CONSTRUYENDO RELACIONES BENÉFICAS ENTRE IMAGINARIOS CULTURALES Y APRENDIZAJES MATEMÁTICOS

Leonora Díaz Moreno
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
leonorad@entelchile.net

Resumen

El desafío de democratizar los saberes de la modernidad, en particular, de lograr entendimientos matemáticos significativos en orden a empoderar a la mayoría de nuestros ciudadanos, resta inconcluso de cara a las demandas que plantea el proceso globalizador en marcha en las sociedades de nuestra América Latina, cuyos cimientos se constituyen sobre mixturas de premodernidad y modernidad. Vemos por ejemplo que la extensión de la educación formal en varios de los países latinoamericanos ha reducido a niveles mínimos las estadísticas de analfabetismo básico, no obstante en esos mismos países ha aparecido un "analfabetismo matemático" que se expresa en que una gran mayoría de ciudadanos en la región no puede resolver problemas sencillos de matemática tales como: leer gráficos que ilustran situaciones de delincuencia, tendencias económicas, intereses de créditos, descuentos porcentuales de sueldos, costos de planes de salud o elección de fondos previsionales, a pesar de la certificación de los procesos de enseñanza llevados a cabo, en poblaciones que ostentan hasta diez y más años de escolaridad en promedio. Lo educativo refiere a procesos de largo aliento, a un sistema educativo que aprende, a una sociedad que aprende, a docentes e investigadores que aprendemos y entonces ¡a estudiantes que entienden matemáticas! El corazón de nuestra tarea como profesionales de la matemática educativa, es elaborar lo propio y apropiado al mundo de nuestros estudiantes, mundo complejo y abigarrado que demanda a nuestros entendimientos. Compartimos la afirmación que distingue la matemática misma de la matemática educativa y de la matemática escolar. Añadimos a esos saberes, los saberes culturales, los cuales constituyen cuerpos de conocimientos con una naturaleza propia y que ingresan al aula más o menos invisibles para sus protagonistas, favoreciendo u obstaculizando los entendimientos de los saberes matemáticos escolares.

¿Cómo dar visibilidad a estos saberes? ¿Cómo construir relaciones benéficas con aquellos del aula? Procuramos responder a estas preguntas desde una racionalidad alternativa de aquella racionalidad analítica que opera por la división del campo en subcampos menores, que pueden ser más fácilmente abarcados y, así, entendidos y representados. La metáfora del rizoma (tallo horizontal y subterráneo como el del lirio común) nos hace pensable una multiplicidad de cuerpos de conocimientos ni compartimentados ni necesariamente jerárquicos, a diferencia de los esquemas de mapas conceptuales y redes cognitivas usados en la enseñanza para favorecer la construcción de esquemas mentales en los que se cristalizan nuevos entendimientos. En esta presentación se ilustran primeros resultados en la búsqueda de filiaciones y rupturas entre imaginarios culturales y nociones escolares de variación, así como primeras aproximaciones a las estructuras de esas representaciones. Noción relevante toda vez que ella se encuentra a la base del desarrollo científico tecnológico de la modernidad, esto es, cuantificar variaciones en los procesos para predecir y controlar.

Antecedentes

Los bajos logros de los aprendizajes matemáticos, que persisten en los estudiantes y en las estudiantes, mantienen viva en nuestra agenda la tarea – que se vuelve más urgente con la necesidad de cada país de incorporarse a los procesos de globalización con identidad y autonomía – de profundizar en la indagación de aspectos que afectan las posibilidades de logro de tales aprendizajes. Dados los resultados de la investigación didáctica, que señalan a la enseñanza y los aprendizajes de nociones matemáticas como procesos de largo aliento –algunos del orden de tres años en tanto que otros bordean los diez años- se requiere indagar en las representaciones de nociones matemáticas escolares según ellas se van manifestando, ya desde una década anterior a la formación profesional.

El Programa de Investigación de las Ideas Previas se planteó en sus inicios el propósito de que los profesores conocieran qué ideas, qué esquemas tienen los estudiantes de las nociones científicas para que los docentes las sustituyesen por las nociones del currículo

escolar. Así, no obstante que el propósito del Programa fue aportar con los resultados de las indagaciones al esfuerzo docente por el cambio de conceptos, transcurridos quince años de investigación, que revelan la robustez de las ideas previas del estudiantado, perdurando estas más allá de su formación profesional, el Programa reflexiona y dice: *No, no se trata de un reemplazo. Más bien intentemos un diálogo.* Pero ¿quiénes van a dialogar? Las maneras de entender la matemática en la vida cotidiana con las maneras de entenderla en la escuela, en la asignatura de la matemática escolar. Y ¿Cómo vamos a hacer dialogar aquello que el profesor de matemática sabe de los modelos de matemática que él va a enseñar, si desconoce cómo es que pensamos cotidianamente de la matemática fuera del aula en nuestra vida diaria y, en particular, cómo es que sus estudiantes la visualizan? La inquietud nuestra es indagar cuál es la estructura de las representaciones, cuáles son los modos de pensar cotidianamente distintas nociones con mayor o menor relación a las nociones matemáticas escolares.
Por su parte el Programa Latinoamericano de Pensamiento y Lenguaje Variacional se ocupa de la variación[1] (Cantoral y Farfán, 1998). ¿Qué significa esto? Estudia para hacer enseñables las matemáticas que tengan que ver con la variación ¿Para qué queremos manejar la variación? Galileo lo hace. Newton lo hace ¿Por qué? En ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la variable independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente. Nuestro interés es que se aborden en el aula modelos matemáticos de variación, los cuales, según muestra la investigación, requieren ser estudiados por largos períodos de tiempo. Por ende su aprendizaje se favorece trabajando esos modelos matemáticos hilvanados, entretejidos a lo largo de su vida escolar. Buscamos conocer las voces cotidianas de la variación para ponerlas en diálogo con las voces matemáticas y ver en qué medida nos pueden ayudar a sintonizar aquellas coherencias del contenido matemático con las coherencias cognitivas de las personas de modo que se favorezcan los entendimientos y sea una experiencia grata abordar el estudio y apropiación significativa de las matemáticas que operan con los fenómenos de variación.

¿Cómo miramos los saberes cotidianos y los saberes escolares en la investigación?
La actividad matemática como una actividad humana se aborda desde un conjunto de creencias portadas por las comunidades de investigadores según señalan sociólogos, historiadores y filósofos del conocimiento. Asimismo a la actividad del aula se incorporan profesores y estudiantes con sus creencias, parte de las cuales se vinculan a sus saberes prácticos y su desenvolvimiento en la cotidianidad. Hay unas creencias de los profesores que tienen que ver con su quehacer profesional, indagadas por el "Programa de Pensamiento del Profesorado". Para el diseño y el trabajo en el aula, el profesorado necesita saber lo que se ha venido construyendo sobre saberes matemático educativos, es

[1] Este programa se ocupa de estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos que le dan cabida, atendiendo a una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos cognitivos y los modos de transmisión vía la enseñanza

decir, esos saberes que procuran llevar al aula de manera entendible unas matemáticas que no fueron hechas para ser enseñadas ni fueron hechas para ser aprendidas sino que primero buscaron resolver problemas. ¿Qué relación pueden tener esas matemáticas con nuestros modos de entender? La disciplina de la matemática educativa se preocupa de hacer entendibles esas matemáticas, construyendo las mediaciones sobre la base de un currículo explícito -los objetivos fundamentales y contenidos mínimos de nuestro país por ejemplo- así como estudiando los currícula vividos en las aulas y aquel curriculum implícito en las prácticas con las matemáticas escolares.

Además de un adecuado conocimiento de tres tipos de saberes: matemático, matemático educativo y matemático escolar, nosotros creemos que también tenemos que manejar los saberes culturales, esos saberes que van emergiendo en los diversos espacios a los que van concurriendo en su *irse haciendo* las personas. ¿Cómo estamos entendiendo los saberes culturales? Los entendemos como cuerpos de conocimientos que tienen naturaleza propia, que ingresan al aula sin conciencia de los protagonistas y que manifiestan gran resistencia a su modificación. Buscamos dar visibilidad a estos saberes culturales para proponer relaciones benéficas alternativas, desde una mirada que nosotros llamamos cualitativa. Para organizar y comunicar representaciones del conocimiento los docentes e investigadores disponemos de diversidad de técnicas, entre ellas mapas conceptuales y redes cognitivas. Tales esquemas no son neutros, encierran potencialidades diferentes. En efecto, el esquema mapa conceptual cristaliza de modo preferente *cómo el saber científico se ordena en este tema, hoy día*. Según lo presentaran Novak y Gowin[2], se trata de diagramas conformados por rectángulos y conectores unidireccionados, con niveles de lo más general a lo particular, y, son jerárquicos. Tales esquemas comunican un saber ya formalizado. Por su parte, la técnica de la red cognitiva favorece un desplazamiento en el foco de interés didáctico. El diagrama esta vez se compone de óvalos, ya no son rectángulos de aristas en punta, sino óvalos de formas suaves. Los conectores entran y salen y se pueden cruzar entre sí. No hay niveles desde un más a un menos importante, y, entonces, podemos decir que una red conceptual es un mejor instrumento para dar cuenta del entendimiento que la persona está teniendo de ese tema y no de lo que la Ciencia, por una cantidad relevante de años de ciencia normal, considerará que es el saber válido en un ámbito específico. Así por ejemplo, respecto de la energía ($E = mc^2$) su mapa conceptual va a ser muy parecido en Polonia, en Chile y en la India, pues es un dato externo a la persona. En tanto, una red conceptual tratará de expresar qué está entendiendo la persona, qué conexiones hace cada estudiante de un aula, en ese tema.

Hoy en día, para comunicar saberes en Ciencias Humanas y difundir modos de generar saber en las comunidades de investigadores, aparece pertinente la metáfora del rizoma. ¿Qué es un rizoma? Un tallo horizontal y subterráneo como el del lirio común. No dice mucho todavía, pero veamos, qué pasa con este tallo que es subterráneo. Cada tallo genera nódulos y de esos nódulos salen raíces y esas raíces se entretejen con raíces aledañas, tal y como fueron aprovechadas por los aztecas, quienes construyeron su ciudad sobre un lago. Esta acción fue tan exitosa, que en la actualidad en Ciudad de Méjico viven 25 millones de personas[3]. Entre otros elementos aprovecharon tallos subterráneos del tipo de los llamados

---

[2] Novak, J.D. y Gowin, B.(1988): Aprendiendo a Aprender, Martínez Roca, Barcelona.

[3] Con el correr de los siglos la población de Ciudad de México obtiene sus terrenos de asentamiento de dos modos principalmente. Por una parte, por la construcción de chinampas, sembradío artificial sobre el agua. Los Xochimilcas, pobladores dedicados a la agricultura, formaban del mismo cieno de la laguna sementeras andantes para sus sembradíos.

"rizomas" y aprovecharon el entrelazamiento que estos tallos hacen entre ellos subterráneamente, colocando otras materias y generando tierra, pero desde un lago. Esta metáfora sirve para mostrar que lo que se puede construir sobre un tejido con esa trama, puede ser muy sólido. Es parecido al entrecruzamiento de múltiples saberes: científicos, cotidianos, saberes profesionales, saberes de las distintas culturas.

Y es la metáfora misma la que cobra fuerza de herramienta específica para el análisis de textos y discursos en manos de los científicos sociales. Al decir de Lizcano (1999) "*el estudio sistemático de las metáforas puede emplearse como un potente analizador social*". O en términos de los autores del libro "¿De dónde vienen las matemáticas?" (Lakoff y Núñez, 2000): "*Lo esencial es que en la base de las ideas y de la construcción conceptual se encuentran las experiencias corporales, tales como experiencias térmicas (ella es una persona fría), dinámicas (el dólar subió varios puntos), kinestésicas (me llenó la cabeza con ideas estúpidas), olfativas (esta situación me huele mal), entre otras. Todo sistema conceptual, incluso los más abstractos, como aquellos que constituyen las matemáticas, se crean y se realizan gracias a mecanismos cognitivos elementales, entre ellos las metáforas conceptuales*". Abunda Lizcano (op. cit., 1999) "*la lógica a que obedecen las metáforas – y por lo tanto, la de los conceptos científicos que ellas animan – es una lógica social (…) una actividad en la que se trasluce el contexto y la experiencia del sujeto de la enunciación (…) sujeto concreto –histórica y socialmente situado, que se dirige a un oyente concreto (…) quien para construir sus conceptos y articular sus discursos, selecciona unas metáforas y desecha otras en función de factores sociales –presupuestos culturales, intereses o aspiraciones de grupo o clase, alianzas o exclusiones, características de los destinatarios, prestigio social de los discursos que son fuentes de los préstamos metafóricos…* " .

Es desde esta mirada epistemológica de la complejidad que buscamos entender el saber cotidiano respecto de la variación, entretejido con saberes escolares, socioculturales y de las matemáticas, indagando desde y para intervenir en aquella complejidad, en orden a lograr profundizar los aprendizajes en el campo del pensamiento y lenguaje variacional.

Investigaciones cualitativas muestran cómo ciertas nociones cotidianas están jugándose inconscientemente en el entendimiento de los estudiantes, constituyéndose en obstáculos socioculturales para los aprendizajes (Díaz, 1999). El problema que se propuso uno de los estudios (Díaz, op. cit.) fue determinar concepciones y esquemas de acción, con las que los estudiantes abordan el aprendizaje del concepto de límite, a propósito de su enseñanza por parte del profesor, en un contexto de clase masiva de introducción al cálculo universitario. De este modo, entre sus objetivos específicos se planteó el de identificar con qué concepciones abordan los alumnos de carreras de ingeniería los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto matemático de límite. En el marco de un análisis estructural y sobre la base de las voces estudiantiles para la noción de límite, se determinaron los ejes categoriales de *Evolución versus Restricción* y *Dentro de las normas versus Fuera de las normas.* El cruce de ejes generó cuatro imágenes posibles de mundo a visualizar por los jóvenes, a saber, un primer mundo de *VIDA SEGURA,* un segundo mundo de *VIDA MARGINAL,*

Se plantaba el árbol Ahuéxotl o Ahuejote a la orilla de la Chinampa para afianzarla o dividirla aprovechando sus tramas de raíces en forma de rizomas. Por su forma del ramaje, los rayos del Sol penetraban perfectamente sobre el terreno sembrado. Al cabo de cinco o seis años, la chinampa se asentaba sobre el fondo de la ciénega. Por otra parte, a partir del siglo XVII, comenzaron a construirse obras de drenaje de tamaño y complejidad crecientes, con el objeto de librar a la ciudad del riesgo de inundaciones y de secar el lodoso subsuelo del fondo del lago.

un tercer mundo *de ATLETAS*, y, un cuarto mundo *de PROFETAS*. ¿Dónde se ubicaron las textualidades de los estudiantes? Mayoritariamente se representaron en el primer mundo, *VIDA SEGURA*, evitando a toda costa el segundo, *VIDA MARGINAL,* y, aceptando que algunos (los menos) accedan al tercer mundo, de *ATLETAS,* en tanto que aquellos con talante de apóstoles aceptarán su ubicación en el cuarto mundo, de *PROFETAS*. Cabe reflexionar por los obstáculos de orden socio-culturales que emergen desde estas acepciones. ¿Se alcanza el límite? ¡No, si el costo atañe a la vida misma o su calidad! Desde la microsubjetividad de los estudiantes se visibilizó otra fuente de obstáculos a los aprendizajes que viene a añadirse a los referidos por la literatura – a saber, obstáculos didácticos, cognitivos y epistemológicos - y que pudiésemos llamar obstáculos de orden cultural. Ellos están impactando en los magros logros de apropiación que se exhiben en los aprendizajes relativos al concepto de límite de la matemática superior.
En la línea de objetivar este tipo de saberes -invisibles por ahora a nuestros ojos- es que se busca respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los modos de pensar y las maneras de operar con la variación en la cultura cotidiana del estudiantado? Un estudio en marcha[4] se plantea determinar la estructura y contrastar las representaciones de la variación tanto cotidianas como aquellas de las que se apropian los estudiantes y las estudiantes en la escuela. Aborda la pregunta por aquellas facetas tanto congruentes como contradictorias de las representaciones cotidianas de variación y de las representaciones de variación de las matemáticas escolares, que favorecen u obstaculizan los aprendizajes tendientes a la formación de un pensamiento variacional en los estudiantes y las estudiantes. A partir de ese conocimiento se propone validar secuencias didácticas las cuales contemplen a la variación como una temática transversal que pueda imbricar distintos contenidos escolares de ciencia experimental y de matemática.

Resultados iniciales.
Representaciones cotidianas de la variación en estudiantes de secundaria. Con grupos de estudiantes de los niveles de octavo y décimo año de escolaridad se buscó responder a la pregunta *¿Con qué representaciones abordan los alumnos y las alumnas de los cursos de octavo año y décimo año de escolaridad, los procesos de enseñanza y de aprendizaje de nociones variacionales comprometidas en conceptos de matemática?* usando las técnicas de encuesta -por medio de un cuestionario- y grupo de discusión. Cada vez que se preguntó a los estudiantes por variación, respondían mayoritariamente usando en su lugar la palabra cambio. Es decir, los investigadores hablamos de variación y los estudiantes hablan de cambios. Ilustramos con dos textualidades esta asociación:

> *En la vida donde esté, variación siempre va a ser cambio, eso ya está establecido, un cambio. Cambio y sin igualdad.*

Los sinónimos de variación a que aluden los estudiantes se agrupan en acepciones. Las más frecuentes en el octavo año son las de {cantidad, agrupación, harto, varias cosas, muchos estilos}, {diversidad, alternativas, elegir, escoger} y {diferencia, distinto: dual, discreto}. En el décimo año se enuncian preferentemente las acepciones de {irregular, inconstante, inestabilidad} y {transformación, cambio, cambiar, variable}. En el conjunto de las acepciones se presentan dos tipos de "naturalezas" principales, una de carácter más

[4] *LAS REPRESENTACIONES SOBRE LA VARIACIÓN Y SU IMPACTO EN LOS APRENDIZAJES DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS.* PROYECTO FONDECYT 1030413, período 2003-2005 y DIUMCE 10102, período 2002-2003. Investigadora principal Dra. Leonora Díaz, coinvestigadores Dra. Isabel Soto, Mr. Eulalia Gutiérrez y Mr. Alexis Labarca

bien estático y discreto y la otra dinámica y más bien continua. Reconocemos en ello dos tipos de epistemes en las cuales entra en juego la noción de variación según niveles de abstracción crecientes y consecutivos por su aparición temporal: el primero concreto-estático y el segundo abstracto-dinámico.

En la faceta estática se trae a colación pocas opciones discretas como partes de un todo estático. En la faceta dinámica hay textualidades que refieren a un evento de tipo causal: "Si A entonces B, bajo C". El actuante sabe como producir un cambio, esto es, controla la ocurrencia de ese cambio, que se desenvuelve temporalmente. Hay ejemplos que refieren cambios más bien impredecibles para el hablante, de ocurrencia también temporal. Un tercer grupo de cambios referidos es de tipo cíclico y por ende predecible por lo que potencialmente controlable en el sentido de manipular sus efectos.

Los dipolos presentes en las facetas estáticas de la acepción de cambio refieren a *Pocos*/diferente, distinto: dual, discreto/ vs *Muchos*/cantidad, agrupación, harto, varios, muchos estilos/ y *Homogéneo*/repetitivo, semejante/ vs *Heterogéneo*/diferencia, distinto, alternativas, elegir, escoger. Asimismo hay ilustraciones de cambios no cuantificables, que podemos llamar cualitativos – las variaciones de las mentalidades de las personas - así como los cuantificables. Estos últimos a su vez pueden diferenciarse entre los discretos – precio del dólar observado, cantidad de personas- y los continuos –temperaturas. En suma, el estudio de las textualidades reveló en este análisis que el Pensamiento y Lenguaje Variacional del estudiantado remite a cosmovisiones cíclicas y lineales (en el sentido de una sola dirección), a ilustraciones de modos de pensar tanto dinámicos como estáticos. Los primeros favorecerán tanto a la visualización de covariaciones como a manejar cognitivamente la ucronización y la simultaneidad (habilidades necesarias para apropiarse significativamente de saberes del medio social) en tanto los segundos o modos de pensar estáticos coadyuvan al estudiantado al establecimiento de clasificaciones y determinación de estructuras.

Los estudiantes del décimo año privilegian el cambio respecto de la variación –según lo expresan en sus conversaciones. La palabra variación adjetiva, secunda dando las tonalidades del cambio. En tanto que el cambio es una palabra sustantiva, que tiene la fuerza, el impulso que gatilla su realizaciones. Las corporizaciones o ilustraciones del concepto abren las posibilidades de conversar sobre cambios y por el contrario, lo conceptual se agota pronto. Los cambios difieren en intensidad –máximos o mínimos-, varían según sea aquello que cambia, pueden manifestarse en un intervalo de tiempo, resultan de la elección de un curso de acción cotidiano diferente, son la irrupción de una vía alternativa en el vivir cotidiano. Hay quienes no viven la acepción "aburrida" de la monotonía por lo que valoran positivamente esa regularidad al interior de la cual hacen cambios. Hay un uso de la expresión "variación profunda" para intervenir benéficamente el mundo, "variar" aquello que a su juicio está mal y que quieren cambiar para bien. El tránsito Escuela – Liceo es un cambio que viene de afuera, con responsabilidades muy altas y que la mayoría hace notar. El cambio se vive como novedad, se experimenta algo distinto entre un antes y un después. Asimismo, si no hay tiempo no hay variación. El tiempo es connatural al modo de pensar los cambios del estudiantado de segundo medio y tiene que ver con estados distintos acordes a pasos del tiempo, se compara un antes y un después de una misma cosa a la que se le detectan estados diferentes y se describen, dando cuenta del tipo de cambio ocurrido. En la manera de pensar de los jóvenes, la visualización de

cambio responde al dinamismo de la acción que ocurre en el tiempo. Las representaciones estáticas no son naturales en el habla espontánea de este grupo etario de jóvenes. El cambio -que es activo- afecta de modo sustantivo no exento de efectos dramáticos y emociones como dolor, frustración, esperanza, goce, entretención. A contrapelo de la vorágine de cambios en las que se hallan inmersos, como en un huracán, una estudiante se pregunta ¿qué puede cambiar en matemáticas? El grupo no da alternativas de visualización para ella, compartiendo su representación. Se constata como, una disciplina que trabaja con la cuantificación de cambios, ni se avizora en el horizonte de sus representaciones. Se representarían a la matemática como unos contenidos "fósiles" que se traen al aula generación tras generación.
Por su parte, el habla de los jóvenes de octavo básico es pródiga en el uso de la palabra variación. Lo variado es estático. En efecto, hay una colección en donde hay muchos distintos, presentes simultáneamente, que se comparan entre ellos mismos y son distintos por algún atributo, pueden ser de distinta naturaleza -hay variados elementos encima de la mesa: unos lápices, una goma, una radio. Así la voz de variación es pasiva "ahí yacen elementos diversos" a los que se asocian emociones tales como aburrimiento y comodidad. No obstante, los jóvenes la dotan de valoraciones positivas al asociarla con coherencias conductuales respecto en diversidad de contextos. El cambio tiene aspectos que son vitales de considerar, prever sus consecuencias, controlarlas de modo que generen el menor daño posible y en otro dominio, lamentar la pérdida de opciones al interior de un conjunto disponible de ellas. A las consecuencias del cambio se asocian valoraciones buenas y malas. Puede darse una relación recíproca de valores y valoraciones: dos índices bajar, uno de ellos con valoración positiva y el otro con valoración negativa, dependiendo del contexto. Las conductas personales responden en coherencia contextual, la variación conductual es gatillada por el cambio de los ambientes sociales en los que se desplaza la vida de la persona. En su construir la propia identidad – única, original - les contrarían las imitaciones. Según estos jóvenes "*la ley de la vida es cambiar, es inevitable*". Las variaciones inevitables e inabordables pueden ser gatilladas desde lo social como desde lo interno personal. En conjunto, los jóvenes de este grupo etario se visualizan más a merced de los cambios y variaciones, que como actores de ellos, a diferencia de lo que ocurrirá dos años más tarde, según refieren las textualidades de jóvenes del décimo año de escolaridad.

La apropiación de nociones de variación del discurso curricular. Ilustraciones Graficando.
Sobre la base de las producciones de los estudiantes se relevaron en esta primera fase, obstáculos a la visualización. En efecto, las producciones de los estudiantes revelan grandes dificultades para expresar variaciones en una gráfica distancia – tiempo.

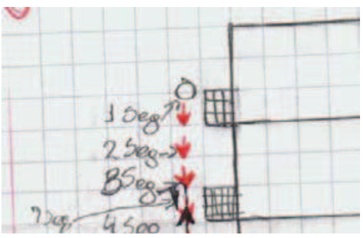
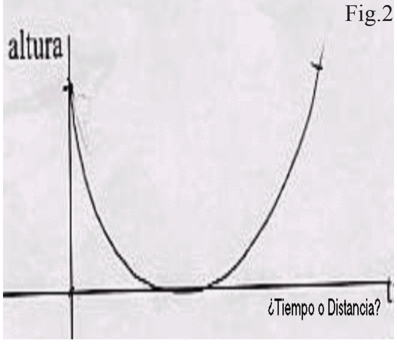


Fig.2



La figura 1 ilustra la competencia que se gatilla en el papel a la hora de adjudicar un eje al tiempo y un eje al desplazamiento. Se trata del dibujo de un estudiante del décimo año, sin preparación previa en gráficas a quien se le ha pedido que dibuje la trayectoria "a través del tiempo" de una pelota desde un tercer piso. Y es que se debe resolver para una variable que no está "a la vista" como lo es el tiempo (Carrasco, 2003). Cuando hablamos del tiempo asociamos un "adelante" para el futuro y un "atrás" para el pasado. Metáfora que refiere a un eje de longitud unidimensional (una recta). Atendiendo a los desarrollos de Núñez y Lakoff (2003) de que "e*l tiempo es metafóricamente conceptualizado (por los matemáticos) en términos de distancia*"entonces ocurre que al dibujar el avance del tiempo en un gráfico distancia/tiempo la representación del tiempo entra a competir – para su representación - con la dimensión espacial propia del desplazamiento (figura 2). Dos dimensiones que refieren a distancia, no pueden ocupar el mismo eje, entonces el estudiante de la figura 1 reserva el eje para el desplazamiento y hace marcas sobrepuestas para el paso del tiempo.
Entre las evidencias recogidas en esta fase del estudio se identifican tres tipos de obstáculos para elaborar gráficas de fenómenos tiempo/distancia por el estudiantado: epistemológicos (deriva de Oresme a Descartes, pasando por Tartaglia), cognitivo-culturales (el tiempo sustentado sobre una metáfora espacial compite con el desplazamiento a la hora de graficarlos juntos) y didácticos (opción curricular que reemplaza el paradigma geométrico de Newton y Liebnitz por el aritmético de Dedekind y Weierstrass).

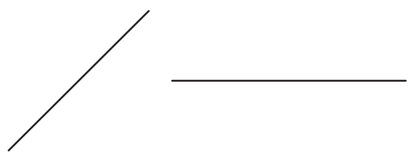
Estudiando la variación proporcional inversa. Consultados los estudiantes sobre sus entendimientos en esta materia muestran como las prácticas operatorias mecanicistas les dejan con un sinnúmero de preguntas en un registro algebraico carente de significado para la variación proporcional inversa, como lo muestran las siguientes textualidades:

> *"¿Por qué había que* ***dar vuelta*** *una parte del sistema inverso?"*
> *"¿****Cuando se invierten las incógnitas*** *en las ecuaciones de 3x3 indirectas?"*
> *"¿Por qué* ***dar vuelta*** *una parte de la ecuación en la variable inversa?"*
> *"Me quedó una duda respecto a un problema 3x3 inverso el cual* ***el inverso de 2c, es 2/c*** *según nuestro compañero, lo que creo que está bien,* ***pero también podría ser 1/2c****."*

¿Cómo dotar de razonabilidad a las prácticas operatorias que pone en escena el aula para la variación proporcional inversa? Se pesquisó en los modos de operar a propósito de tres casos ilustrativos, a saber, el análisis de tablas babilónicas, el modo de reflexionar la proporción entre surcos y semillas del campesino de la edad media y el desastre ecológico de la sobre-explotación del sembradío actual, por una parte, y, por la otra, se indagó en los avances en el campo del lenguaje, las neurociencias y la sociología del conocimiento para entender los procesos de construcción de saberes y de aquellos en particular. Se relevaron las nociones de las metáforas corporales y las metáforas conceptuales como herramientas útiles para el análisis de las prácticas sociales vinculadas a la elaboración de saberes, en el marco socio-epistemológico de la investigación (op. cit., 2000). Asimismo, se elaboró una primera aproximación a una "metáfora didáctica" a incorporar al discurso curricular sobre la variación proporcional inversa, dotando de significado a este saber matemático entre los estudiantes. Tal metáfora "corporiza" el modo de operar de la proporcionalidad inversa: busca la manera de interpretar cualidades propias de "dimensiones o variables" que se relacionan de forma polar, aceptándose y reconociéndose mutuamente, de acuerdo a un mismo referente, con comportamientos de variación "inversa". Se trata de cambios de comportamientos al interior un todo de naturaleza dual. Esta "imagen" reflejaría el tipo de "corporalidad" implícita tanto en culturas de época remota expresadas en las "tablas de los recíprocos" de los babilonios como en los cálculos del campesino medioeval y el ecologista contemporáneo. Sería plausible - a la luz de estos hallazgos - dar sentido de un modo "natural", a un encuentro de un concepto de "inverso", con el significado cultural de "reciprocidad" en las representaciones estudiantiles. No es un modo de operar "inverso" de otro modo de operar - de una "proporción directa" desde la perspectiva formalista de la matemática - sino que refiere a un modo de operar con un sentido en sí mismo.

Conjeturando visualizaciones presentes en entendimientos de ideas variacionales sobre la base de la reflexión de los propias procesos de estudio de la variación. Damos un ejemplo de esta estrategia a partir de la textualidad de una estudiante:

> *"Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es constante, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, o sea no varía. Su razón de cambio es cero."*
> [Extracto bitácora 3]



La estudiante se representa la variación por medio del dipolo "*...no tiene movimiento, osea no varía*" implicando una cadena asociativa del tipo *no tiene movimiento* → *no varía* → *su razón de cambio es cero.* La estudiante, basada en su enseñanza previa, asocia que sin movimiento se corresponde con razón de cambio cero, subyaciendo a su vez la noción cultural del cero como la nada detrás. Dicha cadena asociativa la refiere a la variación de la gráfica en sí misma, dando una mirada global con ausencia de visibilidad de lo local: lo que se mueve o no se mueve es la recta. Pareciera que lo que varía o no varía ha de ser visto. Y "*se ve una recta que no tiene movimiento*" versus otra que si lo tiene, a pesar de estar ambas están estáticas en el plano. ¿Qué puede llevarle a afirmar sobre la recta en una suerte de *Gestalt* que invisibiliza lo local? ¿Qué metáforas – icónicas, gráficas, visuales - subyacen? Dado el desarrollo e impacto de la comunicación visual hoy día, culturalmente podemos inferir asociando la horizontal con el ícono de una cama o más aún, con una persona acostada - descansa o duerme- por lo que no se desplaza. Lo que varía o no varía es un algo corpóreo que se desplaza o no en un espacio y su transferencia al registro visual se expresa en logos altamente estilizados y minimales en su expresión. La recta oblicua podría ser esa persona levantándose, por lo mismo, moviéndose. En su argumentación entonces presenta una concepción de "complejo pseudo concepto" generalizando el decir de Vygotsky: el complejo formado por las cadenas asociativas gráfico-visual y aquella cadena que recuerda del aula.

Conclusiones

Lo educativo refiere a procesos de largo aliento y que demandan aprendizajes a cada uno de sus actores. El corazón de la matemática educativa, es elaborar lo propio y apropiado al mundo de nuestros estudiantes, mundo complejo y abigarrado que demanda a nuestros entendimientos. Distinguimos la matemática misma de la matemática educativa y de la matemática escolar. Añadimos los saberes culturales, los cuales constituyen cuerpos de conocimientos con una naturaleza propia y que ingresan al aula más o menos invisibles para sus protagonistas, favoreciendo u obstaculizando los entendimientos de los saberes matemáticos escolares. Resultados iniciales en estudiantes de secundaria muestran que sus representaciones cotidianas de la variación poseen tanto naturaleza estática y discreta como dinámica y continua, constituyendo epistemes en las cuales entra en juego la noción de variación según niveles de abstracción crecientes y consecutivos por su aparición temporal: el primero concreto-estático y el segundo abstracto-dinámico. El pensamiento y lenguaje variacional del estudiantado remite a cosmovisiones cíclicas y lineales (en el sentido de una sola dirección), a ilustraciones de modos de pensar tanto dinámicos como estáticos. Los estudiantes del décimo año de escolaridad privilegian el cambio respecto de la variación, siendo el cambio una palabra sustantiva, que tiene la fuerza, el impulso que gatilla su realizaciones. El tiempo es connatural al modo de pensar los cambios del estudiantado del décimo año y tiene que ver con estados distintos acordes a pasos del tiempo, se compara un antes y un después de una misma cosa a la que se le detectan estados diferentes y se describen, dando cuenta del tipo de cambio ocurrido. El estudiantado de octavo año utiliza mucho la palabra variación con un sesgo pasivo de aburrimiento y comodidad. No obstante la dotan de valoraciones positivas al asociarla con coherencias conductuales en diversidad de contextos.

Explorando nociones de variación del discurso curricular, las producciones de los estudiantes revelan dificultades para expresar variaciones en una gráfica distancia – tiempo. En ellas la metáfora matemática que concibe a la dimensión de tiempo como una distancia, compite - a la hora de graficarlos juntos - con la dimensión propia del desplazamiento. Por su parte, en procesos de estudio de la variación proporcional inversa, las operatorias mecanicistas dejan un sinnúmero de preguntas en un registro algebraico carente de significado. Sería plausible dar sentido de un modo "natural" al encuentro de un concepto de "inverso" con el significado cultural de "reciprocidad" en las representaciones estudiantiles, sobre la base de la imagen que refleja el tipo de corporalidad implícita en distintos momentos culturales. Un tercer estudio muestra una concepción de "complejo pseudo concepto" - generalizando el decir de Vygotsky - un complejo formado por una cadena asociativa gráfico-visual y otra cadena que se aprendió en el aula. Estos resultados preliminares muestran representaciones estudiantiles que demandan diseños propios y apropiados para favorecer aprendizajes pendientes en la región.

Bibliografía

Ávila, J. (2003). *Representaciones estudiantiles de variación. Un estudio desde mediaciones pedagógicas.* Proyecto de Tesis. De Maestría, Cicata-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Revista Epsilon, Núm. 42. España.

Cantoral, R. (1997). *Matemática Educativa*. Serie Antologías, N° 1, Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Carrasco, E. (2003).*Visualizando lo que varía*. Proyecto de Tesis de Maestría, Cicata-IPN, México.

Cordero, F. (2001). *La incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en matemática educativa. Una experiencia*. Serie Antologías, N° 1, Clame, Red de Cimates, México.

Díaz, L. (2002). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos Matemáticos.* Dirección de Investigación, UMCE 2002-2003 y Proyecto Fondecyt 2003-2005. Santiago de Chile.

Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Memoria doctoral. Facultad de Educación. PUCCH. 1999. Santiago de Chile.

Echeverría, R. (1986*). El búho de Minerva*. Proyecto Interdisciplinario de Investigación en Educación. Santiago de Chile.

Lakoff, y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From.*. Ed. Basic Books. New York.

Ledesma, F. (2003). *Significatividad de la proporcionalidad inversa en estudiantes del décimo año de escolaridad.* Proyecto de Tesis de Magíster, UMCE, Santiago de Chile

Lizcano, E. (1999). La metáfora como analizador social. Artículo en www.uned.es