EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD Y SUS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". - Universidad de Buenos Aires
ccrespo@sinectis.com.ar

Resumen
El concepto de continuidad está íntimamente ligado a los de infinito y límite. En este trabajo se presenta primeramente un breve recorrido por las ideas que influyeron históricamente en la construcción matemática del concepto de continuidad a lo largo de la historia del pensamiento humano y se analizan las concepciones que sobre este concepto tienen los alumnos a las distintas edades, con la finalidad de clarificar ideas y buscar nuevas estrategias didácticas para abordar el tema del continuo.

Introducción
Existe una íntima relación entre los conceptos de infinito y de límite. Estas ideas son fundamentales para la comprensión de nociones como límite en los últimos años del nivel medio (nivel polimodal) y también en los primeros cursos del nivel superior, sin embargo algunos conceptos relacionados con la continuidad son abordados años antes. Su abordaje y comprensión debe ser gradual para asegurar su correcta asimilación.
Las dificultades que para los alumnos presenta el aprendizaje de los primeros conceptos de análisis matemático, incluso en cursos iniciales de nivel universitario son debidas en muchas oportunidades a la no asimilación de la idea de continuidad de la recta numérica.
El análisis histórico permite una visión clara acerca de las dificultades que aparecen en el aprendizaje desde su adquisición intuitiva hasta la construcción del concepto matemático de continuidad. Surgen, sin duda, numerosos obstáculos epistemológicos relacionados con este concepto. Entre ellos, podemos mencionar, la diferenciación entre discretitud y continuidad, la confluencia de lo infinito con lo indivisible y la diferenciación y aceptación de los infinitos actual y potencial.

Continuidad y densidad de la recta: dos conceptos que no deben confundirse
Es usual encontrar que muchos alumnos confunden densidad y continuidad de la recta. Para más de la mitad de los alumnos, la continuidad de la recta se traduce en la condición de que *"dado un punto, siempre es posible encontrar otro tan cercano a él como se desee" o "dados dos puntos de la recta, siempre es posible encontrar otro entre ellos"*. Este es el concepto de densidad, no de continuidad. Es muy usual que continuidad y densidad sean confundidos y tomados como sinónimos, lo cual es completamente erróneo. Para mostrarles su error, basta con hacer referencia a la densidad de los números racionales y a la no continuidad de este conjunto numérico.
Si bien desde edades tempranas, se hace referencia a la continuidad de la recta, en muy escasas oportunidades los alumnos son capaces de relacionar el concepto de continuidad con la no existencia de interrupciones. Este es el concepto intuitivo de continuidad sobre el que deberíamos hacer más hincapié en la enseñanza, cada vez que nos sea posible. Esta idea debe ser trabajada explícitamente por el docente para evitar que la continuidad sea unida por los alumnos simplemente a la condición de infinitud, pero no está correctamente interpretada.

La construcción del continuo numérico a través de la historia

Es posible leer en algunas publicaciones de matemática educativa de diversos orígenes, la afirmación acerca de que la continuidad es una noción intuitiva y por lo tanto, evidente. Un breve vistazo a la manera en que se construyó históricamente esta noción, nos permitirá formar una opinión propia al respecto. La historia es, muchas veces, un instrumento útil para la comprensión de los problemas que se presentan en educación. Los conceptos sencillos e intuitivos, sin lugar a dudas surgieron rápidamente en la historia de la humanidad. Cuando una idea tarda siglos en ser comprendida cabalmente por los científicos, seguramente resultará necesario un abordaje cuidadoso en la enseñanza.

Según los documentos que han llegado a nuestra época, provenientes de distintas culturas (tablillas babilónicas, papiros egipcios, estelas mayas, etc.), la mayoría de las civilizaciones antiguas poseían sistemas de numeración; conocían los números naturales y en muchos casos también los números racionales como partes de la unidad. Para todos estos pueblos, los números tenían un claro significado geométrico. Estaban asociados al proceso de medir y la medida se asociaba con magnitudes geométricas.

En la matemática griega, estas ideas también se ven reflejadas. El pensamiento griego se orientó a dar forma a la matemática desde el pensamiento lógico deductivo y a lograr la matematización de los fenómenos naturales, sobre la base de su estructura racional.

Para los griegos, toda la naturaleza era explicable en términos de números. Pero los únicos números que existían eran los naturales y los racionales, pensados estos últimos como razón de dos naturales. Es conocida la crisis en la matemática que ocasionó el descubrimiento de $\sqrt{2}$ y de su naturaleza no racional. La aparición de estos números irracionales, puede decirse, que *"obligó a los matemáticos a crear el concepto de continuidad"* (Bell, 1996) y puso en problemas la concepción pitagórica del mundo.

En el siglo IX, el filósofo árabe al-Farabi generalizó el concepto de número a los racionales y a los irracionales positivos. Los árabes se focalizaron en este aspecto en la medición de las magnitudes, pero no era posible realizar la generalización que deseaban a partir de las operaciones, como en los restantes conjuntos numéricos. La naturaleza de la continuidad es fundamentalmente diferente. En Occidente, recién en el Renacimiento y por influencias árabes, se aceptó que los irracionales eran números. La noción de continuidad sigue a partir de este momento, íntimamente ligada a ideas físicas y geométricas.

Cuando Isaac Newton (1642-1727) matematizó algunos fenómenos físicos mediante las leyes que los rigen, debió suponer que tanto el tiempo, como el espacio son continuos:

> *...“Considero el tiempo como fluyendo o incrementando con un flujo continuo y otras magnitudes como incrementando continuamente en el tiempo”...* (Rigo Limini, 1994)

Sólo a finales del siglo XIX pudo formalizarse la idea de continuidad y dar definiciones satisfactorias para los números reales. Durante la segunda mitad de este siglo, los números reales fueron caracterizados como un campo ordenado completo arquimediano. Esto fue posible gracias a los trabajos de Cantor, Dedekind y Weierstrass en relación con la fundamentación del número real. Con estas definiciones, la recta numérica real se “completó”, se rellenaron los “huecos” existentes entre los números racionales. La recta real logró finalmente legitimar formalmente su continuidad. Esta definición permitió establecer con claridad la equivalencia entre la continuidad numérica y la continuidad geométrica de la recta.

La continuidad geométrica a través de la historia

Hasta fines del siglo XIX, en geometría, la continuidad del espacio se dio por sentada, era un concepto que no se ponía en discusión, que no se planteó como la posibilidad de que pudiera traer consigo un problema. Es conocida la demostración dada por Euclides (Siglo III a.C.) en sus Elementos para su Proposición 1.1. Esta proposición afirma la existencia de triángulos equiláteros. Para demostrar su existencia, es necesario algún postulado de continuidad. Euclides lo aceptó tácitamente en su obra; se tardaría veintidós siglos en enunciarlo explícitamente, quizá porque la atención de quienes se dedicaron a la geometría, se centró hacia el cuestionamiento del quinto postulado.

David Hilbert (1862-1943), en *Fundamentos de la Geometría*, introdujo un grupo de axiomas de continuidad. La genialidad de Hilbert, con respecto a este tema, consistió en darse cuenta de que la continuidad debía ser explícitamente enunciada a través de un gupo de axiomas para que pudiera usarse en la geometría. En la primera versión de Hilbert, aparece un sólo axioma en el grupo de continuidad: el de Arquimedianedad o de medición: Posteriormente, Hilbert reconoció la necesidad de añadir otro axioma en este grupo: el axioma de plenitud o de integridad: Con estos enunciados previos, no cabe duda de la corrección de las demostraciones geométricas como la de Euclides.

Otros matemáticos posteriormente propusieron axiomáticas equivalentes, en las cuales ya no faltó la idea de continuidad.

Existen sistemas geométricos que no satisfacen la continuidad, al postular la continuidad se establece una equivalencia entre el continuo aritmético y el geométrico y es posible establecer una biyección entre los números reales y los puntos de la recta.

Pero, al llegar a este punto de nuestro análisis, cabe entonces preguntarse: ¿Por qué transcurrieron tantos siglos antes de que esta idea surgiera? Quizá esto se relacione con la aparición de paradojas en relación con los conceptos de infinito y continuidad. El concepto de continuidad no sea realmente tan intuitivo como puede parecer a simple vista y merece un cuidadoso tratamiento.

La continuidad, el infinito y las paradojas

La paradoja de Zenón fue enunciada hace veinticinco siglos por Zenón de Elea, un discípulo de Parménides hacia el 450 a.C. Aparentemente, una de sus intenciones era probar la inconsistencia de las ideas pitagóricas respecto del número. Se ocupó de tres problemas: lo infinitesimal, lo infinito y la continuidad, los tres tratados a partir del movimiento y las contradicciones a que su análisis conducía.

La principal objeción de Aristóteles a Zenón, consistió en la distinción entre infinito por suma e infinito por división. Si se considera una unidad de longitud y se la suma infinitas veces, se obtiene una distancia ilimitada no recorrible en un tiempo finito. Pero si se prefigura lo ilimitado conforme a un procedimiento "en cierto modo opuesto", como el llevado a cabo por Zenón, dividiendo la unida de longitud en infinitos intervalos, entonces la infinitud puede considerarse agotable en un intervalo limitado de tiempo. Para Zenón, el absurdo se basa en una doble contradicción: la existencia de algo infinitamente pequeño que conduce a algo infinitamente grande, o sea la presencia de algo finito e infinito a la vez.

La concepción griega del espacio y del tiempo

El espacio físico, percibido inicialmente por los sentidos y sometido posteriormente a un proceso de idealización, tuvo para los griegos un papel fundamental para el análisis del

espacio geométrico. La concepción griega del espacio estuvo basada en experiencias sensoriales elementales, como por ejemplo en la noción de distancia entre cuerpos. Esta se comprende al poner entre los dos cuerpos un tercer cuerpo que está en contacto con ellos y que se mide. La idealización de la distancia entre cuerpos conduce al concepto de longitud.
De manera similar, la percepción de partículas materiales pequeñas conduce a la noción de punto y la de hilos muy delgados a la de recta. La intuición de que la distancia entre dos cuerpos puede ser fraccionada indefinidamente se conecta con la idea de que la recta, que tiene longitud está formada por puntos que no la tienen.
Pensar en la noción de continuidad temporal no es menos complicado. El concepto de tiempo se basa en las relaciones de "antes" y "después". Sin embargo el continuo temporal no tiene en la matemática tanta fuerza como el continuo geométrico. Aristóteles abordó el tema de la continuidad en su *Física*, considerándola como una propiedad esencial del movimiento, el tiempo y las magnitudes. Para él, el concepto de continuidad está caracterizado por una especie de "contigüidad" que conecta elementos que se mantienen unidos, en contacto. Según la concepción aristotélica, un segmento rectilíneo es un continuo en el que las partes y los puntos tienen existencia sólo en potencia. Sólo los extremos del segmento tienen existencia en acto. Esta visión de la continuidad, da la posibilidad de eludir el problema de que todo punto de una recta, aunque tenga sucesores, no tiene un sucesor inmediato. Esta concepción aristotélica es adecuada para el estudio de la recta racional, pero no de la recta real.
El continuo geométrico, tal como lo consideramos en la actualidad, tiene una característica fundamental que lo diferencia del continuo aristotélico: sus elementos, los puntos de la recta, tienen existencia actual, mientras que para Aristóteles, su existencia era potencial, o sea que no todos los elementos del conjunto son considerados como que existen simultáneamente. La visión griega del infinito corresponde a la idea de que el matemático no opera simultáneamente con todos sus elementos, sino que puede llegar a construirlos cuando los necesite. Esta concepción se mantuvo durante siglos, alimentada por una inmensa cantidad de paradojas y dificultades que recién fue solucionada con la teoría de Cantor basada en algunos precursores como Galileo y Bolzano.

La visión de los alumnos

Para reflexionar acerca de las causas por las que los alumnos tienen dificultades en la comprensión de los conceptos de continuidad y límite, es interesante analizar qué respuestas dan a preguntas relacionadas con la continuidad. Presentamos a continuación algunas experiencias llevadas a cabo por medio de encuestas y preguntas. El planteo de algunas de estas cuestiones en el aula permite conocer los preconceptos e ideas que manejan sobre el infinito, la continuidad y sus consecuencias en las distintas edades.
He aquí algunas de las situaciones problemáticas que hemos planteado, basándonos en otras investigaciones llevadas a cabo (Núñez Errázuriz, 1997), (Romero, 1996).

1. *Una hormiga quiere recorrer un lado de la mesa. Primero debe avanzar la mitad del trayecto, enseguida debe continuar con la mitad de lo que le queda, luego con la mitad de lo que le queda y así sucesivamente. ¿Llegará alguna vez al otro lado de la mesa?*
2. *Imagina que dispones de un microscopio de gran potencia, que te permite aumentar los objetos tanto como quieras. Enfocas un trozo de recta. Describe lo que ves y qué ocurre a medida que aumentas la potencia del microscopio.*

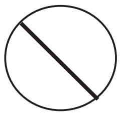
Para obtener de los alumnos las respuestas a estas preguntas, indagando en los errores conceptuales que pudieran tener, es importante permitir el uso de diversos materiales: calculadoras, lápices, reglas, etc., y observar cómo aplican cada uno de ellos para llegar a sus conclusiones, a cuáles recurren según las edades, y en cada caso, cuáles son los pasos que conducen el proceso de pensamiento.

Es evidente la analogía entre la primera situación problemática y la paradoja de Zenón.
Por lo tanto, las respuestas que pueden obtenerse son de tres tipos: algunos responden que la hormiga llega a destino, otros que no aunque en realidad se aproxima mucho a éste y finalmente una tercera postura es una sucesión de argumentos dubitativos que oscilan en la defensa de respuestas diferentes y a menudo contradictorias. Las posturas asumidas en este caso varían notoriamente según las edades.

- Los niños pequeños (de primer ciclo de EGB), en su gran mayoría considera que se trata de una pregunta trivial: la hormiga obviamente llega a recorrer la mesa, solo en casos aislados titubean, pero finalmente responden que llega a su meta.
- En el segundo ciclo, las respuestas son más dubitativas, oscilando entre los argumentos, con respuestas tales como: *"va avanzando la mitad, luego la mitad de la mitad, pero llega a faltarle una mitad muy chiquita, tan chiquita que con un paso más llega*". A estas edades es aún difícil que acepten las iteraciones infinitas, son pocos los casos que afirman que no alcanza la meta.
- Ya en el tercer ciclo de EGB, aunque la mayoría afirman que se llega al otro extremo de la mesa, a pesar de que tome mucho tiempo, gran cantidad titubea al realizar el análisis, llegando incluso en algunos casos a reconocer que la dificultas del problema se basa en el concepto de infinito a través de intervalos infinitamente pequeños. A pesar de estos razonamientos, no se llega a niveles de abstracción.
- Recién se detecta claramente la presencia de una paradoja en algunos de los jóvenes de entre 16 y 18 años (nivel polimodal). Sin embargo no se presentó en ningún caso el concepto matemáticamente correcto de que la serie considerada converge a L.

La segunda situación problemática consiste en cierto modo en la descripción de la recta, el interés principal consiste en analizar la evolución de lo observado a medida que aumenta el aumento del microscopio. En este caso, a medida que aumenta el nivel de abstracción y de comprensión conceptual del concepto de recta, se detecta la invariabilidad de la respuesta obtenida. Sin embargo, son pocos los casos en que se pone de manifiesto que la recta no tiene espesor.

- Las respuestas obtenidas, aún en jóvenes de 16 a 18 años, permiten reconocer dos visiones de la recta. La mayoría perciben la recta como una cinta delgada, a través de respuestas como: *"cada vez vemos una parte menor, pero más ancha"*, incluso llegan a dibujar lo que afirman que se vería de la siguiente manera:



Menor aumento

Mayor aumento

- Esta es también la posición de la mayoría de los niños de los primeros ciclos de

EGB. Se trata de una visión unida al mundo físico, a la visión de objetos a través del microscopio, sin la abstracción suficiente como para pensar en la estructura molecular.

- Otra de las respuestas comunes, aunque no tanto como la anterior, es considerar a la recta como una sucesión de puntos, muchas veces percibidos como esferas de dimensiones pequeñas. Aparecen algunas de las respuestas como: *"veo muchos puntos muy juntitos, que parecen unidos, a medida que aumenta la potencia del microscopio, veo más puntos entre punto y punto".* Quienes optan por esta posición, reconocen el orden entre los números (puntos) y aparece bajo esta óptica la densidad de la recta, pero no la continuidad.

Algunas reflexiones finales

Hemos presentado distintas visiones del concepto de continuidad que tienen los alumnos en las diversas etapas de la escuela. Las respuestas obtenidas deben ser retomadas en clase para orientar a los alumnos hacia la construcción el concepto de continuidad. Sin lugar a dudas, el modelo de recta que van forjando tiene gran influencia en la comprensión de conceptos del análisis matemático. La geometría es una gran aliada a través del proceso de visualización, para llegar a la internalización de la noción de continuidad. Una percepción incorrecta de la propiedad de completitud de los números reales, unida tan sólidamente a la continuidad de la recta, pueden dificultar la comprensión de nociones posteriores. Por ello es de gran importancia hacer hincapié en la enseñanza de estos conceptos.

No se debe confiar en que comprenderán intuitivamente la continuidad de la recta por sí solos. Este concepto debe ser abordado explícitamente en la escuela, para estar seguros de su real comprensión. Cuando un concepto matemático ha tardado tantos siglos en hacerse evidente, esto demuestra que su comprensión no es sencilla y por lo tanto, su enseñanza no puede tomarse a la ligera.

Las situaciones problemáticas presentadas permiten conocer tanto los preconceptos que los alumnos poseen, como la manera en que su visión de la continuidad evoluciona. Trabajar en clase sobre estas preguntas u otras similares, puede ser de gran utilidad para clarificar ideas y buscar nuevas estrategias didácticas para abordar el tema del continuo, allanando de esta manera el aprendizaje de otras ideas posteriormente.

El enfoque histórico de la evolución del concepto de continuidad, contribuye a la interpretación y conocimiento de las dificultades existentes en su comprensión y de esta manera a la búsqueda de nuevas estrategias para abordar su aprendizaje.

Bibliografía

Bell, E. T. (1996). *Historia de las Matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Crespo Crespo, C. (2001, noviembre). *Acerca de la comprensión del concepto de continuidad*. En Boletín de SOAREM nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires: SOAREM.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

Hilbert, D. (1953). *Fundamentos de la Geometría.* Madrid: Publicaciones del Instituto Jorge Juan.

Núñez Errázuriz, R. (1997). *Infinito de lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales*. En Educación Matemática. Vol. 9. Nº 1. (pp. 20-32). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rigo Limini, M. (1994). *Elementos históricos y sicogenéticos en la construcción del contínuo matemático. 1ª Parte.* En Educación Matemática. Vol. 6. Nº 1. (pp. 19-31). *2ª Parte.* Vol. 6. Nº 2. (pp. 16-29). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Romero, C. (1996). *Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario.* En Enseñanza de las ciencias. Vol. 14. Nº 1. (pp. 3-14). Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.