los lados]

Profesor: Ahora, por el teorema de Thales, se tiene que los triángulos rectángulos semejantes tiene entre sus lados razones de igualdad, esto es: $\frac{y-3}{3-1}=\frac{x-2}{2-0}$, de donde se sigue por, álgebra elemental, que $y=x+1$. [Los alumnos saben a este momento que lo verdaderamente importante es la fórmula obtenida y no la deducción, ya que la fórmula será usada en la resolución de los problemas, en las tareas para la casa, en los exámenes; mientras que la deducción sirvió sólo al profesor al momento de explicar a los alumnos]



Reproducción exacta del pizarrón

En este episodio el profesor supuso que la proporcionalidad, derivada de la semejanza, es una propiedad bajo el control del estudiante y supuso además, si bien inconscientemente, que la noción de pendiente, como una propiedad invariante de la recta está estabilizada en la mente de sus estudiantes. Estudios recientes, muestran lo inexacto de este punto de vista, pues si preguntamos a los estudiantes si es cierto o falso que $\frac{CA}{AB}=\frac{DE}{EB}$, si el triángulo ABC, tiene al segmento DE paralelo a CA como se muestra a continuación, es decir con DE puesto aproximadamente al centro del lado AB: Entonces la mayoría de los alumnos recuerdan el teorema de Thales, lo reconocen y dicen que sí, en efecto se cumple la proporción referida $\frac{CA}{AB}=\frac{DE}{EB}$, pero (y aquí está la primera gran sorpresa) si se pinta el segmento DE mucho más pequeño y cerca al vértice B, la proporción de respuestas correctas baja, pues algunos estudiantes dudan que se siga cumpliendo la igualdad anterior y prefieren decir más bien que ahora se cumple $\frac{CA}{AB}>\frac{DE}{EB}$ o bien $\frac{CA}{AB}<\frac{DE}{EB}$ dependiendo de si centran su atención sólo en el tamaño de uno de los segmentos, DE (muy pequeño) o EB (muy pequeño) y en el rol respectivo que juega en el cociente anterior.

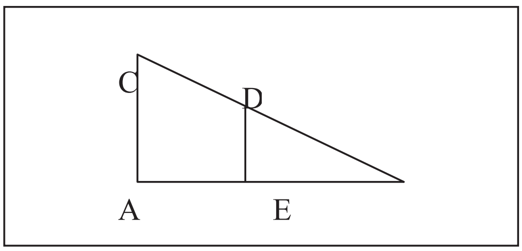


Diagrama típico de Thales

Este enfoque suele dejar bajo la responsabilidad del profesor, la elección de los ejemplos, las herramientas, los argumentos, las estrategias de acción y de explicación, los ejemplos, los tiempos de "enseñanza" así como la elaboración o selección de las actividades complementarias, sin sentir la necesidad de valorar los estilos y tiempos de aprendizaje de sus alumnos, y sin tomar en cuenta si ya las nociones de pendiente, invariante representativa de la y la proporcionalidad son estables entre los alumnos.

Bajo este enfoque, no se discute la importancia de preparar a los estudiantes para entender mejor las matemáticas, ni como usarlas para comunicarse con ella a lo largo de su vida. Aunque dicha labor es muy difícil, se elaboran sin embargo la currícula de los conceptos fundamentales produciendo nuevos materiales didácticos y diseñando nuevas unidades de enseñanza basadas en una especie de "sentido común matemático" o más propiamente en la lógica deductiva, empero no logrado una mejor comprensión de las matemáticas por parte de la mayoría de los estudiantes. La falla de estos esfuerzos hizo que se elaboraran preguntas sugiriendo que lo que ha faltado establecer a esas propuestas, diseños y producciones es un mayor conocimiento del fenómeno del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas dado que este es un acto social, cultural, política, y económicamente establecido y justificado por instituciones educativas.

Esta situación abonó el camino para que emergieran los programas en matemática educativa de corte constructivistas y socioepistemológico. Pues por cuanto toca a los enfoques constructivistas, ellos negaron de entrada la tesis central del programa anterior, pues si bien no se planteaban de inicio la cuestión implicativa de $p \rightarrow q$, si lo hacían de término, al final de sus acciones. Su estrategia, basada en el programa del empirismo lógico y de la falsación como método, planteaba como centro de la reflexión un deslizamiento de la pregunta anterior, una especie de heurística, una conjetura, ¿ será $p \rightarrow q$?, aceptan otra posibilidad, estudian la cuestión plausible ¿ $p \rightarrow \sim q$? o quizá aceptan que ni q ni $\sim q$. ¡Viva la conjetura! Este programa planteó la incorporación de la visión del alumno con mayor fuerza tanto al nivel de las propuestas escolares como al de la visión del quehacer matemático en sí. Pues serían las acciones constructivas del estudiante las guías de la actividad didáctica. Se pasó del profesor al facilitador, de currícula rígida a flexible...

Por su parte, el enfoque socioepistemológico inicia con una mirada crítica, a la vez que busca una ampliación en la mira de los enfoques constructivistas. Señaló entonces que el constructivista, que suaviza los asuntos lógicos en la demostración y se coloca en el plano de las heurísticas, no abandona su predilección por centrarse en las metáforas teóricas del conocimiento matemático en sí. Pues ahora se tendría una especie de heuri-centrismo matemático. Es así que mientras los constructivistas se ocuparon de estudiar a profundidad las relaciones asociadas con la falsación de la afirmación $p \rightarrow q$ en la que p y q serían la hipótesis y la tesis de una implicación lógica, o de significar por ejemplo los papeles de antecedentes y consecuentes en los ordenamientos temáticos de un curso. Su preocupación se situó en el carácter de plausibilidad de las conjeturas. El análisis minucioso en consecuencia, se ubica al nivel de las inferencias plausibles y en la cuestión de los razonamientos factibles. Tanto sus programas educativos y sus libros de texto, en tanto formas de difusión del saber, usan verbos en los que reflejan con cierta claridad la visión que los acoge: verbos como *conjeturar*, *establecer*, *hipotetizar*, *estimar*, *desestimar, verificar*, *bosquejar*, *representar, modelar ...* De esto modo, difunden una noción de la matemática escolar que se centra en su carácter heurístico y funcional.

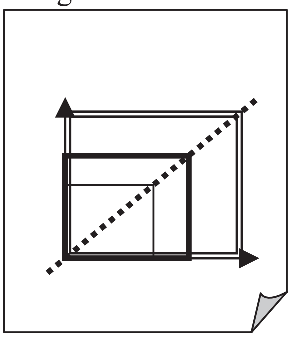
Veamos una escena hipotética, típica de este enfoque que va discutir una presentación de la ecuación de la línea recta en una clase usual de matemáticas. Imaginemos por ejemplo que se trata de la clase de geometría analítica o precálculo en el bachillerato.

Profesor: Consideren la siguiente situación... se colocan un papel cuadriculado con un par de semi rectas perpendiculares [los alumnos reciben el papel, dos escuadras y varias plumas para realizar las acciones indicadas]

Alumnos: Platican entre ellos, preguntan al profesor y esperan más información para decidir cuáles serán las acciones usando las herramientas...

Profesor: Construyan varios cuadrados con vértice en el cruce de las semirrectas, pero que dos de sus lados queden sobre ellas [los alumnos discuten cómo hacerlo y comunican sus ideas entre sí, plantean sus dudas al equipo y resuelven el dilema...]

El profesor espera que entre sus conjeturas aparezca el que la razón entre los lados de los cuadrados es constante para indicar en algún momento que eso se llamará la pendiente de una recta y... Al momento de esta escena, el profesor espera que "vean una regularidad" entre los lados de los cuadrados, que tienen a la misma diagonal, así que ellos habrán hecho construcciones como la siguiente:



Réplica de la hoja tamaño carta

Se supone que la noción de razón entre los lados emerge de sus diálogos, el maestro entonces nombra a ese número como la pendiente de la recta diagonal... Naturalmente estamos sobre simplificando la situación con la intención de señalar dos aspectos: el carácter situado de las experiencias matemáticas que se emplean en la situación y su nula o escasa vinculación con otras prácticas de referencia.

Por su parte, el enfoque socioepistemológico, siguiendo con la escena de implicaciones, no se ocupan de estudiar en profundidad las relaciones asociadas con las afirmaciones $p \rightarrow q$ o $p \rightarrow \sim q$ en las que p y q podrían ser propiamente la hipótesis y la tesis de una implicación lógica o también representar papeles de antecedentes y consecuentes en una secuenciación temática de estudios o de acciones del alumno. Sino se ocupa de problematizar el saber, se pregunta ¿ p ? ¿será p el punto de partida? ¿de dónde proviene p? En este caso, se ocupan en *desnaturalizar* o *desmatematizar* el saber matemático al aceptar que antes que hablar de p, habrá que hacerlo sobre un complejo de prácticas, de naturaleza social, que den sentido y significado al saber matemático escolar, se acepta en esta visión que tales prácticas puedan ser propiamente externas a la matemática. La noción de práctica que se emplea es cercana a la noción de hegemonía, coerción, consenso, y en tal sentido nociones como uso y costumbre adquieren un papel central. El análisis minucioso se lleva a cabo bajo el programa socioepistemológico al nivel de las prácticas de referencia y sobre el paso del conocimiento al saber. Por ello sus primeros intentos de organización educativa tanto al nivel de sus texto como de sus programas de formación de profesores, en tanto formas culturales de socialización del saber, usa verbos en los que reflejan su visión: *predecir, argumentar*, *gestuar o actuar*, *anticipar*, *compartir*, *difundir*, *consensar, estabilizar*, *acumular, promediar*,... De modo que difunden una noción de la matemática escolar centrada en el uso social y la funcionalidad asociada.

Puede plantearse cuestiones del tipo, cuáles son las prácticas que permiten a los seres humanos percibir y socializar las variaciones de orden superior, ¿una, dos y tres? Veamos la siguiente tabla:

CÁLCULO	FÍSICA	GEOMETRÍA	COTIDIANO
$f(x)$	Posición	Ordenada	Estatura: Pequeño, mediano, grande
$f'(x)$	Velocidad	Pendiente	Noción de crecimiento
$f''(x)$	Aceleración	Concavidad	Cantidad de crecimiento
$f'''(x)$	¿?	¿?	¿?

Relación de correspondencias funcionales, ¿y la tercera?

Diseñamos por ejemplo para este fin, una estrategia didáctica. Les proponemos una colección de gráficas idénticas, como la gráfica que produce una función polinomial de grado seis con tres puntos extremos. Les pedimos utilizarla para cada inciso, al marcar sobre la porción que cumpla una de las siguientes opciones: $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, y finalmente $f'''(x) > 0$. Se espera que sus respuestas indiquen qué estrategias variacionales utilizan y las formas cómo argumentan su elección frente a sus compañeros. Comprobamos, que la pregunta más compleja resulta ser la última, pues es ahí donde se exige el uso de estrategias variacionales como única posibilidad de solución al problema.

Problema 1. Marca sobre la gráfica de la función descrita arriba, la porción que consideres cumple con la condición $f(x) > 0$

En este caso, los estudiantes recuerdan, basados en su enseñanza previa, que la ubicación en los cuadrantes I, II, III y IV determina el signo de la imagen de la función; de modo que las ordenadas positivas estarán en los dos primeros cuadrantes, mientras que las negativas en los restantes. De ahí que contesten esta cuestión con relativa facilidad.

Problema 2. Marca sobre la gráfica de la función descrita arriba la porción que consideres cumple con la condición $f'(x) > 0$. En este caso, los estudiantes, en esta oportunidad, confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función, o en otro caso, recuerdan que las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que se tendrá para pendientes positivas correspondientes derivadas positivas. Este cambio de registro, la pregunta planteada en el contexto simbólico con apoyo visual, y la respuesta construida en el contexto visual, resulta mucho más complicado para los estudiantes y ello se expresa en dos sentidos, por un lado la proporción de respuestas acertadas es baja y por otro las explicaciones que utilizan son escasas y evidentemente escuetas.

Problema 3. Marca sobre la gráfica de la función descrita arriba la porción que consideres cumple con la condición $f''(x) > 0$. Como podíamos prever, ahora la situación resultaría más compleja. Pues exige de niveles progresivos de abstracción. El recurso dominante en las respuestas de los alumnos, resulta ser la memoria. Puesto que ellos suelen recordar que la segunda derivada positiva se corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo está asociada con la segunda derivada negativa. Aún que no dispongan de explicación alguna para confirmar su razonamiento, pueden contestar a la pregunta. A juzgar por el análisis que hemos hecho de sus respuestas no se desprende la existencia de algún otro argumento que permita enfrentar la situación planteada. De hecho, es usual entre los alumnos disponer de un método mnemotécnico para establecer estas correspondencias, "es cóncava hacia arriba entonces retienen mas agua, si lo es hacia abajo retendrá menos agua, de hecho tirará el agua". Este símil con una cubeta llena de agua puede aparecer como una estrategia para refrescar la memoria. Naturalmente ello no parece implicar estrategias propiamente variacionales. La última de las cuestiones ponía en evidencia este hallazgo, pues se trata de una situación en la cual no es posible recordar algún conocimiento previo, pues el tema no ha sido tratado en su enseñanza convencional.

Problema 4. Marca sobre la gráfica de la función descrita arriba la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x) > 0$. Esta pregunta suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores, pues aunque entienden efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente. Esta dificultad se agudiza si en la pregunta elevamos el orden de la derivada involucrada, dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Consideramos que es hasta este momento en que ellos se encuentran en situación de aprendizaje, ya que la serie de tareas anteriores les permiten, aunque fuese sólo con recursos mnemotécnicos, dar una respuesta a las preguntas planteadas. Empero la cuarta cuestión plantea una problemática no prevista por ellos, el éxito en la pregunta radica en poder descifrar los códigos variacionales y articularlos en signos variacionales, pues la respuesta habrá de ser construida. En este momento, los estudiantes y los profesores suelen entrar en una situación de aprendizaje muy rica. Sólo quienes han dominado algunas de las estrategias del pensamiento y el lenguaje variacional pueden abordarla eficazmente. Hemos concluido, en este sentido, que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición sin la cual la formación de la idea de derivada y en consecuencia de la noción de predicción deviene inevitablemente frágil. Para ello es que hemos propuesto y explorado un tratamiento didáctico (ver en Cantoral y Montiel, 2001).

Conclusión

En síntesis, consideramos que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento. Requiere de la formación de *consensos*, de la *persuasión*, de la búsqueda de *legitimidad* y *validez* del *discurso*, en síntesis de una *ideología*. El pensamiento y lenguaje variacional, desde la perspectiva socioepistemológica, estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social. Pone atención en el estudio de los procesos cognitivos, culturales, históricos e institucionales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales, investigación que posee una orientación múltiple. Se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista fenomenológico, estudia funciones cognitivas que se desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticos del cambio, y tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio.

Bibliografía

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2): 33 – 112.

Cantoral, R. et Farfán, R. (2004). Sur la sensibilité a le contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 24(2): texto por aparecer.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vison of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. 53(3): 255 – 270.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, No. 42, 353 – 369.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático.* México: Prentice Hall.

Holton, D. (Ed.). (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. An ICMI Study. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12: 151 – 169..