La representación de la ausencia por medio de una presencia: El cero

Cecilia Crespo Crespo
Universidad de Buenos Aires. Instituto Superior del Profesorado
"Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires. Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar

Resumen

El pasaje de la unidad al cero, parece ser un paso intelectual sencillo, sólo si no nos detenemos a pensar acerca de las dificultades que involucran su comprensión. Existe una gran complejidad en este paso, tanto desde el punto de vista histórico como conceptual. La percepción de la relación entre el vacío, la nada y la necesidad de representarla no fue históricamente inmediata ni sencilla. La invención del cero estuvo muy lejos de ser evidente. Se propone una breve recorrida por la historia del surgimiento del cero y sus funciones, para lograr hacer más comprensibles las dificultades que presenta la comprensión de este concepto.

Introducción

El cero cumple tres funciones dentro de la matemática (Lizcano, 1993). La primera de ellas identifica la nada como número, con la misma jerarquía que cualquier otro número. La segunda, de carácter formal, consiste en que el cero aparece siguiendo a la unidad en el número que identifica a la base del sistema. Así, en un sistema de base 10, dicha base se escribe como 10 (uno- cero); en un sistema de base 2, dicha base también es el guarismo 10 (uno-cero) y así en cualquier base.La tercera función permite su utilización en un número para identificar la ausencia de cierto orden de unidades.
El vacío es una categoría muy especial: la creación del cero para ocupar el lugar vacío en un número expresado en notación posicional, *permite "significar una ausencia por medio de una presencia"* (Guedj, 1998).
La invención del cero se encuentra unida a la aparición del concepto de la *"nada"*. El hecho de que la aparición histórica del cero se llevara a cabo después de muchos siglos de que el hombre utilizara los números, se halla fuertemente unido a razones filosóficas. En la mente humana el concepto de *"nada"* es difícil de asumir.
El cero fue inventado por los indios e introducido en Occidente por los árabes. Con los indios aparece el cero con sus tres funciones: el lugar vacío en una columna de un número posicional, la nada y el número. *Shunya* es el nombre de la marca del vacío en lengua india: su primera representación fue un pequeño círculo en el vacío. La traducción correspondiente realizada por los árabes fue *sifr*, posteriormente traducido por Fibonacci al latín como *zephirum* (viento), que derivó en *zephiro*: cero. La llegada de esta última cifra; el *sifr,* dio origen a la palabra cifra para designar a toda la colección.

El cero en las distintas culturas

En el hombre primitivo surge el concepto de número a través de situaciones en las cuales en un principio sólo identifica la presencia de cantidades menores y mayores. Luego fue desarrollando la capacidad de contar, de agrupar todo tipo de elementos. también aprendió a valorar, evaluar y medir diversas magnitudes, a concebir y alcanzar números cada vez mayores. Para esto, sin duda, fue necesario desarrollar el pensamiento abstracto.

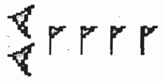
En algún momento alguien tuvo la idea de reemplazar los objetos por piedritas. Después surgió la necesidad de simbolizar estos números, dando paso de esta manera a las cifras.

El cero en Babilonia

Hacia el siglo XVII a.C., el rey acadio Amurabi fundó Babilonia en la región del Asia Occidental denominada Mesopotamia y a partir de entonces se habla de la Cultura Babilónica. Los sumerios sentaron las bases del desarrollo de la matemática en esta región. Han llegado hasta nuestra época muchas tablillas de arcilla, en las que estos pueblos escribían con un estilete cuando la arcilla estaba fresca. Algunas se han conservado, proceden del antiguo imperio babilónico y están datadas entre aproximadamente 1800 a.C. y 1500 a.C. Uno de los rasgos notables de la matemática babilónica fue su sistema de numeración posicional y sexagesimal, o sea en base 60.

Utilizaban dos signos  y 

El primero representaba unidades y el segundo múltiplos de 10.

Por ejemplo  representa 24.

Sin embargo, como cada número se representa en sistema sexagesimal, se trata de un sistema de numeración mixto, donde las posiciones representan potencias de 60;

 representa $24 . 60^1 + 23 . 60^0$

Los babilonios no conocen el valor posicional del cero en un principio, lo cual conducía a ambigüedades en la interpretación de los números. Por ejemplo, el número anteriormente considerado, podía interpretarse, según el contexto como: $24 . 60^2 + 23 .60^0$

Para intentar superar esta dificultad, a veces dejaban un espacio vacío donde faltaba una potencia de 60. En una etapa posterior en el siglo VI a.C., aunque en una fecha que no se conoce con exactitud, los astrónomos y matemáticos babilonios incorporaron un símbolo para representar la omisión de una potencia de 60.

Este símbolo  denominado a veces "*doble clavo*" actúa como el cero en cuanto a su función posicional.

Muchos historiadores opinan que esta era la única función que cumplía el cero babilónico, sin embargo, llegó a ser utilizado por los astrónomos en su función operatoria.

El cero en la matemática china

La historia de la civilización china se desarrolla de manera continua a lo largo de cuatro mil quinientos años.

En cuanto a los sistemas numéricos coexisten cuatro. Los números standard o modernos (utilizados desde el siglo III a.C.), los números oficiales (versión decorativa de los standard), los números comerciales (diseñados en el siglo XVI para escribir rápidamente) y los números con palitos (utilizados en la matemática y demás ciencias).

En el sistema standard, para representar números, los chinos utilizaron un sistema decimal con trece símbolos fundamentales: uno para cada uno de los dígitos no nulos, el 10, el 100 y el 1000. Estos símbolos aún son utilizados en la actualidad. Se trata de un sistema híbrido basado en reglas multiplicativas.

Por ejemplo: Para representar 821, se expresa:

$$8 \times 100 + 20 \times 10 + 1$$

En la notación tradicional, los símbolos se ordenan de arriba hacia abajo, en forma vertical.

Este sistema de numeración no necesita del cero, sin embargo a partir de la dinastía Ming se incorpora un ideograma para identificar ese hueco: el *ling*, que significa *gota de rocío* y que se conserva hasta la actualidad para significar que falta una potencia de 10 en un número. De esta manera si se quiere escribir 801, se encuentra:

 en lugar de 

Este no fue el único sistema de numeración que se usó en China. Allí, como también en Japón y Corea, los matemáticos conocieron bajo el nombre chino *suan zi* y el japonés *sangi,* que significa "*cálculo por medio de fichas",* un sistema decimal posicional de características similares al nuestro, pero con algunas diferencias notables, como la de poseer 9 cifras:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Si se representaría 23, como: II III, se corre el riesgo de confundir dónde empieza el 3 y termina el 2 si no se separan lo suficiente ambas cifras, por lo que comenzaron a intercalarse cifras en distinta posición (vertical y horizontal) para las cifras contiguas de un número. Queda entonces 23 como: ‖≡. Pero aún faltaba solucionar el problema de la ausencia de una potencia de 10, pues simplemente durante mucho tiempo se dejó un hueco entre la cifra anterior. Las operaciones con números así representados se realizan en un tablero en el cual la ausencia de una potencia de diez en un número corresponde a un hueco vacío, denominado *wu*, en el tablero. Ese hueco actúa como un cero. Hacia el siglo XII, se comienza a llenar el hueco con un punto y posteriormente con una pequeña circunferencia.

A través de esta representación, algunos historiadores ven influencias de la matemática india, aunque algunos sostienen la hipótesis de la influencia china en India y otros consideran que ambas invenciones fueron autónomas.

El cero de los mayas

En Centroamérica, la civilización maya alcanzó un gran nivel de desarrollo entre los siglos III y X. Los conocimientos aritméticos de los mayas se conocen a través de códices relacionados con la astronomía y la adivinación. Utilizaron un sistema de numeración mixto. El sistema de numeración maya, posee peculiaridades singulares y notables en América: es posicional y se caracteriza por la presencia y utilización del cero.

En su sistema de numeración más sencillo, heredado de los zapotecas y los olmecas, los símbolos básicos son un punto ●, que representa al 1 y una barra ▬, que representa al 5, símbolos que hacen alusión a un guijarro y a un cayado respectivamente. Con ellos representaban los números de 1 a 19 mediante adición, a través de la colocación de tantas barras y puntos como fuese necesario. Por ejemplo: 17 se escribe como: 

Los diecinueve símbolos así generados, forman a su vez parte de un sistema posicional en el cual se colocan las cifras una abajo de la otra, correspondiendo cada posición a valores veinte veces mayores que la inferior, salvo para la tercera posición, que en vez de corresponder a 20^2, multiplica al número correspondiente por 360. Esta anomalía relacionada con la medición de tiempo, impide hablar de sistema vigesimal y dificultó su operatoria. La incorporación de un tercer símbolo correspondiente al caparazón de caracola marina u ojo  permitía indicar las unidades faltantes. Por ejemplo:

17
2
0
6

representa: $6 \times 20^0 + 0 \times 20^1 + 2 \times 360 \times 20^0 + 17 \times 360 \times 20^1$

La función del cero en un número consiste en identificar la ausencia de cierto orden de unidades, no posee su valor cardinal.

El cero en Egipto

A menudo se ha dicho que el concepto de *cero* no puede encontrarse en el Antiguo Egipto; sin embargo algunos historiadores de la matemática creen ver un antecesor del concepto de cero en el símbolo que aparece a la derecha. Este símbolo era el utilizado para expresar las ideas de belleza completitud y perfección. Los sonidos consonantes de su nombre eran nfr.

símbolo nfr

En los planos para la construcción de los templos, palacios y grandes edificios aparecen líneas niveladoras horizontales para guiar la construcción. Para guiar la construcción de los diferentes niveles que quedarían bajo tierra utilizaban líneas niveladoras como referencia nombradas a partir del "nfr". De la misma manera, es posible encontrar este símbolo en las cuentas contables mensuales de la dinastía 13 del Reino Medio (año 1770 a.C.). En estos registros contables aparecen cuentas con doble entrada con columnas separadas para cada tipo de género. Al final del mes, la cuenta era equilibrada con un saldo igual a cero según puede verse en los símbolos nfr al final de varias columnas.

El cero en la India

Las cifras, en su notación brahmi, de 1 a 9 fueron inventadas en la India hacia el siglo III a.C., pero no aparecía ningún símbolo para el cero ni notación posicional, por lo que se complementaban con símbolos distintos para las sucesivas decenas. Se trataba de un sistema de base decimal aditivo. Esta notación evolucionó en las distintas épocas y regiones de la India, hasta llegar a ser posicional.

El registro escrito más antiguo del símbolo que asociamos con el cero (una pequeña circunferencia), data del año 876 a.C, por lo que se considera que lo conocían con anterioridad. El nombre sánscrito para el cero fue: *shunya*, que significa: vacío. El cero cobró su valor como número significante de la nada y de esta manera pasó a cumplir las tres funciones con que lo conocemos nosotros. Los grafismos utilizados para el cero indio fueron y aún siguen utilizándose: un pequeño círculo o un punto.

El papel de los árabes con respecto al sistema de numeración creado por los indios, se concentra en la difusión de estos conocimientos. Tras la conquista árabe, llega a Bagdag una misión diplomática india en 773. Los sabios árabes reconocieron el valor de la numeración india y la incorporaron a su bagaje intelectual. En obras árabes de la época comienzan a aparecer referencias a los números indios. Su uso se introduce a partir de entonces en Occidente, dando origen siglos después a una democratización del cálculo.

La aceptación en Occidente del sistema de numeración utilizado por los indios no fue inmediata. Llama la atención el lento proceso de consolidación del sistema numérico vigente: los primeros números escritos de los que se tiene constancia datan de hace unos 5000 años; recién en el 628, Brahmagupta hace aparecer en una de sus obras el sistema de numeración decimal como acabado; y este sistema fue plenamente aceptado en Europa después de la Revolución Francesa.

El cero, ¿es natural?

Algunas propiedades del cero son fácilmente determinables, por ejemplo, para contestar a la pregunta de si el cero es par o no, basta con tomar la definición de entero par y comprobar que el cero verifica es definición. Pero otras propiedades no son tan fáciles de definir. Algunos textos y docentes identifican al cero como número natural, otros no. Estos últimos consideran al uno como el primer número natural. ¿Cuáles están equivocados? ¡Ninguno! Se trata simplemente de una convención.

Quienes defienden la posición de que el cero no es un número natural, se basan en las dificultades que ocasiona la comprensión del concepto de cero. Históricamente, el primer conjunto numérico que la humanidad manejó independiente de la cultura fueron los números naturales utilizados para contar. En un principio estableció una relación uno a uno con pequeñas piedras y los objetos poseídos (animales) que quería representar. Luego representó con cuñas grabadas en tableros de arcilla como en el caso de los babilonios o con nudos en una cuerda como en los quipus utilizados por las culturas precolombinas. Casi todas las civilizaciones hace 2000 años manejaban los números naturales. Este conjunto numérico es el primero que todo ser humano maneja. Observemos como los niños en su primer acercamiento semiótico a las matemáticas lo hacen con las expresiones uno, dos, tres,... Nunca escuchamos un niño pequeño diciendo menos uno, tres cuartos, etc. Ellos están contando objetos. El aprendizaje de la idea de "nada" es dificultoso para ellos. En este acto de contar no aparece el cero.

Pero con estos números no se tomaban en cuenta todas las circunstancias de la realidad como por ejemplo, la situación de un préstamo o pérdida de un animal; no podía tirar la piedra porque el animal no había muerto, pues solo estaba en otro lugar, y no podía dejarla dentro de la bolsa, puesto que lo confundiría al momento del recuento. Este simple hecho le costó a la humanidad algunos siglos de trabajo, hasta llegar a construir los números negativos. Estos números sólo llegan a ser interiorizados por los niños entre los 11, 12 años.

Por otra parte quienes adhieren a la consideración del cero como natural, están pensando en los sistemas de numeración posicionales. Los símbolos que se utilizan en un sistema de numeración de cierta base son los dígitos desde cero hasta el valor de la base menos uno. Si se comienza desde el 0 y se le va sumando 1 sucesivamente, obtendremos todos los números naturales. Las definiciones formales de los números naturales, debidas a Bertrand Russell y a Giuseppe Peano , datan de fines del siglo XIX y principios del XX, y son estas definiciones las que fundamentan la consideración del cero como natural.

La construcción epistemológica de este elemento ha tenido sus dificultades y rupturas, es por eso que generalmente su aprendizaje presenta dificultades. De esta manera, ninguna de las dos respuestas acerca de si el cero es o no natural es incorrecta. Se trata de una convención. Cada respuesta tiene una fundamentación válida.

Una visión socioepistemológica de la aparición del cero

Algunas investigaciones afirman que *"el conocimiento matemático, aún aquel que consideramos avanzado tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas"* (Cantoral, 2001). Bajo tal óptica, la construcción social del conocimiento se articula a través de cuatro componentes fundamentales: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y los modos de transmisión por medio de la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido llamada: acercamiento socioepistemológico.

El cero fue inventado en aquellos escenarios socioculturales en los que el imaginario colectivo y el tratamiento que éste hacía de las representaciones de ausencia, el vacío y las transiciones entre estados contiguos permitió la elaboración del cero como una representación dinámica particular.

En resumen, lo que se pretende bajo esta óptica, es mostrar, con esta presentación, cómo las matemáticas tienen en su construcción rupturas e inconsistencias, que han costado mucho esfuerzo teórico solucionarlas y que a su vez estas rupturas generan dificultades de aprendizaje en los individuos que pretenden aprenderlas y más aún cuando no se presentan los contenidos matemáticos de una manera gradual, secuencial y correlacionada, desconociendo las capacidades, necesidades y ritmo de aprendizaje de los individuos.

En el caso de los mayas, una característica de la mitología existente consistió en la ausencia de la dicotomía bien-mal. Se trató de una sociedad con fundamentos politeístas, con la existencia de divinidades en las que convergía el bien y el mal. El dios de la lluvia, también lo era de la fertilidad; representaba la vida, a través del agua, pero también la muerte, por medio de las inundaciones; tenía el poder de hacer nacer y de destruir. En Occidente, por el contrario se atribuía a Dios el bien y al demonio el mal.

Algo similar ocurrió en la India. El hecho de que fuera posible representar en lo divino la transición, permitió que la idea de nada pudiera ser simbolizada. El nombre dado por los indios al cero significó no sólo el vacío o la ausencia. La palabra *shunya* no fue inventada especialmente para la aritmética. Desde la antigüedad designaba el vacío; éste constituía una idea central en la filosofía mística budista, junto con las nociones de existencia y de pensamiento. El concepto de vacío fue muy estudiado y analizado en la India. Por esta causa, el cero, con todas sus funciones encontró campo fértil para su aparición. No fue *shunya* la única palabra utilizada para mencionar al cero. También se utilizó *bindu*, que significa "punto", en relación a su representación escrita.

En la India, la utilización del cero no sólo se restringió a la aritmética. Su incorporación en la cultura fue tan completa que trascendió a la literatura y la poesía. Aparecen textos en sánscrito en los que el término *shunya-bindu* es empleado a través de bellas referencias metafóricas. En el *Vasavadatta*, el poeta Subandhu, en el siglo VII, escribió:

"En el momento en que salía la Luna
y la noche se hacía menos oscura
era como si las estrellas, con los brazos cruzados
como lotos azules aún cerrados,
hubieran comenzado a su vez a brillar como
ceros (shunya-bindu) en el firmamento

Diseminadas en el espacio
por la vacuidad del Samsara
Dispersas en el azul oscuro
que recubre la piel del creador
quien ha calculado su número
sirviéndose de la Luna como tiza".

Referencias bibliográficas

Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Volumen 14. (pp. 64-75). México: Iberoamericana.

Crespo, C. (2002). El Cero: la representación de la presencia de la ausencia. En *Elementos de matemática*, Vol. XVII, nº 64. (pp. 14-20). Buenos Aires: CAECE.

Gheverghese J., G. (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Pirámide.

Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones Grupo Zeta.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras.* Madrid: Espasa Calpe.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Barcelona: Gedisa.

Russell, B. (1969). Definición de número. En Newman, James (Ed.), *Sigma, el mundo de la matemática.* Vol. 4. (pp.129-135). Barcelona: Grijalbo.

Zubieta, F. (1995). Los fundamentos de la aritmética según Peano. En *Mathesis* 11. nº 4 (pp. 371-382). México: UNAM.