

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA



**Departamento de Didáctica de la Matemática,
de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales**

TESIS DOCTORAL

**DIAGNÓSTICO Y EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN
DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO.
EL CASO DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA
LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES**

Jesús Gallardo Romero

Málaga, 2004

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA



**Departamento de Didáctica de la Matemática,
de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales**

**DIAGNÓSTICO Y EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN
DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO.
EL CASO DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA
LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES**

Tesis Doctoral presentada por
D. JESÚS GALLARDO ROMERO

Bajo la dirección de
DR. D. JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MARÍ

Málaga, 2004

AGRADECIMIENTOS

En el proceso de elaboración de esta Tesis Doctoral han influido, de un modo u otro, determinadas personas a las que deseo expresar desde estas líneas mi más sincero agradecimiento:

Ante todo a mi Director de Tesis, Dr. D. José Luis González Marí, por proponerme un tema de investigación interesante y fructífero, y sin cuya ayuda este trabajo no hubiera sido posible.

Al profesor Dr. D. Alfonso Ortiz Comas, de la Universidad de Málaga, a quien debo buena parte de mi formación como investigador en Didáctica de la Matemática.

Al profesor Dr. D. Bernardo Gómez Alfonso, de la Universidad de Valencia, por sus valiosos comentarios y críticas realizados en las fases iniciales de la investigación.

A los profesores que tuvieron la gentileza de colaborar en la consulta a expertos realizada durante la investigación.

A mis compañeros de Doctorado, por sus continuas muestras de apoyo y ánimo.

A los miembros del grupo de Investigación en Pensamiento Numérico que propusieron cuestiones relevantes y sugerencias de interés en todas aquellas ocasiones en las que se presentaron los avances de la investigación.

A mis colegas profesores de los distintos Centros en los que se ha desarrollado la fase empírica de la investigación, por las facilidades dadas en todo momento.

A los alumnos participantes en las distintas experiencias empíricas, por su valentía y generosidad.

Finalmente, a los profesores D. Jorge Rodríguez-Piñero Fernández y D^a. Gabrielle Frisch d'Adhemar, quienes me acercaron a la Educación Matemática a través de la cooperación internacional. Gracias por confiar en mí.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1	Introducción	1
1.2	Origen y racionalidad	2
1.2.1	El fenómeno de la comprensión	2
1.2.2	Cálculo Aritmético Elemental	5
1.3	Descripción general	6
1.3.1	Área problemática	6
1.3.2	Problema específico	7
1.4	Principios y Fundamentos	8
1.4.1	Generales	8
1.4.2	Específicos	9
1.4.3	Antecedentes y fuentes consultadas	10
1.5	Definición formal	13
1.5.1	Objetivos	13
1.5.1.1	Objetivo general	14
1.5.1.2	Objetivos específicos	14
1.5.1.3	Objetivos complementarios	15
1.5.2	Hipótesis	15
1.5.3	Fases del estudio y desarrollo temporal	16
1.5.4	Metodología	18
1.5.4.1	Metodología de la fase teórica	19
1.5.4.2	Metodología de la fase empírica	20
1.6	Algunas características de la investigación	22
1.6.1	Generales	22
1.6.2	En torno a la calidad	22

CAPÍTULO II

**ANTECEDENTES (I):
COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO,
SU DIAGNÓSTICO Y EVALUACIÓN**

2.1	Introducción	25
2.2	Estructura, organización y exposición de los antecedentes	25
2.3	La noción de comprensión	26
2.3.1	La noción de comprensión en Filosofía y Sociología del conocimiento	27
2.3.1.1	Fuentes consultadas	27
2.3.1.2	Principales aportaciones	27
2.3.1.2.1	Dimensión metodológica	27
2.3.1.2.2	Dimensión histórico-ontológica	31
2.3.1.2.3	Aportaciones de Wittgenstein	32
2.3.2	Perspectiva Epistemológica	34
2.3.2.1	Fuentes consultadas	34
2.3.2.2	Principales aportaciones	34
2.3.3	Perspectiva Psicológica	37
2.3.3.1	Fuentes consultadas	37
2.3.3.2	Principales aportaciones	37
2.3.4	Otros enfoques y aportaciones	41
2.4	La noción de comprensión del conocimiento matemático	41
2.4.1	Organización de los antecedentes y fuentes consultadas	41
2.4.2	Consideraciones preliminares	43
2.4.2.1	La comprensión: objetivo fundamental en la Educación Matemática	43
2.4.2.2	Evolución histórica de los estudios sobre comprensión del conocimiento matemático	44
2.4.2.3	Tipos de investigaciones	45
2.4.3	Aproximaciones al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático	45
2.4.3.1	La posición representacionista	45
2.4.3.2	La aproximación histórico-empírica de Sierpiska (1990,1994)	48
2.4.3.3	El modelo recursivo de Pirie y Kieren (1989,1994)	50
2.4.3.4	Significado y comprensión	51
2.4.3.5	Modelo de proceso	52
2.4.3.6	Otras caracterizaciones	53
2.4.4	Nociones vinculadas a la comprensión del conocimiento matemático	54
2.4.4.1	Comprensión y significado	54
2.4.4.2	Comprensión y aprendizaje	55
2.4.4.3	Comprensión y enseñanza	55
2.4.4.4	Comprensión y memoria	57
2.4.4.5	Comprensión y conocimiento	58
2.4.4.6	Comprensión y obstáculo epistemológico	58
2.4.4.7	Comprensión e imagen	58
2.4.4.8	Comprensión y destreza algorítmica	58
2.4.4.9	Comprensión y explicación	59

2.4.4.10 Comprensión y tipos de conocimiento	59
2.5 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático	61
2.5.1 Fuentes consultadas	61
2.5.2 Principales aportaciones	62
2.5.2.1 Modos y términos en los que valorar la comprensión	62
2.5.2.2 Métodos, técnicas e instrumentos para evaluar la comprensión	63
2.5.3 Dificultades y limitaciones	67
2.5.3.1 La naturaleza relativa de la evaluación	67
2.5.3.2 El problema de la interpretación en la evaluación	67
2.5.3.3 Complejidad y otras limitaciones	68

CAPÍTULO III

ANTECEDENTES (II): ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS ALGORITMOS Y EL CÁLCULO ARITMÉTICO ELEMENTALES

3.1 Introducción	71
3.2 Algoritmos y procesos algorítmicos	72
3.2.1 La noción de algoritmo	72
3.2.2 Procesos algorítmicos y heurísticos	73
3.3 Enseñanza de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales	75
3.3.1 Fuentes consultadas	76
3.3.2 Los algoritmos en el currículum: una polémica aún vigente	77
3.3.3 Enseñanza de los algoritmos estándar. Distintas aproximaciones	80
3.3.4 Enfoques de enseñanza no tradicionales	83
3.3.4.1 Algoritmos escritos alternativos	83
3.3.4.2 Invención y desarrollo de algoritmos	84
3.3.5 Aproximaciones integradoras	87
3.4 Aprendizaje y comprensión de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales	89
3.4.1 Fuentes consultadas	89
3.4.2 Razonamiento y pensamiento algorítmico	90
3.4.3 Errores en cálculo aritmético	90
3.4.4 Aritmética cognitiva	92
3.4.5 Tareas y situaciones matemáticas	93
3.4.6 Algunos factores y condicionantes	93
3.5 Conclusiones de interés para la investigación	95

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DIDÁCTICO

4.1 Introducción	97
4.2 Consideraciones generales sobre el Análisis Didáctico	98

4.3 Aplicación al problema de investigación	99
4.4 Conclusiones generales	100
4.5 Comprensión del conocimiento matemático: discusión y resultados	102
4.5.1 Complejidad y especificidad	102
4.5.2 Estudios y modelos	105
4.5.2.1 Naturaleza de los estudios	105
4.5.2.2 Una clasificación general	106
4.5.2.3 Discusión y crítica de los principales modelos	107
4.6 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: discusión y resultados	112
4.6.1 Observación y recogida de datos	112
4.6.1.1 Manifestaciones externas	112
4.6.1.2 Complementariedad actuar-expresar	113
4.6.2 Interpretación y valoración de acciones	114
4.6.2.1 Limitaciones	114
4.6.2.2 Relatividad de la valoración	114
4.6.2.3 Valoración y representación	115
4.6.2.4 Valoración y desarrollo	116
4.6.3 Fundamentación del diagnóstico	116
4.6.3.1 La elección de situaciones problema	117
4.6.3.2 Necesidad de la fundamentación epistemológica y fenomenológica	117
4.7 Comprensión y cálculo aritmético elemental	119
4.8 Consecuencias para la investigación	121
4.8.1 Comprensión del conocimiento matemático	121
4.8.2 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático	124
4.8.3 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales	127

CAPÍTULO V

UNA APROXIMACIÓN OPERATIVA AL DIAGNÓSTICO Y LA EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

5.1 Introducción	129
5.2 Fundamentos y principios	130
5.2.1 Cognición	131
5.2.2 Matemáticas	132
5.2.3 Comprensión	133
5.2.3.1 Aproximación general	133
5.2.3.2 Origen y fuentes	134
5.2.3.3 Naturaleza y funcionamiento	135
5.2.3.4 Factores	135
5.2.3.5 Evolución	136
5.2.3.6 Efectos y resultados	137

5.2.4	Diagnóstico y evaluación de la comprensión	137
5.3	Responder adecuadamente es un síntoma de comprensión: un modelo para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático	138
5.3.1	Descripción general	138
5.3.2	Configuración de la estrategia	140
5.3.3	El papel del error	141
5.3.4	Principales características	141
5.4	El problema de la determinación y clasificación de situaciones	144
5.4.1	Una posible solución	145
5.4.2	Análisis epistemológico	146
5.4.3	Análisis fenomenológico	147
5.4.3.1	Posicionamiento respecto a Freudenthal (1983)	147
5.4.3.2	Posicionamiento respecto a Puig (1997)	149
5.4.4	Fuentes del análisis	150
5.4.5	La noción de conjunto situacional, genérico y personal	151
5.4.6	Dificultades del análisis epistemológico y fenomenológico	155
5.5	Resumen	157

CAPÍTULO VI

COMPRENSIÓN DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES: ESTUDIO TEÓRICO

6.1	Introducción	159
6.2	Justificación de la elección del algoritmo	159
6.3	Análisis Epistemológico y Fenomenológico: proceso, fuentes y resultados	161
6.3.1	Proceso seguido	161
6.3.2	Fuentes consultadas	162
6.3.3	Resultados.....	164
6.3.3.1	Muestra inicial de situaciones	164
6.3.3.2	Clasificación situacional inicial	165
6.3.3.3	Consulta a expertos: resultados y conclusiones	166
6.4	Estructuras del algoritmo de multiplicar	167
6.4.1	Estructura epistemológica	167
6.4.2	Estructura fenomenológica	170
6.5	Criterios clasificatorios y categorías de situaciones	172
6.5.1	Categorías epistemológicas	172
6.5.2	Categorías fenomenológicas	174
6.6	Dificultades y limitaciones	176
6.7	Resumen y conclusiones para la investigación	178
6.7.1	Cuestiones abiertas	178
6.7.2	Conexión con la fase empírica	179

CAPÍTULO VII

ESTUDIOS EXPLORATORIOS

7.1	Introducción	181
7.2	Primer Estudio Exploratorio	183
7.2.1	Fase teórica	183
7.2.2	Fase empírica	184
7.2.2.1	Instrumento de recogida de datos	184
7.2.2.2	Muestra	184
7.2.2.3	Resultados y conclusiones	184
7.3	Segundo Estudio Exploratorio	187
7.3.1	Objetivos	187
7.3.2	Elementos del diseño	188
7.3.2.1	Metodología	188
7.3.2.2	Muestra	188
7.3.2.3	Instrumento de recogida de datos	189
7.3.3	Desarrollo de las entrevistas	196
7.3.3.1	Consideraciones generales	196
7.3.3.2	Descripción del proceso	197
7.3.3.3	Resumen de modificaciones	202
7.3.3.4	Dificultades e incidencias	202
7.3.4	Resultados y conclusiones	203
7.3.4.1	Sobre las categorías	203
7.3.4.2	Sobre las situaciones	209
7.3.4.3	Sobre las respuestas y su interpretación	218
7.3.4.4	Sobre la metodología	227
7.3.4.5	Sobre los objetivos y las hipótesis de investigación	228
7.4	Consecuencias para la investigación	229

CAPÍTULO VIII

SEGUNDO ESTUDIO EMPÍRICO

8.1	Introducción	233
8.2	Propósito del estudio	234
8.3	Metodología	235
8.4	Elección y composición de la muestra	236
8.5	Instrumentos de recogida de datos	236
8.5.1	Cuestionario	237
8.5.1.1	Estructura y contenido	239
8.5.1.2	Formato y presentación	243
8.5.2	Entrevista	243
8.6	Análisis de respuestas: criterios y categorías	246
8.6.1	Esquema general	246

8.6.2 Usos y ejemplos de respuestas representativas	247
8.6.3 Respuestas de la muestra	261
8.6.4 Interpretación de las respuestas en términos de comprensión	263
8.6.4.1 Comprensión Fundamental	263
8.6.4.2 Comprensión Extendida	265
8.6.4.3 Consideraciones adicionales sobre la interpretación	265
8.7 Resultados y conclusiones	266
8.7.1 Comprensión del algoritmo de multiplicar	267
8.7.1.1 Perfiles de comprensión	267
8.7.1.2 Otros resultados y conclusiones	271
8.7.2 Comprensión del conocimiento matemático	277
8.8 Logros del estudio empírico	280

CAPÍTULO IX

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

9.1 Introducción	283
9.2 El problema de investigación	284
9.3 Resultados y conclusiones	287
9.3.1 Antecedentes	287
9.3.2 Análisis Didáctico	288
9.3.3 Comprensión del conocimiento matemático	291
9.3.4 Algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales: análisis de situaciones para el diagnóstico de la comprensión	293
9.3.5 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales	295
9.4 Logros y hallazgos	297
9.4.1 Específicos	297
9.4.2 Generales	300
9.5 Perspectivas futuras	301
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	303

ANEXOS

Anexo I. Consulta a Expertos	317
A.1.1 Introducción	317
A.1.2 Documento para la discusión	317
A.1.3 Respuestas recibidas	321
A.1.4 Análisis de la información recopilada	328

Anexo II. Segundo Estudio Exploratorio	341
A.2.1 Introducción	341
A.2.2 Transcripción de las entrevistas del segundo estudio exploratorio	341
A.2.2.1 Primer bloque de entrevistas	341
A.2.2.2 Segundo bloque de entrevistas	356
A.2.2.3 Tercer bloque de entrevistas	371
Anexo III. Segundo Estudio Empírico	395
A.3.1 Introducción	395
A.3.2 Transcripción de entrevistas	395

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

En el presente informe se exponen los aspectos fundamentales de una investigación realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga, dirigida a clarificar algunas cuestiones relacionadas con la comprensión del conocimiento matemático, su diagnóstico y evaluación. Para ello, se procede a la construcción y aplicación de una propuesta teórico-metodológica que trata de interpretar, organizar e integrar el conjunto de conocimientos existentes en la actualidad y sentar las bases de un marco operativo útil y fiable para afrontar los problemas teórico-prácticos relacionados con la comprensión de conocimientos matemáticos específicos. La parte más concreta del estudio consiste en la aplicación de dicha propuesta o modelo teórico general y de un procedimiento metodológico establecido al caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales; un conocimiento aritmético cuya elección ha estado motivada, como se verá más adelante, por cuestiones de tipo curricular.

La aproximación que se presenta posee una importante componente teórica al tiempo que exige la puesta en práctica de algunos de sus planteamientos, por lo que una parte relevante de la investigación se dedica al desarrollo de varios estudios empíricos con distintos propósitos. A su vez, cobran especial importancia los siguientes aspectos: el análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático, el estudio del conjunto de situaciones, tareas y problemas asociado a un conocimiento matemático, la observación de la comprensión y de la utilización del conocimiento por parte del individuo, la elaboración de instrumentos adecuados para ello y la determinación de perfiles de comprensión ajustados a la realidad. Por último, como se podrá apreciar a lo largo de la exposición de los distintos capítulos, una de las características destacables de la aproximación establecida es la posibilidad de su aplicación a conocimientos matemáticos diferentes, lo que permite obtener información de interés sobre aspectos particulares y generales de la comprensión al mismo tiempo que se produce la ampliación y consolidación teórica y metodológica de la propia aproximación.

En este capítulo se expone, a modo de síntesis e introducción de la memoria, una visión general del problema de investigación, comenzando con el origen del mismo y siguiendo con la delimitación del área problemática y la formulación de los aspectos concretos que se van a investigar. Seguidamente, se presenta la caracterización formal, en términos de objetivos e hipótesis de investigación, y se incluyen referencias sobre las distintas fases del estudio y la metodología empleada en cada una de ellas. Para terminar, se exponen algunas reflexiones en torno a la calidad y a otras características relevantes de la investigación desarrollada.

1.2 Origen y racionalidad

El origen del estudio se puede considerar netamente curricular, no sólo por la existencia, ampliamente contrastada en numerosas investigaciones previas, de una situación problemática en la enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental, sobre todo en lo que respecta a los procedimientos algorítmicos¹, sino también porque se observan importantes limitaciones en la comprensión del conocimiento matemático de los estudiantes de todos los niveles educativos.

En consecuencia, el problema de investigación surge de una doble preocupación o de un doble núcleo de interés dentro del campo de la investigación en Educación Matemática. Por una parte, la importancia y necesidad de clarificar y poner un cierto orden en el conjunto de problemas y dificultades reconocidas en distintas áreas de conocimiento en torno al fenómeno de la comprensión y, especialmente, de la comprensión del conocimiento matemático. Por otra, la importancia y necesidad de mejorar significativamente la situación actual en la que se encuentra el campo del Cálculo Aritmético Elemental en relación con los problemas derivados de la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos estándar escritos para las operaciones aritméticas elementales. Ambos centros de interés se abordan conjuntamente en la presente investigación hasta donde se ha considerado oportuno para disponer de una base de conocimientos que permita afrontar con garantías el desarrollo futuro de la línea de investigación. El punto de partida lo constituyen, como es habitual, las cuestiones, interrogantes y problemas tradicionalmente reconocidos en ambas áreas y de los que a continuación se indican algunos de ellos a título de ejemplo. Dichos interrogantes justifican, por sí solos, la necesidad y pertinencia de la realización del estudio que presentamos.

1.2.1 El fenómeno de la comprensión

El interés por garantizar un aprendizaje de la matemática de calidad, mediante el desarrollo de una enseñanza que favorezca la comprensión, constituye una constante en el ámbito de la Educación Matemática. Este interés llega incluso a reflejarse en las normativas curriculares oficiales bajo argumentaciones de distinto tipo. A modo de ejemplo, los Decretos 105/1992 y 106/1992, por los que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria y Secundaria Obligatoria en el ámbito de la comunidad andaluza, afirman lo siguiente al referirse al área de matemáticas: “[...] se opta por una matemática comprensiva, amplia, cognitiva y procedimental, que ofrezca vías y claves para responder a los interrogantes planteados y faculte para actuar sobre el medio y comprenderlo”.

La preocupación por la comprensión alcanza también a la investigación en Didáctica de la Matemática, influyendo ampliamente en su contenido y desarrollo (Hiebert y Carpenter, 1992), si bien tal interés no ha conseguido hasta ahora mejorar significativamente la situación en la que se encuentran los conocimientos correspondientes. De hecho, tal y como se pone de manifiesto en la presente investigación, los avances producidos hasta el momento no se corresponden con los esfuerzos dedicados a su estudio, quedando al descubierto la insuficiencia y las limitaciones de las aproximaciones más recientes.

En la actualidad, existen numerosas cuestiones relacionadas con la comprensión que son fuente de estudio así como de continua discusión entre los autores y para las que

¹ Los detalles de esta problemática se exponen en el capítulo III.

aún no se han encontrado respuestas concretas satisfactorias y definitivas. La mayoría de ellas no son exclusivas de la Didáctica de la Matemática, sino que surgen también en otras áreas de conocimiento. Estas cuestiones, que se refieren a aspectos de la comprensión tales como su naturaleza, funcionamiento, factores, evolución, valoración o fomento, entre otros, pueden considerarse como referentes que impulsan el desarrollo de esta investigación. Veamos a continuación una muestra de tales cuestiones, enunciadas en forma de interrogantes y agrupadas por el tema tratado y la perspectiva desde la que se plantean; como se puede comprobar, algunas de ellas han sido el centro de reflexión de numerosos estudios previos:

A. La comprensión como fenómeno cognitivo

1. Naturaleza y funcionamiento

- ¿Qué es comprender?
- ¿Es la comprensión un acto momentáneo, un estado cognitivo, una experiencia emocional, un proceso intelectual o una forma de conocer?
- ¿Cómo se produce la comprensión? ¿Cómo llegamos a comprender?
- ¿Cuáles son las relaciones entre comprender y conocer, entender, concebir, intuir o explicar, entre otras nociones?
- ¿Qué enlaces se establecen entre la comprensión, el almacenamiento en memoria y la recuperación del conocimiento?
- ¿La comprensión de un concepto, de un texto, de una actividad humana y sus productos, son entidades diferentes o sólo son casos especiales de la idea general de comprensión?
- ¿Existe algún motivo para identificar la comprensión como un modo de pensamiento proposicional? ¿Toda comprensión lleva consigo o exige una argumentación? ¿Es posible la comprensión sin representaciones?
- ¿Qué relación existe entre la comprensión de un conocimiento matemático específico y las destrezas cognitivas generales que posee un sujeto? ¿Cómo influyen estas últimas en la valoración de la comprensión?
- ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada conocimiento matemático?

2. Factores

- ¿De qué factores depende la comprensión?
- ¿La comprensión de un objeto matemático por un sujeto está influenciada por la idea de comprensión sostenida en el entorno donde se desenvuelve?
- ¿Un alumno comprende sólo si sus significados de los objetos matemáticos concuerdan con los establecidos institucionalmente en la escuela?
- ¿Cuáles son las circunstancias (Wittgenstein, 1988) que justifican los efectos visibles de la comprensión?

3. Evolución

- ¿Existe un último nivel de comprensión?
- ¿Tiene sentido hablar de una comprensión absoluta (completa) o, por el contrario, hay que considerarlo un fenómeno de carácter relativo (siempre mejorable)?

- ¿Se puede perder la comprensión matemática o, al menos, cabe la posibilidad de una regresión en la comprensión?
- ¿Hay niveles, grados o más bien tipos de comprensión?

4. Valoración

- ¿Puede ser valorada la comprensión? ¿Cómo? ¿Hasta qué punto, esto es, con qué limitaciones?
- ¿Deberíamos aceptar que nunca vamos a poder determinar la comprensión de un sujeto con total precisión y garantía de verdad? ¿Qué requisitos se deberían cumplir para lograr una valoración exacta y veraz? ¿Es esto posible?
- ¿Es factible afrontar con garantía el estudio de la comprensión de un modo directo, sin necesidad de acudir a las evidencias externas?
- ¿Cómo se pueden valorar las representaciones que los alumnos construyen en su mente? ¿Cómo se podría observar desde una posición externa al sujeto la construcción de las relaciones internas que tiene lugar en su mente? ¿Se puede conocer con certeza la naturaleza de unas reflexiones que acontecen en la esfera de lo privado?
- ¿Lo observable en los individuos, esto es, los indicadores de evidencia externa, son suficientes para realizar enunciados precisos sobre habilidades, capacidades, estructuras y organizaciones *mentales*? Más aún, ¿hasta qué punto podemos estar seguros de que la comprensión, considerada como fenómeno mental interno, es valorable y evaluable?
- ¿Al valorar la comprensión no se estará juzgando el grado de ajuste con una referencia cognitiva establecida de antemano por agentes externos como, por ejemplo, el profesor de aula?
- ¿En la valoración de la comprensión se tienen en cuenta las particularidades del conocimiento matemático considerado? Si es así, ¿qué papel desempeña el conocimiento matemático en esa valoración?
- ¿Hasta qué punto se ajustarán a la realidad las valoraciones que hagamos sobre la comprensión de los sujetos a partir de los datos externos obtenidos de los distintos instrumentos empleados para la recogida de información? ¿Hasta qué punto esas valoraciones van a proporcionar una información diagnóstica útil y válida?
- ¿Cuáles son los instrumentos idóneos para afrontar la valoración de la comprensión del conocimiento matemático? Por ejemplo, ¿pueden las cuestiones escritas discriminar a los sujetos en cuanto a su comprensión?

5. Fomento

- ¿Se puede transmitir la comprensión? ¿Se puede favorecer? ¿Se puede estimular? ¿Cómo?
- ¿Cómo pueden justificarse y evaluarse nuestras pretensiones de comprensión?
- ¿De qué modo se puede lograr una comprensión considerada eficiente?

B. La comprensión como objeto de estudio

- ¿Cuándo y cómo podremos garantizar la validez de un modelo teórico para la comprensión?
- ¿Es necesario desarrollar una teoría sobre los procesos mentales para estudiar el fenómeno de la comprensión? ¿Resulta indispensable formular hipótesis de carácter mentalista para poder explicar las diferencias existentes en las conductas de los alumnos en cuanto a comprensión?

- En lo que respecta a las teorías que proponen y desarrollan niveles de comprensión: ¿cada conocimiento matemático admite los mismos niveles de comprensión o, por el contrario, cabe la posibilidad de que se den niveles específicos? ¿Los tipos que se proponen son suficientes para cubrir todo el espectro comprensivo de un conocimiento matemático?

1.2.2 Cálculo Aritmético Elemental

Al margen de la problemática en torno a la comprensión como fenómeno de interés general para la Didáctica de la Matemática, detectamos también dificultades importantes en el campo específico del Cálculo Aritmético Elemental, sobre todo en lo que respecta a la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos de cálculo correspondientes a las cuatro operaciones aritméticas elementales. Se trata de un área de investigación activa donde las polémicas son frecuentes y en la que todavía quedan pendientes numerosos problemas por resolver, a pesar de los avances producidos y los logros alcanzados. Entre las cuestiones abiertas, didácticas y cognitivas, podemos enunciar las siguientes:

Cuestiones didácticas

- ¿Existe alguna razón para que los alumnos deban aprender los algoritmos estándar de columnas?

- ¿Qué método de cálculo sería el más adecuado para cada operación aritmética básica?

- Si la estrategia consiste en reconstruir los algoritmos estándar de lápiz y papel, ¿qué grado de formalización debería garantizarse?

- En relación con los procedimientos de cálculo, ¿qué secuencias didácticas tienen en cuenta las limitaciones de los alumnos con menos capacidades cognitivas y de aprendizaje y, al mismo tiempo, desarrollan las potencialidades de los más aventajados?

- ¿Qué tipo de enseñanza y qué medios de aprendizaje se pueden elaborar para que los sujetos lleguen a establecer con precisión dónde, cuándo y cómo usar los distintos algoritmos de cálculo elemental existentes?

Estas cuestiones las consideramos dependientes de las siguientes:

Cuestiones cognitivas

- ¿Qué tipo de comprensión de los algoritmos estándar escritos se les debe exigir a los estudiantes?

- ¿Las diferencias de comprensión existentes entre los sujetos respecto a los algoritmos de cálculo elemental quedan suficientemente explicadas haciendo referencia a la clásica diferenciación entre lo procedimental y lo conceptual?

- ¿La comprensión de un procedimiento matemático como el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales garantiza la ausencia de errores al emplearlo de forma procedimental?

- ¿Qué interpretación posee en términos de comprensión el uso procedimental eficiente de un procedimiento de cálculo?

- ¿Qué procesos cognitivos intervienen cuando se emplea un procedimiento de cálculo aritmético?

- ¿Cómo reconciliar la disminución del énfasis que las reformas educativas actuales dan a los procesos algorítmicos y al cálculo aislado con el hecho de que el pensamiento

algorítmico proporcione elementos que favorecen el desarrollo matemático y la comprensión?

En resumen, el origen de la presente investigación se encuentra en todas las cuestiones anteriores y las derivadas de ellas, tanto las referidas al fenómeno de la comprensión como al cálculo aritmético elemental. Por la profundidad y extensión de los problemas expuestos, resulta obvio mencionar que el propósito del estudio no es el de procurar una respuesta satisfactoria a cada una de dichas cuestiones. Tan sólo pretendemos proporcionar algunos resultados de interés y llegar a algunas conclusiones con las que contribuir a la mejora de la situación actual en ambos ámbitos de investigación.

1.3 Descripción general

En los apartados que siguen se incluye una breve descripción del área problemática y del problema de investigación como primera aproximación a la definición formal que se desarrolla en el apartado 1.5 del presente capítulo.

1.3.1 Área problemática

La línea-marco general en la que se sitúa el problema de investigación se articula, por un lado, en torno a la comprensión del conocimiento matemático y a los medios para diagnosticar y evaluar el razonamiento y la comprensión así como su evolución por niveles y edades (González y Ortiz, 2000; González, 2001²) y, por otro, a las bases conceptuales adoptadas por el grupo de investigación Pensamiento Numérico (Castro et al., 1997), las cuales, como se explica en el apartado 1.4, sirven de referencia para posicionar el estudio dentro de la misma línea de trabajo.

Con la investigación se pretende obtener información sobre el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático y sobre los medios y criterios adecuados para su diagnóstico y evaluación; un tema de interés y un campo de estudio en Educación Matemática en el que se han realizado aportes significativos pero donde aún quedan numerosas cuestiones pendientes. Se trata, por tanto, de un campo de investigación abierto, del que podemos decir que se encuentra aún en una fase inicial de desarrollo, a pesar de los trabajos realizados, y en el que se requieren esfuerzos integradores dirigidos a sistematizar los logros obtenidos así como aportar vías alternativas de aproximación. Asimismo, es un campo de especial importancia, por cuanto puede proporcionar resultados y conclusiones de enorme relevancia para otros ámbitos de estudio en Educación Matemática.

Además de la comprensión del conocimiento matemático, su diagnóstico y evaluación, como el principal eje vertebrador del trabajo, se ha dirigido la atención hacia un conocimiento matemático específico como es el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Por tanto, también se han abordado en el estudio algunos problemas de interés del campo del cálculo aritmético elemental, lo que nos conduce a establecer una segunda delimitación para el área de estudio cuyas relaciones con los demás campos se ilustran en el esquema de la figura 1.1.

².Memoria final del Proyecto de Investigación PB97-1066: "Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático", subvencionado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología durante el trienio 1998-2001 (documento inédito en poder del autor).

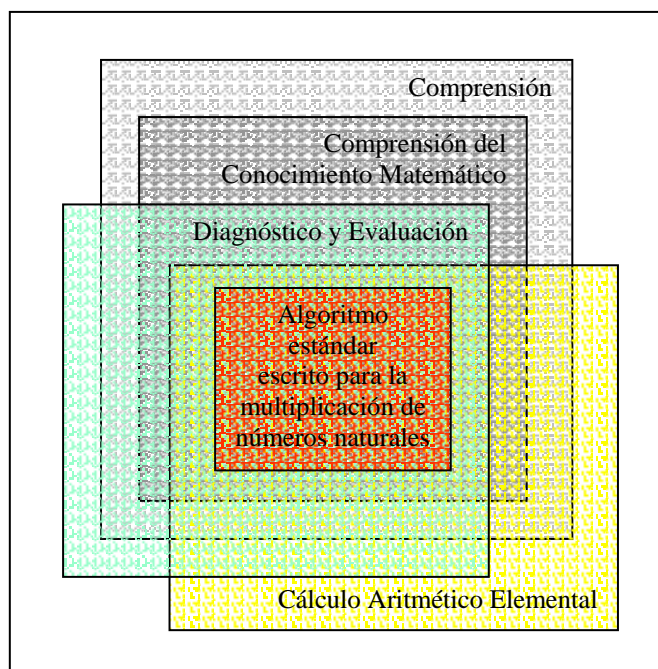


Figura 1.1.- Campos en los que se sitúa el área de investigación

1.3.2 Problema específico

El problema de investigación, recurrente en el campo de la Didáctica de la Matemática, se centra en la cuestión fundamental de establecer qué conocimientos matemáticos comprende un individuo y cómo los comprende. En términos más precisos, se trata de:

Dado un conocimiento matemático específico determinar qué es lo que los sujetos comprenden de él y cómo lo comprenden.

En primer lugar, es un problema estrechamente relacionado con el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En segundo lugar, por el modo en el que viene enunciado, es un problema que podrá ser resuelto, en el mejor de los casos, a medio o largo plazo, puesto que depende de los distintos conocimientos matemáticos existentes. No obstante, dicho problema se puede articular en otros más concretos sin más que fijar conocimientos matemáticos particulares y centrar la cuestión en determinar exclusivamente lo que los individuos comprenden de dichos conocimientos particulares y cómo lo comprenden. Este es el caso que nos ocupa, en el que hemos considerado el estudio del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales³ como contenido matemático referente particular de la investigación. En consecuencia, el problema concreto que se aborda se puede enunciar del siguiente modo:

³ La justificación de la elección de este conocimiento matemático para el estudio de su comprensión se expone en el apartado 6.2 del capítulo VI de la presente memoria, al cual nos remitimos.

Determinar y describir lo que un sujeto comprende y cómo lo comprende acerca del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Pero, como se explica con más detalle en el apartado 1.4 y se puede apreciar a lo largo de la memoria, el estudio específico se ha de basar en un estudio general, que, a su vez, se nutre de las conclusiones particulares de aquél.

1.4 Principios y Fundamentos

La investigación que presentamos se sustenta en una serie de planteamientos generales sobre el conocimiento matemático, la cognición y el aprendizaje, los modelos y teorías en Educación Matemática, el diagnóstico y la evaluación, las situaciones y tareas matemáticas y la metodología de investigación, entre otros aspectos.

Todos ellos, posicionados y argumentados a lo largo de los distintos capítulos del informe, conforman el conjunto de supuestos iniciales referente de la investigación. A continuación, enumeramos como referencia algunos de los más destacados agrupados en tres apartados: principios y fundamentos generales, específicos y antecedentes.

1.4.1 Generales

- Existe relación entre el campo de conocimientos en torno a la comprensión del conocimiento matemático y otras áreas específicas de investigación en Educación Matemática como la que se ocupa del cálculo aritmético elemental.

- No resulta necesario poseer de antemano una definición precisa del concepto de comprensión para afrontar los problemas relativos a ella, sobre todo los referentes a su diagnóstico y evaluación así como los relacionados con sus aspectos dinámicos. Por el contrario, consideramos que las soluciones dadas de forma paulatina a estos problemas son precisamente las que van a ir posibilitando y conformando una caracterización precisa del fenómeno.

- A pesar de su dificultad, resulta posible elaborar procedimientos metodológicos con los que valorar la comprensión del conocimiento matemático en los sujetos en base a sus realizaciones observables.

- Reconocemos el papel clave que desempeña la especificidad del dominio en el aprendizaje y la comprensión de los sujetos. Tal como subraya Niss (1999), al referenciar algunas de las principales conclusiones obtenidas de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica, “[...] Para un estudiante involucrado en el aprendizaje de las matemáticas, la naturaleza, contenido y rango específico de un concepto matemático que él o ella está adquiriendo o construyendo está, en gran parte, determinado por el conjunto de dominios específicos en los cuales el concepto ha sido concretamente ejemplificado e incluido para este estudiante particular” (p. 15). Identificamos, en definitiva, condicionantes epistemológicos y fenomenológicos para la comprensión.

- Reconocemos el papel fundamental que desempeña la experiencia en la comprensión de todo conocimiento, en particular del conocimiento matemático.

Asimismo, somos partidarios de cimentar las teorías sobre comprensión en las propias características del conocimiento en estudio. Esto es, conviene abordar el fenómeno de la comprensión a partir de estudios locales centrados en la comprensión de conocimientos matemáticos específicos.

- En términos generales, nos identificamos con las posiciones epistemológicas constructivistas en lo que respecta a la génesis y desarrollo del conocimiento matemático⁴.

- El conocimiento matemático es visto esencialmente como un producto incompleto y en evolución que es fruto de la actividad cognitiva humana, individual y colectiva.

- Para el desarrollo de líneas de investigación en comprensión del conocimiento matemático apostamos por investigaciones con una importante componente teórica y con estudios empíricos descriptivos siempre considerados de forma provisional. Al mismo tiempo, nos identificamos con el “alternativismo” constructivo mencionado por Bishop (1992) en relación con la investigación en Educación Matemática.

- El problema nos exige el desarrollo de vías de acceso al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático o teorías⁵ sobre la comprensión del conocimiento matemático que permitan, con su aplicación, la obtención de información objetiva con la que garantizar interpretaciones y descripciones cercanas a la realidad de las distintas situaciones cognitivas existentes.

1.4.2 Específicos

- Del problema de investigación se derivan consecuencias metodológicas (modo de afrontar el diagnóstico y la evolución de la comprensión), teóricas (resultados y conclusiones acerca del fenómeno de la comprensión) y didácticas (análisis y diseño de situaciones, tareas y problemas para la enseñanza de la matemática), entre otras. Todas ellas, convenientemente explicitadas a lo largo de los capítulos del informe, vienen a completar el conjunto de cuestiones complementarias y estrechamente relacionadas tratadas de forma indirecta con la investigación. Es por ello por lo que la investigación se podría entender también como el desarrollo de una propuesta teórico-metodológica para el estudio del fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático puesta en práctica en el caso particular del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Aproximación que ha de cumplir, en lo posible, con las siguientes características:

(a) *Operativa*. Los planteamientos teóricos admiten una aplicación práctica y vienen secundados por resultados empíricos favorables.

(b) *Útil*. Esto es, aplicable por el investigador en Didáctica de la Matemática y utilizable por los distintos agentes educativos (educador, profesor de aula,...).

(c) *Precisa*. Donde los pasos para proceder en cada etapa estén claramente definidos.

(d) *Válida*. Que aporte información fiable garantizando el máximo de objetividad posible.

⁴ Los detalles de la posición constructivista adoptada en la investigación se recogen en el apartado 5.2.1 del capítulo V.

⁵ Expresión que empleamos, sin entrar en detalles, desde un punto de vista próximo al sentido Kuhniano o Lakatosiano del término en cuanto al carácter provisional y abierto del mismo.

(e) *Abierta*. Susceptible de ser modificada y mejorada y, por tanto, siempre provisional.

(f) *Influyente*. Que aporte mejoras a la situación actual de conocimientos (resultados, conclusiones y logros alcanzados) sobre la comprensión del conocimiento matemático así como en las distintas áreas de investigación en Didáctica de la Matemática, alguna de ellas de amplia tradición como el campo de la aritmética elemental, organizando, interpretando, explicando y ampliando la información ya existente.

- Nos sentimos plenamente identificados con algunos de los supuestos y objetivos del grupo Pensamiento Numérico (Castro et al., 1997). Así, entre los tópicos principales de su estudio se incluye la cognición numérica y la aritmética escolar, ámbitos en los que también se sitúa nuestro trabajo. Existe además una preocupación especial dentro del grupo, que compartimos, por el análisis de los distintos modos de abordar la resolución de situaciones, problemas y fenómenos que transcurren en un ambiente numérico y por los problemas derivados de la evaluación escolar en matemáticas.

Sin embargo, si bien la comprensión es reconocida como habilidad cognitiva tratable mediante instrumentos conceptuales como los sistemas de representación, no reconocemos entre las bases del grupo, salvo algunas excepciones recientes (Romero, 2000), un interés explícito por afrontar directamente y en su conjunto el estudio del fenómeno de la *comprensión del conocimiento matemático* (numérico, en este caso), esto es, por abordar la comprensión como objeto de estudio propio de la Didáctica de la Matemática. Esta circunstancia nos hace pensar en un marco referencial para esta investigación que contemple al mismo tiempo supuestos del grupo Pensamiento Numérico y otras bases conceptuales de una línea de investigación específica sobre comprensión del conocimiento matemático.

- Para abordar el problema de investigación sería conveniente poseer una estructura de referencia que sienta al menos unas primeras bases teóricas y metodológicas con las que proceder. El marco teórico referencial debería contemplar los principios teóricos básicos necesarios para conformar una línea de investigación definida e integrar, al mismo tiempo, los conocimientos previos sobre el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva crítica, lo que supone el reconocimiento de los logros y hallazgos alcanzados así como de las deficiencias y limitaciones de los estudios desarrollados.

Por otra parte, entendemos que el problema de investigación requiere que el desarrollo de la aproximación a la comprensión traspase la frontera teórica y tenga repercusión a nivel empírico. Esto es, debería incluir un conjunto de recomendaciones y pautas metodológicas aplicables en la práctica que nos permita interactuar con los sujetos y acercarnos a la realidad que se pretende describir.

1.4.3 Antecedentes y fuentes consultadas

El proceso seguido en la recopilación y selección de la documentación, cuyos detalles se exponen en los capítulos II y III, a los que nos remitimos, se concreta en los siguientes puntos:

1. Método general empleado

El proceso de búsqueda de información que hemos seguido puede considerarse cíclico. Comienza con una fase inicial, caracterizada por su extensión y profundidad, en

la que se obtiene gran parte de la documentación empleada en la investigación. Posteriormente, se completa esta base de referencias con sucesivas búsquedas puntuales llevadas a cabo con regularidad a lo largo del desarrollo de la investigación.

En cuanto al tratamiento de la información, hemos tenido en cuenta la recomendación sugerida por Hitt (1999) en relación con los tipos de documentación existente y las posibles formas de analizar la información que contienen. Con esta referencia presente, adoptamos un esquema básico de análisis constituido por las dos partes diferenciadas siguientes:

- *Resumen neutro del contenido* del documento. En él se destacan, entre otros aspectos y según sea el caso, las principales ideas relativas a los supuestos teóricos adoptados, la metodología de investigación empleada, los resultados y conclusiones obtenidos o las propuestas didácticas y recomendaciones curriculares sugeridas. Es decir, destacamos lo más relevante de cada tipo de documento según su contenido.

- *Análisis crítico de la información revisada* en cada referencia, centrado principalmente en las características de los resultados obtenidos, en las potencialidades y limitaciones manifestadas, en las analogías y divergencias surgidas con nuestros planteamientos y en las cuestiones relevantes para los propósitos de la investigación.

2. Principales fuentes consultadas

Las principales fuentes de información utilizadas y los criterios empleados en las búsquedas de documentos se pueden resumir del siguiente modo:

(a) Bibliotecas, hemerotecas y librerías. Se realizaron consultas periódicas en los fondos bibliográficos de la Facultad de Educación de las Universidades de Málaga y Granada, fundamentalmente en las secciones de Educación Matemática. Las publicaciones periódicas revisadas fueron específicas de Didáctica de la Matemática.

Asimismo, se visitaron librerías especializadas en Málaga, Granada y Córdoba para localizar y adquirir obras sobre filosofía, historia y epistemología de la matemática, psicología del aprendizaje de las matemáticas y enseñanza de la aritmética, entre otras áreas.

(b) Bases de datos especializadas en Educación Matemática. Se han consultado la base de datos alemana *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), tanto en versión escrita como digital a través de CD, la base de datos del *Educational Resources Information Center* (ERIC) a través de Internet y otras bases documentales “on-line” más reducidas, como la que ofrece el grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA).

Para la exploración en estas bases de datos se han empleado distintos campos de búsqueda, destacando entre ellos *descriptor* y *año*. Los descriptores más utilizados fueron los siguientes⁶: comprensión matemática, diagnóstico y evaluación, tipos de conocimiento, aprendizaje procedimental, pensamiento algorítmico, aprendizaje conceptual, aritmética elemental, cálculo aritmético, algoritmo, algoritmo multiplicativo y multiplicación.

Por su parte, el rango de años osciló con regularidad entre 1990 y 2002.

⁶ Aunque se indiquen en español, todos los descriptores se emplearon en inglés en las bases de datos ZDM y ERIC.

(c) Otras fuentes. Además de las mencionadas, se ha hecho uso de los recursos ofrecidos en Internet por diferentes departamentos universitarios y grupos de investigación en Didáctica de la Matemática, en cuanto a la adquisición libre de documentos, preferentemente publicados.

Por otra parte, también hemos considerado las referencias bibliográficas incluidas en los distintos documentos y obras revisados como fuente para la localización de nueva información. De hecho, las referencias bibliográficas consultadas a lo largo de la investigación posibilitaron establecer vínculos de unión claves entre la documentación, constituyéndose por tanto como una de las principales fuentes empleadas para la obtención de información.

3. Formato, estructura y contenido de la información utilizada

La información recopilada se presenta bajo distintas formas. Así, se han utilizado principalmente:

- libros, considerados en su conjunto o tan sólo capítulos concretos de ellos. En este grupo destacamos los “Handbook”.

- artículos de revistas especializadas, nacionales e internacionales. De las primeras, subrayamos *Enseñanza de las Ciencias*, *UNO*, *Epsilon* y *Suma*. De las segundas, *Educational Studies in Mathematics*, *Journal for Research in Mathematics Education*, *Journal of Mathematical Behavior*, *For the Learning of Mathematics* e *Hiroshima Journal of Mathematics Education*.

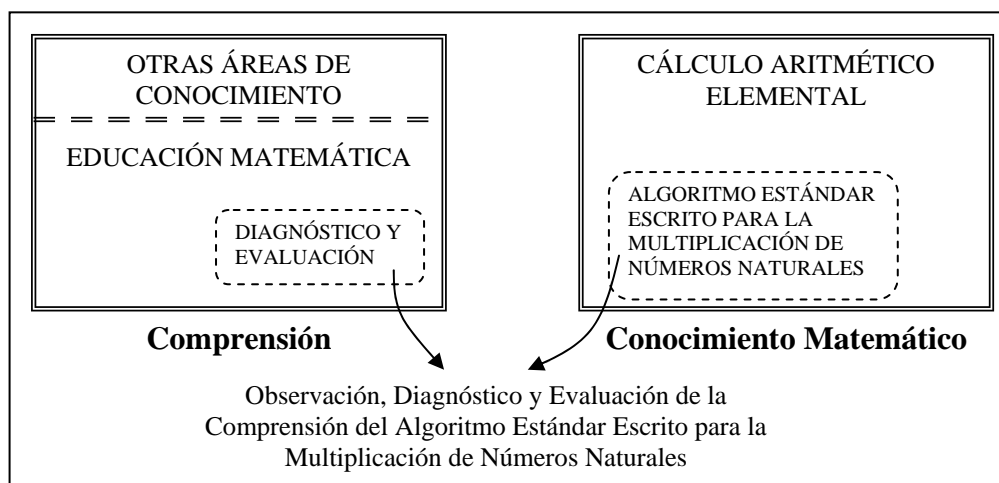
- actas de Simposios y Congresos. Entre ellas cabe señalar las correspondientes a los Simposios de la SEIEM (años 1997-2001) y a las conferencias de los grupos *Psychology of Mathematics Education* (20ª, 21ª y 23ª Conferencias) y *European Society in Mathematics Education* (1ª Conferencia).

En la sección de referencias bibliográficas de este informe se recogen los detalles de cada una de las reseñas consideradas en la investigación.

En cuanto a la estructura de los antecedentes revisados, se establecen los dos bloques siguientes que también se mencionan en el apartado 1.5.3:

- comprensión del conocimiento matemático, en especial centrado la atención en la cuestión del diagnóstico y la evaluación de la comprensión en matemáticas;
- aritmética básica y algoritmos de cálculo elemental.

El esquema-resumen de antecedentes se ajusta al siguiente cuadro:



En términos generales, los documentos revisados para la investigación proceden de distintas Áreas de Conocimiento como la Filosofía, la Sociología, la Psicología cognitiva, la Historia y la Epistemología de las Ciencias y de la Matemática y, sobre todo, de la Didáctica de la Matemática. De ellos se extrae la información utilizada sobre comprensión, comprensión del conocimiento matemático, tipos de conocimiento, evaluación en matemáticas, enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental o metodología de investigación en Educación Matemática, entre otros. En el siguiente cuadro se incluyen las principales referencias empleadas en torno al fenómeno de la comprensión, por una parte, y al cálculo aritmético elemental, por otra.

Comprensión		Cálculo Aritmético Elemental
Áreas de Conocimiento Relacionadas	Didáctica de la Matemática	
Abel (1964)	Byers y Erlwanger (1985)	Boero, Ferrari y Ferrero (1989)
Dancy (1993)	Castro, Rico y Romero (1997)	Burns (1994)
Gadamer (2000)	Davis (1992)	Carroll (1996)
Hernández-Pacheco (1996)	Díaz-Godino (2000)	Curcio y Schwartz (1998)
Morin (1994)	Duffin y Simpson (1997)	Hatano, Amaiwa y Inagaki (1996)
Schank (1988)	Fennema y Romberg (1999)	Hedrén (1998)
Toulmin (1977)	Hiebert y Carpenter (1992)	Kamii y Dominick (1997)
White y Gunstone (1992)	Koyama (1993, 1997, 2000)	Morrow y Kenney (1998)
	Pirie (1988)	Philipp (1996)
	Pirie y Kieren (1989, 1994)	Schliemann, Dos Santos, Da Costa (1993)
	Sierpiska (1990, 1994)	

4. Limitaciones

Una parte considerable del tiempo la hemos dedicado a buscar y revisar información relacionada con el trabajo de investigación. Durante este proceso han aparecido documentos que a la postre no han resultado útiles, pero también somos conscientes de que se ha podido obviar alguno interesante. A pesar de ello, consideramos que se han seleccionado y revisado los que a nuestro juicio son los más relevantes para la investigación. En cuanto al idioma utilizado, sólo se han tenido en cuenta las referencias en español, inglés y francés, descartando el resto de documentos. No obstante, en base a datos diversos, siempre hemos tenido la impresión de que los documentos descartados por este motivo no tenían la misma relevancia que los demás.

1.5 Definición formal

1.5.1 Objetivos

En este apartado se exponen los objetivos a alcanzar con la investigación que presentamos. Éstos se distribuyen del siguiente modo: en primer lugar, un *objetivo general* que expresa en términos globales la principal pretensión del estudio; a continuación, unos *objetivos específicos* directamente relacionados con las hipótesis del trabajo que permiten la concreción del objetivo central; por último, unos *objetivos complementarios* que hacen referencia a otros aspectos secundarios de la investigación.

1.5.1.1 Objetivo general

El propósito central de la investigación consiste en sentar las bases teóricas y metodológicas de una aproximación integradora y operativa al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático fundada en el diagnóstico y la evaluación de los comportamientos observables en los sujetos.

La propuesta se desarrolla con ánimo de ser integradora y operativa. Así, buscamos un marco teórico y metodológico básico desde el que poder, por una parte, reunir y reinterpretar información diversa ya existente en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, y por otra, iniciar un proceso de acercamiento a la comprensión con el propósito de continuar realizando, a través del diagnóstico y la evaluación de comportamientos observables, nuevos aportes sobre sus características y aspectos relacionados.

Por pretender además que la propuesta sea útil para la Educación Matemática entendemos que mediante la consecución de este objetivo manifestamos una intención claramente didáctica. De hecho, aspiramos a proporcionar un instrumento teórico que sirva para fundamentar futuras investigaciones centradas en el estudio de la comprensión de conocimientos matemáticos específicos o como fenómeno genérico, facilitar un método para el diseño y análisis de situaciones-problema, basado en la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático, con el que abordar tanto la valoración de la comprensión como el desarrollo del aprendizaje matemático y, por último, aportar datos de interés sobre características del fenómeno de la comprensión susceptibles de poder ser utilizados con propósitos educativos.

1.5.1.2 Objetivos específicos

Por la propia naturaleza de la investigación, el objetivo general de la misma admite una articulación en otros objetivos más concretos que pueden ser agrupados en tres bloques. El primero reúne a los objetivos teóricos, el segundo a los metodológicos y el tercero a los empíricos.

A. Objetivos Teóricos

[OT₁] Revisar y analizar el campo de conocimientos actual en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, poniendo de manifiesto los principales intereses, problemas y limitaciones existentes.

[OT₂] Desarrollar una base teórica inicial, sólida pero a la vez abierta, con la que organizar, integrar y ampliar con interpretaciones plausibles teorías y planteamientos sobre comprensión identificados en investigaciones previas en Educación Matemática.

[OT₃] Elaborar un marco de acción metodológica con el que afrontar el problema del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático desde lo observable.

La consecución de los objetivos [OT₂] y [OT₃] conformaría, a nivel teórico, la Aproximación pretendida. Los siguientes objetivos, metodológicos y empíricos, tienen que ver con la aplicación de dicha Aproximación.

B. Objetivos Metodológicos

[OM₁] Mostrar la operatividad y viabilidad práctica de la Aproximación propuesta para el estudio de la comprensión del conocimiento matemático aplicándola en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

[OM₂] Delimitar y organizar el conjunto situacional asociado al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales en base a criterios y categorías organizativas de orden epistemológico y fenomenológico.

C. Objetivos Empíricos

[OE] Identificar, describir y caracterizar posibles estados y perfiles de comprensión tipo en los sujetos asociados al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales y obtener a partir de ellos información específica sobre características y aspectos particulares de la comprensión de este conocimiento matemático.

1.5.1.3 *Objetivos complementarios*

Además de éstos, con el estudio estamos interesados fundamentalmente en alcanzar los siguientes propósitos secundarios, aunque no por ello menos importantes:

(a) Poner de manifiesto la capacidad y adecuación de los desarrollos teóricos sólidos para sustentar investigaciones en Didáctica de la Matemática y aportar argumentos en favor de su elaboración y uso por parte de los investigadores en dicho campo.

(b) Mostrar la potencialidad didáctica y para la investigación de los análisis epistemológico y fenomenológico como procedimientos para la identificación y ordenación de situaciones vinculadas a los conocimientos matemáticos concretos.

(c) Mostrar la pertinencia y eficacia de los estudios sobre comprensión sustentados en marcos teóricos integradores y operativos y centrados en conocimientos matemáticos específicos para la obtención de información acerca del fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático considerado en términos genéricos.

1.5.2 Hipótesis

Los objetivos que especifican el problema de investigación, expuestos en el apartado anterior, admiten una concreción en términos de las siguientes hipótesis de investigación, cuya contrastación permitirá la consecución de los mismos en distinto grado:

I. *El estado actual de conocimientos en Educación Matemática en torno al fenómeno de la comprensión justifica la necesidad y admite la posibilidad de realizar esfuerzos teóricos, encaminados a interpretar, integrar y ampliar la información existente, y prácticos, centrados en el diseño y aplicación de propuestas operativas para el estudio de este fenómeno.*

II. *Resulta posible abordar los problemas relativos a los distintos aspectos vinculados con la comprensión de conocimientos matemáticos específicos, incluso los de naturaleza interna, mediante la elaboración y aplicación de*

aproximaciones de carácter teórico-metodológico centradas en el estudio de lo observable.

III. *Los análisis epistemológicos y fenomenológicos asociados a un conocimiento matemático proporcionan criterios objetivos para la organización de su conjunto situacional y para la selección de tareas y situaciones con las que valorar la comprensión que manifiestan los sujetos.*

IV. *En el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales se identifican distintas facetas de comprensión, de origen epistemológico y también fenomenológico, que permiten la descripción de diferentes estados y perfiles de comprensión en los sujetos.*

En cuanto a la relación entre objetivos e hipótesis, la consecución de los objetivos específicos teóricos [OT₁] y [OT₂] pasa por la verificación de la hipótesis I y la de [OT₃] por la comprobación de la bondad de las hipótesis I y II. De esta última también depende el objetivo metodológico [OM₁] mientras que la consecución de [OM₂] pasa por verificar la hipótesis III. Por último, el objetivo empírico [OE] vendrá dado por la confirmación de la hipótesis IV.

1.5.3 Fases del estudio y desarrollo temporal

En el trabajo que presentamos, tal como se expone en el apartado 1.5.4 y se ilustra en la figura 1.2, se distinguen dos fases diferenciadas en las que se han empleado técnicas metodológicas diferentes. En una primera fase, considerada *teórica*, se pueden identificar cuatro bloques estrechamente relacionados:

(i) Los dos primeros están centrados, respectivamente, en la revisión de conocimientos y en el análisis crítico de los mismos. Este *análisis didáctico* constituiría la etapa justificativa para el siguiente bloque teórico.

(ii) El tercer bloque está dedicado al desarrollo en sí de la Aproximación propuesta para el estudio de la comprensión del conocimiento matemático.

(iii) El cuarto bloque teórico afronta la primera parte de la aplicación de la Aproximación para el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Estos dos últimos bloques constituyen la etapa correspondiente a los *fundamentos teóricos* de la investigación.

La fase teórica se completa con una fase *empírica* centrada en la aplicación de la Aproximación iniciada en el tercer bloque teórico sobre el diagnóstico y la evaluación de la comprensión. Esta etapa aglutina a los *primeros estudios exploratorios* realizados y al *segundo estudio empírico* desarrollado a continuación como estudio definitivo de la investigación.

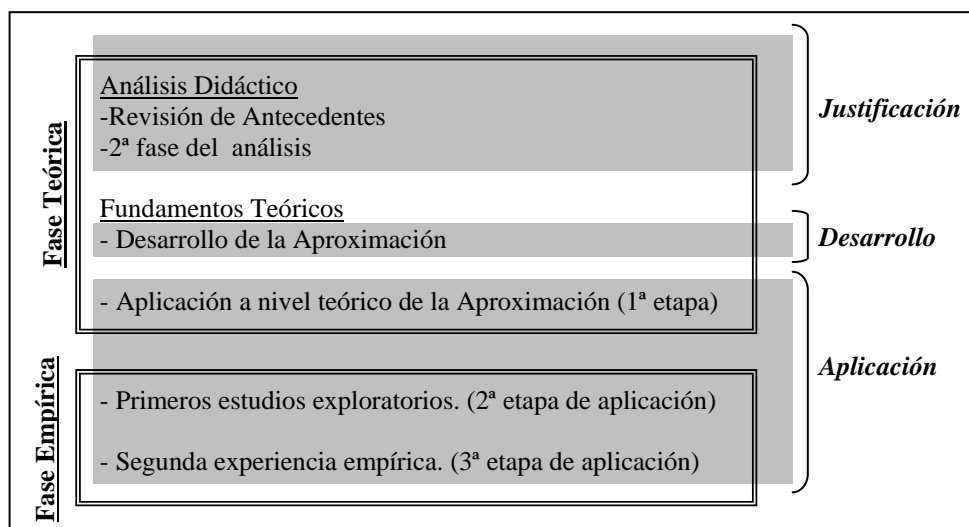


Figura 1.2.- Esquema genérico de las fases de la investigación

En cuanto a las relaciones existentes entre las hipótesis y las fases de la investigación, hemos de realizar las siguientes puntualizaciones:

- La hipótesis I concierne por completo a la fase teórica de la investigación; su contrastación resulta fundamental por cuanto proporciona el soporte teórico del cual depende el resto del estudio.

- La hipótesis II, por su parte, corresponde conjuntamente a las fases teórica y empírica del estudio. Se trata de una hipótesis global cuya verificación completa exige el desarrollo de ambas fases de investigación y, en particular, la contrastación de las hipótesis III y IV.

- La bondad de la hipótesis III vendrá respaldada por la primera fase de aplicación teórica de la Aproximación junto con los estudios exploratorios correspondientes a la etapa inicial de la fase empírica.

- La hipótesis IV, por su parte, puede considerarse exclusiva de la fase empírica.

En lo que se refiere al desarrollo temporal, la investigación que se presenta se lleva a cabo en el periodo comprendido entre el año 2000 y la primera mitad del 2004. Durante este tiempo se han ido completando las diversas etapas descritas, no necesariamente en el mismo orden, de acuerdo con la siguiente secuencia temporal:

- Año 2000: Puede considerarse como la etapa inicial de la investigación. Durante este año se realiza un estudio previo para la obtención de la Suficiencia Investigadora como parte del Programa de Doctorado *Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales* llevado a cabo en la Universidad de Málaga durante el bienio 1998-2000. Este trabajo comprende, fundamentalmente, una primera revisión y análisis de antecedentes en torno al campo del Cálculo Aritmético Elemental, un estudio teórico sobre las multiplicaciones con cifras desconocidas (Gallardo y González, 2002) y el primero de los estudios empíricos exploratorios resumidos en el capítulo VII de la presente memoria. Dicho estudio, se realizó para comprobar la potencialidad de estas tareas concretas como instrumento de diagnóstico y evaluación de la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

- Año 2001: La investigación anterior se presenta en la V Reunión Científica Nacional del grupo *Pensamiento Numérico y Algebraico*, completada con un modelo teórico emergente relativo a la comprensión del conocimiento matemático, surgido de una primera reflexión sobre antecedentes revisados, y una clasificación provisional con categorías situacionales referentes al algoritmo estándar escrito del producto (Gallardo, 2001).

En este período se profundiza, además, en la parte teórica de la investigación. Así, por una parte, se procede a la revisión y discusión de trabajos centrados en el fenómeno de la comprensión así como en los principales supuestos teóricos y metodológicos que estructuran la Aproximación presentada en el capítulo V. Por otra, se continúa con el problema ya iniciado de la identificación y ordenación del campo de situaciones asociado al algoritmo estándar escrito de la multiplicación mediante una consulta a expertos dirigida a examinar una nueva categorización situacional más sólida surgida de nuevas revisiones y reflexiones teóricas sobre el campo fenómeno-epistemológico del algoritmo (Capítulo VI).

Tras la conclusión de esta etapa se dispone de una categorización, teórica y provisional, y de una selección de situaciones, pendientes de contrastación empírica, para el diagnóstico y evaluación de la comprensión. Para ello, se lleva a cabo durante este año el diseño de un nuevo estudio exploratorio.

- Año 2002: Se desarrolla el segundo de los estudios exploratorios presentados en el capítulo VII de esta memoria. De él se extrae fundamentalmente una tipología situacional depurada, la referencia de unas respuestas tipo y las primeras interpretaciones en términos de comprensión, es decir, los resultados y las conclusiones precisas para afrontar con garantías la siguiente fase en el diagnóstico y la evaluación de la comprensión que poseen los sujetos sobre el algoritmo estándar escrito del producto.

Al mismo tiempo, se continúa con el análisis didáctico (capítulo IV) iniciado sobre la comprensión del conocimiento matemático y el cálculo aritmético elemental y se completan las bases que conforman la Aproximación del capítulo V. Un resumen del trabajo desarrollado en esta etapa concreta se puede encontrar en Gallardo y González (2003).

- Año 2003: Se diseña y lleva a cabo la segunda experiencia empírica, expuesta en el capítulo VIII, dirigida a la consecución de los objetivos todavía pendientes (OM₁, OE y (c)). Con este último estudio empírico, se llegan a determinar distintos perfiles de comprensión, se obtiene información diversa sobre aspectos específicos de la comprensión del conocimiento matemático en estudio y se establecen consecuencias generales sobre el fenómeno de la comprensión.

En este período se concluye la parte teórica, correspondiente a los capítulos II, III, IV, V y VI, a la vez que se inicia la organización de toda la información y la redacción del informe de investigación bajo la estructura que ahora presenta.

- Año 2004: Se completa y depura la memoria de investigación y se realizan los trámites para la lectura y defensa de la tesis doctoral.

1.5.4 Metodología

Utilizamos, como referencia, el marco metodológico específico para la investigación en Educación Matemática propuesto por profesores de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga (González, 1999; González y Ortiz, 2000). En particular, se

utiliza una metodología que puede considerarse mixta, puesto que a lo largo de las distintas fases se llegan a emplear métodos de naturaleza no empírica junto a métodos empíricos. En los apartados que siguen se describen las características de los principales métodos y técnicas metodológicas empleadas en cada una de las fases de la investigación.

1.5.4.1 Metodología de la fase teórica

Para la selección y el tratamiento de los antecedentes tomamos como referencia el método no empírico **Análisis Didáctico** propuesto por González (1998b). Se trata de un método cualitativo, no empírico, de carácter meta-analítico que viene definido como “*el procedimiento metodológico global que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a diferentes áreas de investigación en Educación Matemática; en nuestro caso: Historia y Epistemología, Aprendizaje y Cognición, Fenomenología y Enseñanza y estudios curriculares*” (González, 1998a, p. 50).

Asimismo, la propuesta defendida por Rico (2001) de desarrollar un *Análisis Conceptual* para aquellas nociones de naturaleza compleja que intervienen en Educación Matemática también es tenida en cuenta en la revisión de antecedentes sobre el fenómeno de la comprensión. No obstante, conviene subrayar que el análisis didáctico adoptado en este estudio lo interpretamos como una extensión o ampliación natural del análisis conceptual.

De acuerdo con lo establecido anteriormente se lleva a cabo, en primer lugar, la revisión de antecedentes, procediendo a la obtención de la información proporcionada por las diversas fuentes vinculadas al fenómeno de la comprensión y de la comprensión del conocimiento matemático. Este primer bloque de antecedentes es completado con nueva información recopilada en torno al cálculo aritmético elemental. Los detalles del proceso de recogida y selección de la información se han expuesto en el apartado 1.4.3, mientras que los resultados fundamentales obtenidos de dicho proceso se recogen en los capítulos II y III.

A continuación se procede con la segunda fase del análisis didáctico, en la que se realiza la revisión crítica de la información recopilada y el estudio de las relaciones más destacadas entre los distintos campos revisados. Uno de los propósitos de esta parte del estudio, como se puede apreciar en los resultados que se exponen en el capítulo IV, es el de delimitar una base teórica inicial sobre la que desarrollar la Aproximación al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático.

Como hemos mencionado anteriormente, el núcleo de la Aproximación elaborada se presenta en el capítulo V. Se trata de un estudio teórico puro que consideramos fundamental, por cuanto constituye el eje central sobre el cual se articula el resto de la investigación y porque posibilita la obtención de conclusiones de tipo teórico. La aplicación de la Aproximación al caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales se inicia con un estudio epistemológico y fenomenológico en profundidad de dicho conocimiento, siguiendo las líneas de actuación definidas previamente. Los detalles del método seguido en esta etapa concreta se recogen en el capítulo VI.

En cierto sentido todo el constructo teórico desarrollado en esta fase de la investigación viene a respaldar la afirmación realizada por Bishop (1992) acerca de que *“la teoría es el producto esencial de la actividad de investigación y la teorización es, por tanto, su objetivo principal”* (p. 711).

1.5.4.2 Metodología de la fase empírica

La fase empírica está destinada a continuar con la puesta en práctica del programa teórico elaborado en las fases precedentes de la investigación. Durante esta fase se han llevado a cabo distintos estudios en los que se utilizan métodos descriptivos, cuantitativos y cualitativos, transversales y sobre muestras de población reducidas e intencionales (Bisquerra, 1989). Asimismo, puesto que no se han encontrado instrumentos de recogida de datos idóneos y ajustados a los requerimientos de la investigación, se ha destinado a tal finalidad una parte considerable de la fase empírica. De forma más precisa:

(a) En el primer estudio exploratorio, considerado como estudio piloto, se aplica la metodología cuantitativa para realizar el análisis de los datos obtenidos mediante un cuestionario escrito cumplimentado por una muestra de 84 alumnos en su ambiente natural de aula. En el análisis exploratorio de los datos se emplean conceptos y técnicas propios de la estadística descriptiva.

(b) En el segundo estudio exploratorio se utiliza la entrevista semiestructurada sobre cuestionario escrito como técnica para la recogida de información (Azcárate, 1998). Se realizan un total de 9 entrevistas donde los alumnos participantes se enfrentan a un conjunto reducido de situaciones seleccionadas de acuerdo con criterios previamente establecidos. El carácter exploratorio de este estudio justifica las distintas modificaciones y progresivas adaptaciones realizadas en el cuestionario utilizado durante la prueba así como el carácter genérico del análisis realizado sobre la información recopilada.

(c) El segundo estudio empírico consiste en un nuevo estudio cualitativo en el que se vuelve a emplear la entrevista semiestructurada sobre cuestionario escrito. En esta ocasión participan 24 alumnos que se enfrentan a un conjunto de tareas, depurado y fijado de antemano. Los datos recopilados se analizan, organizan e interpretan teniendo presente las referencias obtenidas en los estudios exploratorios previos.

La figura 1.3 recoge el esquema-resumen de la investigación desarrollada con los detalles de cada uno de los estudios reseñados.

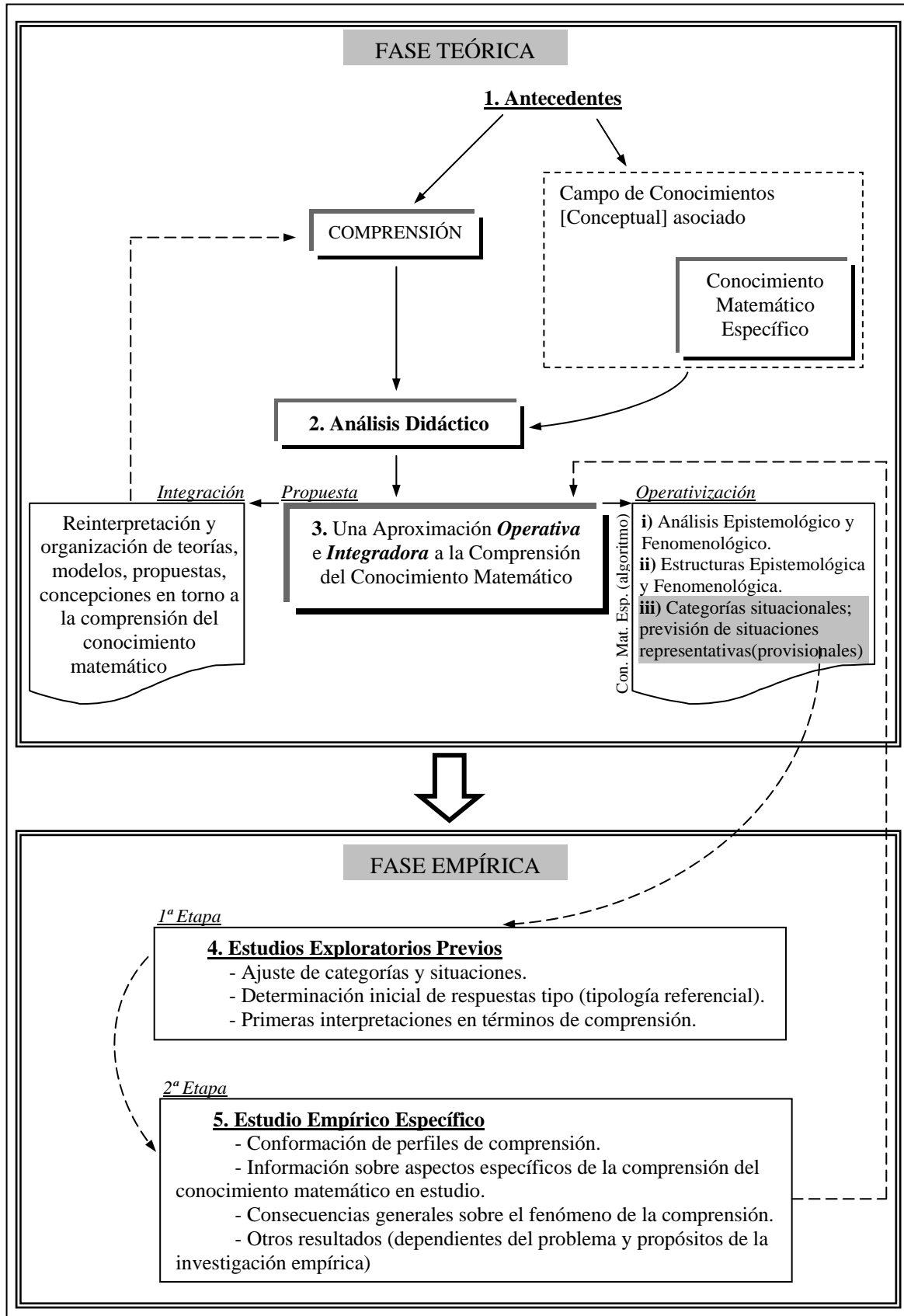


Figura 1.3 Esquema detallado de las fases de la Investigación

1.6 Algunas características de la investigación

Para finalizar el capítulo incluimos a continuación una breve síntesis de algunas de las principales características del estudio que presentamos.

1.6.1 Generales

Se trata de un problema de investigación *fundamental*, generado por la propia investigación en Educación Matemática más que por una determinada práctica de enseñanza (Sierpiska et al., 1993). De igual manera, en cuanto a la función que desempeña, la investigación puede entenderse como *descriptiva* (Mason y Waywood, 1996).

De otro lado, de acuerdo con los criterios clasificatorios enumerados por Bisquerra (1989, pp. 60-69) para agrupar los principales métodos de investigación en educación, podemos posicionar el estudio realizado del siguiente modo:

- Según el *proceso formal*, en el estudio se emplea el método hipotético-deductivo.
- Según el *grado de abstracción*, se trata de una investigación pura (básica), preocupada por investigar nuevos conocimientos y aumentar la teoría, aunque de manera indirecta también tiene una intencionalidad práctica.
- Según el *grado de generalización*, la investigación puede considerarse fundamental en cuanto a que tiene como uno de sus propósitos llegar a conclusiones de carácter teórico.
- Según la *naturaleza de los datos*, la metodología usada en la parte empírica es fundamentalmente cualitativa.
- Según las *fuentes*, en la fase teórica se incluye una etapa que corresponde a una investigación bibliográfica como parte del Análisis Didáctico llevado a cabo mientras que la segunda fase de la investigación, tal como hemos señalado, es empírica.
- Según la *temporalización*, los estudios realizados en la fase empírica son transversales dado que los datos se han recopilado de una muestra de sujetos en un instante determinado.

1.6.2 En torno a la calidad

En este apartado pretendemos aportar algunos argumentos en favor de la calidad de la investigación presentada. Para ello, tomamos de referencia los criterios de calidad considerados por algunos de los autores que han reflexionado sobre esta cuestión en Educación Matemática (Bishop, 1992; Romberg, 1992; Sierpiska et al., 1993; Coriat, 2001).

En principio, nos apoyamos en las tres componentes descritas por Bishop (1992) para calificar el estudio desarrollado como de investigación en Educación Matemática. Así, existe una clara razón para la actividad investigadora, se proporciona evidencia con la que mantener el vínculo con la realidad en estudio y, por último, se aporta como producto una referencia teórica elaborada.

Con esta referencia, la investigación expuesta en el presente informe manifiesta suficientes garantías de:

-*Validez*. Consideramos que la investigación realizada proporciona muestras suficientes de validez, por cuanto la evidencia obtenida está relacionada en cierto grado con el fenómeno en estudio (Romberg, 1992). No obstante, por emplear indicadores en

los métodos de obtención de evidencia, tanto teórica como empírica, hemos de tener siempre presente la posibilidad del cuestionamiento.

En principio, a nivel empírico podemos asegurar una determinada correspondencia entre los logros alcanzados y el contenido a valorar, hecho que supone una validez externa o de contenido aceptable. Asimismo, entendemos que el análisis llevado a cabo en el proceso de construcción del instrumento de recogida de datos ha sido suficientemente exhaustivo como para garantizar cierta validez interna.

-Racionalidad. Todas las cuestiones relacionadas con la comprensión del conocimiento matemático son de especial interés para la Educación Matemática, en particular, la que se trata en esta investigación. La racionalidad del problema está justificada en las polémicas y contradicciones existentes tanto en los estudios que tienen como eje central de reflexión el fenómeno de la comprensión como los centrados en el área específica del cálculo aritmético elemental. Además, es un problema que está justificado por cuanto no se encuentran evidencias de haber sido resuelto en su totalidad. Asimismo, lo consideramos de vital importancia para la Didáctica de la Matemática puesto que, de resolverse, proporcionaría entre otras cosas:

- Una vía de acceso al estudio de la comprensión desde una posición externa, sin necesidad de realizar conjeturas ni admitir supuestos sobre lo que acontece en la mente del sujeto.

- Una fuente de información con la que interpretar e incluso llegar a solventar problemas de interés para otras áreas de investigación en Educación Matemática.

-Originalidad. Entendemos que la investigación resulta original, por cuanto se afronta de forma directa y desde una perspectiva global el problema de la comprensión del conocimiento matemático, aunque esto no quiere decir, tal como venimos señalando, que se esté buscando una solución concreta para todas las cuestiones relacionadas. La intención de mostrar un tema complejo desde un punto de vista no reconocido en estudios precedentes⁷ y el esfuerzo por organizar los principales conocimientos existentes son otros indicadores de la originalidad del estudio (Coriat, 2001).

-Rigurosidad. En el desarrollo de la investigación se ha tenido presente la rigurosidad al intentar emplear el lenguaje de forma cuidadosa, clarificando en lo posible el sentido de los conceptos empleados. Asimismo, se ha tenido especial cuidado y atención a la hora de establecer las distintas conclusiones sobre comprensión derivadas de los resultados obtenidos en las fases teórica y empírica de la investigación.

Por otra parte, durante las distintas etapas del estudio se ha procurado cumplir con las exigencias deontológicas propias de la actividad investigadora en las ciencias sociales.

-Reproductibilidad. Por las peculiaridades de la investigación tan sólo garantizamos una reproductibilidad global, centrada fundamentalmente en la aplicación de la Aproximación teórico-metodológica para el estudio de la comprensión ante nuevos conocimientos matemáticos.

-Valor y relación con la Educación Matemática. Tal como se argumenta en el capítulo IX, de los resultados y conclusiones teóricas, metodológicas y empíricas obtenidos en la investigación, se extraen consecuencias evidentes para la investigación en Didáctica de la Matemática, sobre todo concernientes al estudio de la comprensión y

⁷ La relación precisa de la Aproximación propuesta con otras ya presentes en Educación Matemática, se expone en los capítulos IV y V.

para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en cuanto al tratamiento del diagnóstico, evaluación y desarrollo de los conocimientos matemáticos en los sujetos. Por ello, consideramos que se trata de una investigación estrechamente vinculada a la Educación Matemática.

Finalmente, hemos de subrayar que a pesar de todos los argumentos expuestos en favor de la calidad de la investigación, somos conscientes también de las limitaciones que se manifiestan, en algunos casos importantes, y de las que se irán destacando y justificando las más relevantes a lo largo de presente informe.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES (I): COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO, SU DIAGNÓSTICO Y EVALUACIÓN

2.1 Introducción

De acuerdo con el proceso descrito en 1.4.3, con las directrices del Análisis Conceptual mencionado en 1.5.4.1 y como parte de la primera fase del Análisis Didáctico, cuyos resultados completos se exponen en el capítulo IV, se presentan en los apartados que siguen los resultados de la revisión de conocimientos llevada a cabo sobre el fenómeno de la comprensión en diferentes áreas de conocimiento y en particular en el campo de la Educación Matemática.

El capítulo se divide en cuatro apartados. En el primero se incluye una breve descripción de la organización de los antecedentes consultados. A continuación, siguiendo un proceso de concretización acorde con la delimitación del área problemática, se exponen los antecedentes distribuidos en tres apartados: la noción de comprensión en general, la comprensión del conocimiento matemático y el problema del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En todos los casos, como corresponde a una revisión de una cierta profundidad sobre nociones tan complejas e importantes para la Educación Matemática, se incluyen resúmenes extensos comentados y acompañados de citas de los autores consultados.

2.2 Estructura, organización y exposición de los antecedentes

Con el propósito de garantizar una mayor claridad en la exposición hemos creído conveniente ordenar el campo de antecedentes de acuerdo con el siguiente esquema (figura 2.1):

(i) *Antecedentes relacionados*. Incluye los antecedentes que proporcionan información general sobre el fenómeno de la comprensión, proveniente de áreas afines y con una incidencia especial en la Didáctica de la Matemática. En este sentido, se han revisado publicaciones en Filosofía, Sociología, Epistemología y Psicología, y se han ordenado sus principales aportaciones en el apartado 2.3

La consideración de información no específica proveniente de áreas consolidadas y de mayor tradición está justificada, principalmente, por la necesidad de controlar la complejidad asociada a la noción de comprensión y eliminar posibles inconsistencias derivadas de una falta de precisión en la terminología empleada. Además, esta información resulta útil para situar y relacionar entre sí los antecedentes específicos, que

se suelen apoyar, a veces de forma implícita, en ideas y supuestos genéricos procedentes de dichos campos. Por último, este tipo de antecedentes proporciona solidez y coherencia al estudio y favorece el carácter integrador de la Aproximación o modelo teórico puesto a prueba en la investigación y que se expone en el capítulo V.

(ii) *Antecedentes Específicos*. Incluye los antecedentes sobre comprensión del conocimiento matemático así como sobre su diagnóstico y evolución; temas, ambos, de especial interés para la investigación que se presenta y, en general, para el campo de la Educación Matemática.

Como se puede apreciar en los apartados 2.4 y 2.5, en los que se incluyen los principales resultados de la revisión, los trabajos revelan diferencias en cuanto al tratamiento dado a la comprensión. Así, identificamos antecedentes donde la comprensión del conocimiento matemático es el principal objeto de estudio junto a trabajos en los que se reflexiona sobre otras nociones relacionadas y de similar complejidad o en los que la presencia de la noción de comprensión es secundaria y su estudio superficial. En este último caso, se trata de publicaciones que abordan cuestiones importantes paralelas a la comprensión y fundamentalmente relacionadas con los tipos de conocimiento involucrado. Por último, en el apartado 2.5, se dedica una especial atención al análisis de las principales dificultades y limitaciones para el desarrollo efectivo de un proceso de diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático, lo que constituye el núcleo y, a la vez, principal reto del estudio que se presenta.

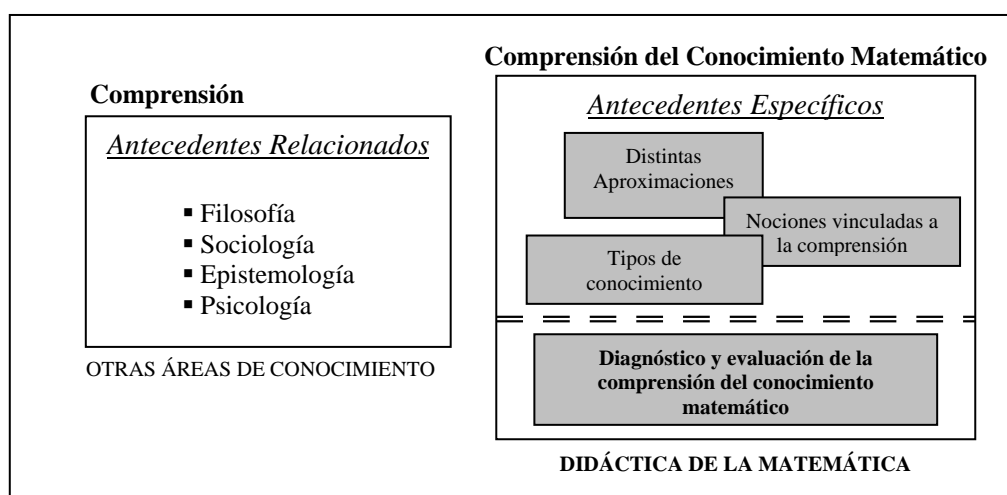


Figura 2.1.- Estructura general de los antecedentes.

2.3 La noción de comprensión

Se ha llevado a cabo una revisión de referencias y un análisis no exhaustivo de la información en torno a la noción general de comprensión en los campos de Filosofía, Sociología, Epistemología y Psicología. La información revisada proviene, en su mayoría, de obras de primer nivel, aunque también se han considerado referencias de segundo nivel como complemento. Igualmente, se han consultado diccionarios para clasificar términos especializados.

Las aportaciones presentadas no son exhaustivas ni definitivas, sino que constituyen una primera aproximación parcial al conocimiento existente. Los análisis realizados, aunque limitados y en ocasiones aparentemente inconexos, manifiestan, sin embargo, un alcance que consideramos suficiente para los propósitos de la investigación. Por último, hemos de decir que la intención con la que se ha efectuado el análisis de la información y la búsqueda de las distintas relaciones presentes se puede apreciar con mayor claridad en el capítulo IV al que nos remitimos.

2.3.1 La noción de comprensión en Filosofía y Sociología del conocimiento

2.3.1.1 Fuentes consultadas

Se han revisado las obras que se citan a continuación por orden alfabético de sus autores:

- **Abel, T. (1964).** *La operación llamada “Verstehen”.*
- **Ferrater, J. (1994).** *Diccionario de filosofía.*
- **Gadamer, H. G. (2000).** *Verdad y Método II.*
- **Gavilán, J. (1999).** *Breve historia de la filosofía.*
- **Habermas, J. (1981).** *Teoría de la acción comunicativa I.*
- **Hernández-Pacheco, J. (1996).** *Corrientes actuales de Filosofía. La Escuela de Francfort. La filosofía hermenéutica.*
- **Morin, E. (1994).** *El Método. El conocimiento del conocimiento.*
- **Quintanilla, M. A. (1979).** *Diccionario de filosofía contemporánea.*
- **Von Wright, G. H. (1987).** *Explicación y comprensión.*
- **Wittgenstein, L. (1988).** *Investigaciones filosóficas.*

2.3.1.2 Principales aportaciones

No es objetivo de este apartado mostrar al detalle los resultados del análisis realizado sobre la noción de comprensión en filosofía, sino poner de manifiesto su importancia, complejidad y variedad de dimensiones a través de los significados que atribuyen a dicho término algunos de los principales filósofos contemporáneos. Tales significados se pueden agrupar en torno a dos dimensiones fundamentales diferentes, una *metodológica* y otra de carácter *histórico-ontológico*, y a una tercera posición atribuible a Wittgenstein. Veamos a continuación, brevemente, en qué consiste cada una de ellas, remitiéndonos a la discusión y análisis que se expone en el capítulo IV para una información más amplia sobre el papel e importancia de estos significados en la investigación que presentamos.

2.3.1.2.1 Dimensión metodológica

La noción de comprensión aparece vinculada a la de explicación y formando parte del debate establecido sobre las relaciones entre las ciencias de la naturaleza y las ciencias del hombre. La crisis de la racionalidad, acontecida en el siglo XIX, provoca la búsqueda de un nuevo modelo que permita superar el estrecho marco del racionalismo y extender los límites del conocimiento a la esfera de lo humano. Los objetos de conocimiento de las ciencias de la naturaleza y de las ciencias humanas son distintos y, por tanto, requieren métodos diferentes. En esta cuestión resulta fundamental la aportación de Dilthey:

“Frente al reduccionismo positivista de todas las ciencias al modelo de las ciencias naturales, Dilthey pretende recuperar las <<ciencias del espíritu>> con métodos y objetivos propios: se trata de comprender, no de explicar la realidad humana que es radicalmente vida y, por lo tanto, historia” (Quintanilla, 1979; p. 112).

La comprensión es considerada entonces como un método particular por el que se puede explicar la conducta humana (Abel, 1964); un modo de aprehensión de los objetos de las ciencias del espíritu en contraposición con la explicación como método característico de la ciencia natural. Quintanilla (1979) expresa la diferencia entre ambas ciencias en términos metodológicos:

“Mientras las ciencias de la naturaleza se caracterizarían por poner en ejercicio un método analítico-causal explicativo (Erklären) de sus objetos <<naturales>>, las ciencias del espíritu se caracterizarían por llevar a efecto una interpretación comprensiva (Verstehen)¹ de las realidades culturales en cuestión” (p. 206).

La comprensión se erige, pues, como un método que permite fundamentar las ciencias del espíritu, evitar la arbitrariedad interpretativa y, en consecuencia, garantizar la universalidad en la interpretación de las distintas realidades culturales. El método de la comprensión proporciona conocimiento histórico que no requiere de posterior justificación. Es un método “fiable”, al igual que la explicación para la ciencia natural, aunque con algunas limitaciones. Por ello, Abel (1964) considera que la Verstehen no es un método adecuado para la investigación científica, aunque llega a admitir su utilidad para formular hipótesis al comienzo de una investigación:

“Fundamentalmente, la operación de la Verstehen hace dos cosas: nos alivia de un sentido de aprehensión en relación con una conducta, poco familiar o inesperada, y es una fuente de “corazonadas” que nos ayuda a formular hipótesis” (p. 196).

Von Wright (1987) también presenta la explicación y la comprensión como métodos distintos. En principio, reconoce la similitud de los términos <<explicar>> y <<comprender>> en el uso cotidiano, afirmando que casi todas las explicaciones proporcionan una comprensión de las cosas. No obstante subraya que:

“[...] <<comprensión>> cuenta además con una resonancia psicológica de la que carece <<explicación>>... la comprensión, como método característico de las humanidades, es una forma de empatía (en alemán Einfühlung) o recreación en la mente del estudioso de la atmósfera espiritual, pensamientos, sentimientos y motivos, de sus objetos de estudio” (p. 24).

La comprensión es contemplada, entonces, como el acto misterioso de introducirse en los estados mentales del sujeto ajeno. Este aspecto psicológico diferenciador viene acompañado por lo que el autor denomina dimensión intencional o semántica de la comprensión:

¹ Abel (1964) ilustra cómo se realiza la operación denominada *Verstehen* (‘comprensión’), examina sus características y hace una valoración de sus limitaciones y potencialidades como método especial en el estudio de la conducta humana.

“La comprensión se encuentra además vinculada con la intencionalidad de una manera en que la explicación no lo está. Se comprenden los objetivos y propósitos de un agente, el significado de un signo o de un símbolo, el sentido de una institución social o de un rito religioso” (p. 24).

Por su parte, en su reflexión sobre los dobles juegos del conocimiento, Morin (1994) trata de mostrar que comprensión y explicación, aunque transcurran en esferas diferentes y presenten distintas características, manifiestan una complementariedad en su relación. Así, defiende una relación dialógica y compleja entre comprensión y explicación y recomienda el desarrollo conjunto de ambos campos: no es posible la comprensión sin explicación y, recíprocamente, toda explicación necesita de ciertos requisitos dependientes de la comprensión.

“La representación misma no es <<comprendida>> sino porque ha sido organizada de manera coherente en virtud de principios/reglas que restablecen la constancia de los objetos percibidos, es decir en virtud de un dispositivo pre-explicativo y, una vez formada, experimenta los procesos explicativos del espíritu que la estudia y analiza.” (p.165).

Más adelante, continúa afirmando:

“...incluso en el corazón de las verdades comprensivas existe algo que debe explicarse; incluso en el conocimiento explicativo de las físicas, la agudeza de espíritu, la sutileza psicológica, la intuición como diría Einstein, que en cierto modo dependen de la comprensión, constituyen la vanguardia de la explicación...” (p.166).

De otro lado, con vistas a “comprender” mejor la comprensión, el autor considera necesario destacar su faceta sociológica y no limitar su validez sólo al ámbito de las relaciones intersubjetivas. Tal como indica, la comprensión *“no sólo vale como modo de conocimiento psicológico, sino también como modo de conocimiento sociológico”* (p. 162). Es, precisamente, en este ámbito, donde tiene cabida hablar de la necesidad de una dimensión comprensiva para el conocimiento sociológico y de la *hermenéutica* como método de interpretación de cualquier manifestación marcada por la intención humana, ya no sólo conductas particulares sino también archivos, obras, monumentos, técnicas o textos históricos. De acuerdo con Morin, la comprensión ha de verse, por tanto, como un modo fundamental de conocimiento antropológico.

La dimensión metodológica de la comprensión aparece reflejada en Habermas (1981) al abordar la problemática de la racionalidad de la acción. En las ciencias sociales, los procedimientos de interpretación racional de una acción (teleológica, regulada por normas o dramática) gozan de escasa credibilidad, debido a que el intérprete se ve obligado a abandonar la actitud de tercera persona para tomar parte en las interpretaciones cuyo significado trata de entender y adoptar una postura frente a las pretensiones de validez con las que las acciones se presentan, sometiéndolas a examen y crítica. Por ello, el autor sostiene que las acciones comunicativas no pueden interpretarse de otro modo que <<racionalmente>>, para lo que utiliza como hilo conductor la problemática de la <<comprensión>> en las ciencias sociales:

“[...] El problema de la <<comprensión>> en las ciencias sociales ha cobrado importancia metodológica merced sobre todo a que el científico social no puede acceder [a su ámbito objetual] sólo a través de la observación y a que desde un punto de vista metodológico la comprensión no es susceptible del mismo tipo de control que el que el experimento representa para la observación. El científico social...tiene que pertenecer ya al mundo de la vida cuyos ingredientes quiere describir. Y para poder describirlos tiene que poder entenderlos. Y para poder entenderlos tiene en principio que participar en su producción. Como veremos, esta circunstancia impide al intérprete practicar esa separación entre cuestiones de significado y cuestiones de validez que pudiera otorgar a la comprensión un impecable carácter descriptivo” (p. 155).

Habermas llega así a la conclusión de que el intérprete logra entender lo que quiere decir el sujeto ajeno sólo cuando penetra en las razones por las que sus emisiones o manifestaciones aparecen como racionales. Desde el punto de vista metodológico, el problema es cómo hacer compatible la objetividad de la comprensión con la participación en un proceso de entendimiento. La respuesta la encuentra Habermas en las llamadas “estructuras generales de los procesos de entendimiento”, compartidas por el intérprete y por los implicados directos en la acción comunicativa. Estas estructuras son las que suministran al científico social los medios críticos con los que poder garantizar la objetividad de los conocimientos adquiridos:

“[...] el científico social no puede asegurar la objetividad de su conocimiento recurriendo furtivamente al ficticio papel de un <<observador desinteresado>> y huyendo así a un lugar utópico fuera del contexto vital que nos resulta comunicativamente accesible. Antes bien, tendrá que buscar en las estructuras generales de los procesos de entendimiento, en los que no tiene más remedio que introducirse, las condiciones de objetividad de la comprensión para averiguar si el conocimiento de esas condiciones le permite cerciorarse reflexivamente de las implicaciones de su participación” (p. 173).

Es decir, a través de estas estructuras el observador podrá controlar su influencia en el proceso de comunicación cuando interviene en él con la intención de comprenderlo. De este modo se conseguiría transparencia en la relación entre los procesos de comprensión y de producción de datos.

Por último, sin salir de la dimensión metodológica, Ferrater (1994) enumera las distintas posiciones adoptadas respecto a la relación entre explicación y comprensión. Son éstas:

1. No hay comprensión, sino sólo explicación, a la cual puede reducirse todo método <<comprensivo>>.
2. Lo que se llama <<explicación>> es una de las formas que puede adoptar la comprensión.
3. Hay dicotomía entre comprensión y explicación; cada una de ellas tiene un empleo determinado que depende del tipo de tema investigado o del modo como se trate.
4. No hay dicotomía, o cuando menos dicotomía estricta, entre comprensión y explicación; en algunas áreas se entremezclan o combinan.

2.3.1.2.2 Dimensión histórico-ontológica

Heidegger y Gadamer desarrollan una idea de comprensión de carácter ontológico. La consideran como uno de los rasgos fundamentales del *Dasein*² humano (dimensión ontológica) y de la existencia histórica (dimensión histórico-ontológica). Para Heidegger, la comprensión es uno de los existenciarios de la Existencia, es decir, el carácter existencial original de la vida humana es comprender. Dicho de otro modo, comprender es un modo de ser (Ferrater, 1994).

Gadamer sigue la línea iniciada por Heidegger, completando la dimensión ontológica de la comprensión con una dimensión histórico-ontológica. Sus ideas acerca de la comprensión se alejan del sentido metodológico destacado en el apartado anterior. No se trata ya de un método para el acceso a las ciencias del espíritu, sino de una estructura ontológica del ser humano como ser histórico (Ferrater, op. cit.). El propio Gadamer (2000) lo expresa del siguiente modo:

“[...] Pero ésta [la comprensión] no es sólo el método de la ciencia histórica, sino una determinación fundamental de la realidad humana. Se basa en que tenemos unas vivencias que guardamos en la memoria. En el <<recuerdo>> se configuran estas vivencias para la comprensión del significado.” (p. 36).

La noción de comprensión del autor hay que situarla en el ámbito de la filosofía hermenéutica y en estrecha relación con los términos entendimiento e interpretación. Según Quintanilla (1979), la implicación de la comprensión (*Verstehen*) en todo entendimiento humano y la coimplicación de la interpretación en toda comprensión, es el supuesto fundamental del que parte la hermenéutica gadameriana. Tal como señala Hernández-Pacheco (1996), toda la teoría de Gadamer se dirige a dar una explicación de porqué la lectura de un texto o mensaje no siempre produce una comprensión inmediata, haciéndose necesaria en esos casos la interpretación de lo que se transmite. La comprensión no es algo inmediato sino el resultado de un esfuerzo hermenéutico:

“Es tarea de la hermenéutica elucidar el milagro de la comprensión, que no es una comunión misteriosa de las almas, sino una participación en el significado común. [...] El objetivo de todo entendimiento y de toda comprensión es el acuerdo en la cosa. Así, la hermenéutica tiene siempre la misión de crear un acuerdo que no existía o era incorrecto.” (p. 64).

Para resolver estas cuestiones gnoseológicas, Gadamer se centra en el problema de la transmisión histórica del sentido, es decir, de la interpretación de textos históricos, por entender que éste es un caso paradigmático de la dificultad de toda comprensión: los textos escritos no suelen comprenderse de forma inmediata y es fácil desvirtuar su sentido original. Gavilán (1999), por su parte, encuentra en el lenguaje la justificación del interés de Gadamer por los textos ya que *“[...] es en el lenguaje, según el filósofo alemán, donde se manifiesta la colectividad y donde nos insertamos en la tradición. Y es a través del lenguaje donde se hace posible cualquier tipo de experiencia: la forma de orientarse en el mundo, de dirigir la acción y la vida”* (p. 188). El lenguaje es el que posibilita la asimilación de los contenidos tradicionales al mediar entre el pasado y el

² Nos limitamos a traducir el término *Dasein* como *existencia*, sin entrar en otras especificaciones que se alejan de los propósitos de la investigación.

presente. Y es en dicha mediación donde el autor encuentra la justificación del porqué no se comprenden los textos de un modo inmediato, siendo ello una muestra de la finitud de la comprensión humana:

“[...] En la medida en que sólo percibimos lingüísticamente el mundo, y en la medida en que la palabra, el documento escrito, el texto en definitiva, no puede absorber en sí al sujeto que habla ni aquello de lo que se habla, resulta entonces que el objeto y sujetos del lenguaje no llegan a superar su alteridad. Por eso un mensaje, y por supuesto aquel que nos llega en la tradición, no puede ser inmediatamente entendido: es siempre ese texto extraño que hemos de esforzarnos en comprender por la vía de su constante reinterpretación” (Hernández-Pacheco, 1996; pp. 252-253).

La explicación de cómo se llega a comprender un texto, de cómo se produce la comprensión, viene dada a través del denominado <<círculo hermenéutico>>³. Básicamente, la comprensión de un texto queda completada cuando se alcanza un total acuerdo entre el sentido anticipado de la totalidad y todas sus particularidades. Si alguna de ellas no encajara en el sentido del todo sería necesaria la corrección y ampliación de éste. Así lo expone Gadamer:

“El movimiento de la comprensión discurre así del todo a la parte y de nuevo al todo. La tarea es ampliar en círculos concéntricos la unidad del sentido comprendido. La confluencia de todos los detalles en el todo es el criterio para la rectitud de la comprensión. La falta de tal confluencia significa el fracaso de la comprensión” (p.63).

Por su parte, Habermas (1981) reconoce igualmente la dimensión histórico-ontológica de la comprensión, además de la metodológica:

“[...] Y es en estos términos como hay que entender la Verstehen: no como un método especial de acceso al mundo social, que fuera peculiar a las ciencias sociales, sino como condición ontológica de la sociedad humana en tanto que producida y reproducida por sus miembros” (p. 154).

El autor considera igualmente que si la interpretación y la comprensión son rasgos fundamentales de la acción social misma, la cuestión de cómo las experiencias comunicativas se transforman en datos deja de ser sólo un problema metodológico. La comprensión es ahora entendida como el modo privilegiado de experiencia de los integrantes de un mundo; el científico social tendrá que servirse de este modo de experiencia para obtener sus datos. El sentido histórico-ontológico de la comprensión reitera, por tanto, la cuestión de la participación del intérprete y la interpretación de las acciones del otro.

2.3.1.2.3 Aportaciones de Wittgenstein

La estructura fragmentaria de la obra de Wittgenstein (1988) nos permite extraer, con cierta facilidad e independencia del contexto, algunas de las principales ideas del autor

³ Espacio en el que se forma el sentido ontológico de la comprensión, el movimiento que se forma entre la tradición y el intérprete (Gavilán, 1999).

en torno al fenómeno de la comprensión. De entre ellas, hemos elegido las siguientes por su especial relevancia para la investigación que presentamos:

(a) El autor resalta la arbitrariedad de los significados de las palabras y, por tanto, de su comprensión. Así, refiriéndose a la palabra “losa” y a su enseñanza ostensiva afirma que *“con una diferente instrucción la misma enseñanza ostensiva habría producido una comprensión enteramente diferente”* (p. 23). En realidad, estamos hablando de enseñanza y comprensión de convenios, que pueden ser tanto palabras como signos matemáticos convencionales.

(b) También establece una diferencia clara entre comprensión y aplicación:

“[...] La comprensión misma es un estado del cual brota el empleo correcto...La aplicación continúa siendo un criterio de comprensión” (p. 149).

Asimismo, el autor menciona la existencia de criterios de conducta descritos en términos de empleos concretos para saber si alguien no comprende, comprende de un modo incorrecto o lo hace correctamente. En el segundo caso, considera lícito hablar de una comprensión subjetiva, aunque también subraya que no está claro cuál sería el límite entre lo que pudiera considerarse una falta carente de regla (ausencia de comprensión) y otra sistemática (comprensión incorrecta subjetiva). Parece ser que *la interpretación del observador sobre lo que hace el sujeto juega un papel fundamental* en este punto.

(c) No es posible apresar el proceso mental de entender que parece ocultarse tras los fenómenos concomitantes de la comprensión, que son más visibles. En realidad, lo que hay detrás de las manifestaciones visibles de la comprensión, del empleo correcto del conocimiento, de lo que provoca que el sujeto diga “ahora entiendo”, no es un proceso mental oculto sino “ciertas circunstancias” justificativas: *“[...] ¡No pienses ni una sola vez en la comprensión como “proceso mental”! – Pues ésa es la manera de hablar que te confunde. Pregúntate en cambio: ¿en qué tipo de caso, bajo qué circunstancias, decimos “ahora sé seguir”? quiero decir, cuando se me ha ocurrido la fórmula. –*

En el sentido en que hay procesos (incluso procesos mentales) característicos de la comprensión, la comprensión no es un proceso mental” (p. 155).

(d) La comprensión de un instructor y la de su alumno son más profundas de lo que aparentan la explicación y los ejemplos dados. El instructor (un profesor) posee mayor comprensión de la que manifiesta con su explicación (su instrucción apunta más allá de los ejemplos) y el alumno adquiere una mayor comprensión de la que recibe a través de la explicación (es capaz de continuar otras series distintas a las presentadas como ejemplos). Wittgenstein enuncia algunas cuestiones respecto a este tema: *“¿... no ha de ser más profunda al menos la comprensión de la explicación? – Bueno, ¿tengo yo mismo, pues, una comprensión más profunda? ¿Tengo más de lo que doy en la explicación? – ¿Pero entonces de dónde viene el sentimiento de que tenía más?”* (p. 207).

Esta reflexión podría considerarse como un aporte más a la relación entre explicación y comprensión, aunque desde una perspectiva cognitiva.

(e) Es importante determinar qué es lo que ocurre en el momento preciso de comprender, qué hace posible esa comprensión y por qué ocurre. El autor intenta hacer

notar que en el período que transcurre desde que se da una orden hasta que se ejecuta existe un instante arbitrario, que nadie controla y justifica, donde se produce la comprensión, lo que incide de nuevo en la idea de que comprender no es un proceso mental.

2.3.2 Perspectiva Epistemológica

Presentamos a continuación algunas ideas y reflexiones en torno al fenómeno de la comprensión desarrolladas desde el punto de vista de la Epistemología. De entre los planteamientos existentes se han seleccionado sólo aquellas consideraciones estrechamente vinculadas con el problema de investigación, en especial las referentes al diagnóstico y evaluación de la comprensión, que se reflejarán como supuestos básicos de la Aproximación que se expone en el capítulo V.

2.3.2.1 Fuentes consultadas

Se han revisado las siguientes obras y autores:

- **Dancy, J. (1993).** *Introducción a la epistemología contemporánea.*
- **Feyerabend, P. (1991).** *Diálogos sobre el conocimiento.*
- **Piaget, J., Inhelder, B., García, R. y Vonèche, J. (1981).** *Epistemología genética y equilibración. Homenaje a Jean Piaget.*
- **Toulmin, S. (1977).** *La comprensión humana I. El uso colectivo y la evolución de los conceptos.*

2.3.2.2 Principales aportaciones

Toulmin (1977) vincula la noción de comprensión a cuestiones como las siguientes:

“¿Qué clase de cosas conocemos? ¿Cómo adquirimos ese conocimiento?... ¿Qué papel desempeñan en este proceso los elementos de juicio de nuestros sentidos?... ¿Cómo pueden justificarse y evaluarse nuestras pretensiones de conocimiento?” (p. 23).

Para el autor, el problema general de la comprensión humana consiste en elaborar un autorretrato epistémico que sea efectivo y realista, esto es, una explicación de las capacidades, procesos y actividades por las que el hombre adquiere comprensión de la Naturaleza, y ésta, a su vez, se hace inteligible para él. Esta cuestión no puede ser abordada en su totalidad por ninguna técnica o disciplina particular, sino que ha de traspasar los límites de la filosofía y estar en consonancia con las ideas y concepciones del resto de disciplinas que se ocupan en la actualidad de los procesos vinculados al conocimiento.

El programa de Toulmin acerca de la comprensión humana tiene como objetivo general responder a las tres cuestiones siguientes (pp. 42-44):

(a) Evolución de la comprensión tal como se halla representada por el desarrollo histórico de los conceptos: ¿a través de qué procesos sociohistóricos y de qué procedimientos intelectuales las poblaciones de conceptos y los sistemas conceptuales –

los métodos y los instrumentos de la comprensión colectiva – cambian y se desarrollan al ser transmitidos de una generación a la siguiente?

(b) Desarrollo de la comprensión humana tal como se expresa en la captación psicológica de conceptos: ¿a través de qué procesos fisiológicos y secuencias psicológicas las habilidades y facultades conceptuales – los métodos y los instrumentos de la comprensión individual – se adquieren, se emplean y, a veces, se pierden en el curso de la vida?

(c) Evaluación racional de la comprensión humana y el valor intelectual de los conceptos: ¿cómo debemos – en todo caso para nuestra generación – cribar, comparar y, por tanto, justificar la confianza crítica en nuestros conceptos y creencias mejor fundados?

Dancy (1993), por su parte, presenta una descripción de lo que denomina *problema de las otras mentes*, donde se llegan a intuir las dificultades inherentes al diagnóstico y la evaluación de la comprensión:

“Cada uno de nosotros conoce la naturaleza de sus propios estados sensoriales, pero ¿podemos conocer la naturaleza de los estados sensoriales de los demás? Aún más, ¿podemos saber si hay otras mentes que tienen estados sensoriales distintos a los de cada uno de nosotros?” (p. 86).

El autor confronta los argumentos desarrollados por varias posiciones epistemológicas en torno a este problema, incluido el argumento escéptico, en el que se pone en tela de juicio la posibilidad de comprender proposiciones sobre mentes diferentes a la nuestra, y llega a aceptar un vínculo de unión entre el estado mental del otro y nosotros como agentes observadores, un enlace que no es del todo fortuito o arbitrario. Lo expresa del siguiente modo:

“[...] nuestra única esperanza de mostrar cierta comprensión de las proposiciones sobre los estados mentales de otros es la de aceptar una relación no-contingente entre los estados mentales y la conducta, eliminando, de este modo, la posibilidad de que se separen demasiado.” (p. 91).

Respecto a esta cuestión nos interesa destacar, por su repercusión en la investigación, el convencimiento que algunos autores manifiestan acerca de la conveniencia de adoptar una posición externa al sujeto a la hora de afrontar la descripción de su conocimiento y comprensión. Tal es el caso de Feyerabend (1991), quien afirma:

“Reconozco que hay cuentos que se jactan de ser teorías del conocimiento, pero en lugar de describir el proceso de adquisición del conocimiento desde afuera, como cualquier teoría que se precie debe hacer, forman parte de este proceso y tienen un alcance bastante limitado.” (p.112).

Otro de los autores que ha tratado explícitamente el tema de la comprensión desde este enfoque epistemológico es Piaget, para quien ser capaz de realizar una determinada acción práctica o identificar el *cómo* hacer algo no debe llegar a contemplarse como comprensión. De hecho, en el proceso mediante el cual el ‘hacer’ es transformado en el ‘conocer’ la comprensión se alcanzaría en una etapa posterior a la acción. En dichos

planteamientos se puede detectar, por tanto, una dualidad entre *hacer* y *conocer* o *acción* y *conceptualización*, siendo este último el significado que el autor da a la comprensión.

Por otro lado, el progreso del conocimiento es producto de la denominada *equilibración* (Piaget et. al., 1981), una autorregulación que proporciona al sujeto una sensación de comprensión que siempre será relativa:

“[...] el criterio de equilibrio de un sub-sistema una vez integrado no es otro que la impresión final de comprensión, así como el éxito en la solución de problemas, dos caracteres siempre relativos al nivel considerado antes de su superación.” (p. 123).

En la teoría de Piaget adquiere especial importancia la acción del sujeto sobre el medio que le rodea. La idea de un sujeto activo como elemento clave para lograr la comprensión de la realidad es una constante en sus argumentos:

“No creo ni en el carácter innato de las estructuras cognoscitivas ni en una simple sumisión a los objetos, sino que pongo el acento en las actividades del sujeto y no veo en qué las disminuyo al pensar que éstas sólo se producen cuando hay problemas que resolver.” (p. 50)

“Para que exista información se necesita algo más que entorno; es necesario que el sujeto dirija sus esquemas sobre los objetos para conferirles significado.” (p. 71)

“[...] aquello que se hace comprensible en la realidad lo hace gracias a las inferencias operatorias del sujeto.” (p. 127)

En el mismo orden de reflexión, las acciones realizadas se muestran además como el vínculo de unión con el observador que pretende el diagnóstico del conocimiento. Las manifestaciones observables son, en consecuencia, las que proporcionan información de carácter objetivo sobre la comprensión del sujeto, al permanecer, según Piaget, independientes de las posibles descripciones realizadas por el observador⁴:

“Pero lo que es observable, y únicamente, en estos hechos me baso para hablar de estructuras, no es que el niño cuente o hable del problema que se le propone, sino lo que él “sabe hacer”. [...] El sujeto, ante diferentes problemas, responde con procedimientos que son normalmente los mismos y que son los que dan lugar a una semi-formalización; pueden, pues, traducirse en operaciones y construir a partir de ellos una estructura. Dicho de otra manera, la estructura está bien construida para el observador y sin embargo no ha sido producida en absoluto por el pensamiento del observador, ya que se trata de la descripción de unos actos que el sujeto ha sido capaz de “hacer”, de ejecutar, independientemente de lo que piense sobre ello o de lo que diga.” (pp. 86-87).

⁴ Estas consideraciones sustentan una parte del modelo que utilizamos para el diagnóstico y valoración de la comprensión del conocimiento matemático y que se expone con detalle en el capítulo V.

2.3.3 Perspectiva Psicológica

2.3.3.1 Fuentes consultadas

Se han revisado las siguientes obras y autores:

- Arnold, W., Eysenck, H. J. y Meili, R. (1979). *Diccionario de Psicología*.
- Dorsch, F. (1985). *Diccionario de Psicología*.
- Genovard, C. (1980). *Diccionario de Psicología*.
- Morin, E. (1994). *El Método. El conocimiento del conocimiento*.
- Schank, R. C. (1988). Una explicación de la inteligencia. En R. J. Sternberg y D. K. Detterman (Eds.) *¿Qué es la inteligencia? Enfoque actual de su naturaleza y definición*
- White, R. y Gunstone, R. (1992). *Probing Understanding*.

2.3.3.2 Principales aportaciones

Una revisión de los diccionarios de Psicología proporciona algunas ideas sobre lo que se entiende por comprensión en este campo. Así, de Genovard (1980) extraemos la siguiente caracterización:

“Experiencia, conocimiento o entendimiento de un objeto, acontecimiento, idea o situación e incluso experiencia verbal. || Proceso de aprender o captar un significado” (p.86).

En Arnold, Eysenck y Meili (1979) encontramos una explicación para la expresión “*Verstehende Psychologie*” (Psicología de la comprensión). Esta psicología es considerada: “[...] como la quintaesencia de la interpretación de la ciencia del espíritu que trata de penetrar en la vida espiritual de una persona o en la estructura social de un grupo. Procede por vía deductiva y descriptiva, y trata de conocer las estructuras de la personalidad: disposiciones actitudinales y rendimiento, formas sociales y de vida.” (pp.498-499). La comprensión es vista en este caso como un método de conocimiento científico, característico de las ciencias del espíritu, que se aplica para poder obtener evidencia y testimonios sobre la conducta y las acciones del otro.

En Psicología, la comprensión es considerada también como un método con el que poder hallar estructuras mentales del ser humano. A diferencia de la psicología experimental, caracterizada por desarrollar formulaciones meramente descriptivas, la psicología basada en la comprensión manifiesta una naturaleza explicativa; está preocupada por proporcionar explicaciones e interpretaciones de fenómenos psíquicos.

Como aproximación general a la noción de comprensión desde el campo de la Psicología, Dorsch (1985) recoge la siguiente acepción: “[...] a diferencia de la mera percepción, [la comprensión es] la recepción consciente de un contenido vivencial o perceptivo, ordenadora de la experiencia en un contexto de significación” (p. 133). Esto es, la comprensión tiene la cualidad de ordenar las experiencias de los sujetos y está ligada a lo significativo. Asimismo, reconoce cuatro variantes para el concepto de comprensión (p. 133):

(a) Comprensión como captación empática de motivos y fundamentos de acciones humanas (empatía del observador con el sujeto observado al reconocerse la posibilidad de acceso a la intimidad del otro);

(b) Comprensión como aprehensión de relaciones de cualquier tipo;

(c) Comprensión como conocimiento del significado de signos lingüísticos (podría considerarse como caso particular de (b) si los significados de los signos lingüísticos se describen en términos de relaciones aprehendidas);

(d) Comprensión como método de conocimiento científico o como interpretación de hechos y textos (hermenéutica).

Por su parte, Morin (1994) asigna dos sentidos a la comprensión. En el primero de ellos interviene el concepto de representación:

"... la comprensión es el conocimiento que aprehende todo aquello de lo que podemos hacernos una representación concreta, o que podemos captar de manera inmediata por analogía" (p.157).

Se trata de un concepto preferencial en la psicología cognitiva, puesto que la tesis básica de esta disciplina es la de suponer que la mente opera con representaciones y que la cognición consiste, precisamente, en la manipulación de tales representaciones entendidas como símbolos mentales.

El segundo sentido de Morin se restringe ya al ámbito de lo humano y hace referencia al conocimiento de las acciones realizadas por los sujetos:

"... la comprensión es el modo fundamental de conocimiento para cualquier situación humana que implique subjetividad y afectividad y, más centralmente, para todos los actos, sentimientos, pensamientos de un ser percibido como individuo/sujeto" (p. 157).

La comprensión así entendida transcurre a través de un bucle de proyección/identificación. Para comprender lo que siente (piensa) una persona debemos proyectarnos hacia ella, ponernos en su piel y tratar de experimentar lo vivido por ella, aunque sin dejar de ser uno mismo, mediante la identificación de sus sentimientos (pensamientos) con algunos de los nuestros ya sentidos (pensados) previamente. En palabras del propio autor, *"comprendemos lo que sienten los demás por proyección de lo que nosotros mismos sentiríamos en propia ocurrencia, y por retorno identificador sobre uno del sentimiento de este modo proyectado sobre los demás" (p. 158).*

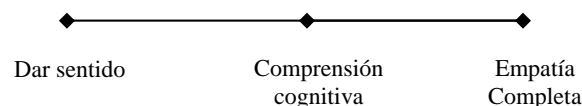
Esta visión sobre el proceso de comprender posibilita establecer el vínculo existente entre comprensión y mimesis, términos que para Morin se suscitan mutuamente. Por un lado, la comprensión supone, como hemos visto, algún tipo de mimesis, y por otro, cualquier comportamiento mimético proporciona alguna comprensión en la medida en que el imitador entra o se proyecta en el espíritu del imitado dejándose poseer por él.

Con un enfoque diferente y a partir de una reflexión inicial en torno a la naturaleza de la comprensión, Schank (1988) llega a elaborar la siguiente caracterización para la idea de comprender: *"consiste en procesar experiencias nuevas en función del aparato cognitivo del que uno dispone" (p. 146). "[...] la comprensión... supone recordar el fenómeno más recientemente experimentado y ser capaz de utilizar las expectativas generadas por ese recuerdo, como ayuda en el procesamiento de la experiencia actual"*

(p. 148). Asimismo, identifica la comprensión como una estructura de la memoria de nivel superior: “[...] *comprender es encontrar la estructura de nivel superior más adecuada para explicar un input y crear una nueva estructura de memoria para ese input en función de la estructura de nivel superior que más estrechamente se relaciona con ella. Comprender, por tanto, es un proceso que tiene como base la memoria, particularmente la memoria referente a las experiencias más estrechamente relacionadas, accesibles a través del recuerdo y expresables a través de la analogía*” (pp. 148-149).

De esta caracterización se deduce que la comprensión está condicionada por las experiencias previas y por la capacidad para retomar la información correspondiente almacenada en la memoria y utilizarla de algún modo ante las nuevas situaciones que lo requieran. Schank subraya, no obstante, que las experiencias y recuerdos mencionados no son los únicos condicionantes de la comprensión. Los objetivos, expectativas, creencias y estilos de vida de los sujetos también influyen notablemente en sus apreciaciones de los sucesos, de manera que sujetos diferentes pueden tener una comprensión distinta de un mismo acontecimiento si alguno de los dos condicionantes mencionados (experiencia y memoria por un lado, y objetivos y creencias por otro) difieren entre ellos. Del mismo modo, la comprensión de las acciones realizadas por otro (piénsese en la relación alumno-investigador) será tanto más completa y ajustada a la realidad cuanto más compartidas sean las experiencias, creencias, objetivos y memorias de ambos.

El hecho reconocido por Schank de que las experiencias previas y la memoria de una persona condicionan su comprensión conlleva la aceptación de que pueda haber distintos tipos, grados o niveles de comprensión, según sean esas experiencias y memorias. En tal sentido, el autor presenta un modelo con tres tipos de comprensión distribuidos en el orden lineal que se ilustra en la figura:



Lo que Schank denomina “dar sentido” constituye la forma más pobre de comprensión y se refiere a la interpretación que hace un sujeto de los acontecimientos que ocurren a su alrededor en términos de imágenes coherentes y, por lo general, incompletas. El punto medio del modelo lo ocupa la “comprensión cognitiva”, un tipo de comprensión más completa que la anterior pero que no alcanza la “empatía total”, extremo final del continuo en el que la comprensión se hace máxima.

Sin salir de la esfera psicológica, White y Gunstone (1992) se interesan por la naturaleza de la comprensión, por lo que está involucrado en ella y por la manera de comprobar si un estudiante comprende objetos de distinta naturaleza. Asimismo, son contrarios a las propuestas en las que se define la comprensión, porque, según ellos, se trata de un constructo tan complejo que no puede encapsularse en definiciones de extensión tan reducida que terminan provocando un efecto restrictivo sobre la enseñanza y el aprendizaje y sobre los procedimientos empíricos de valoración. Por el contrario, prefieren adoptar la descripción extensa basada en las categorías siguientes:

- *Comprensión de conceptos y disciplinas*: Las definiciones asociadas a los conceptos, aún siendo importantes, no son imprescindibles para su comprensión. Por otra parte, la comprensión de un concepto o disciplina no ha de verse como un estado dicotómico (todo o nada), sino como un continuo sin límites que nunca llega a completarse, es decir, un continuo que no debe considerarse unidimensional sino multidimensional, como se explica más adelante.

- *Comprensión de elementos simples de conocimientos*: **Lo esencial para comprender una regla o un algoritmo, según los autores, es ser capaz de explicar el procedimiento que subyace en él.** De este modo surge el concepto de *explicación* en relación con el de comprensión, aunque este también presenta dificultades importantes cuando se trata de describir su naturaleza:

“Aunque las explicaciones son partes clave de la comprensión de destrezas intelectuales, y de proposiciones y otros elementos simples, la naturaleza de la explicación resulta ser curiosamente difícil de describir” (p. 8).

- *Comprensión de comunicaciones extensas*: White y Gunstone (op. cit.) establecen una diferencia sustancial entre la naturaleza de la comprensión de conceptos o de elementos simples de conocimiento, por un lado, y la naturaleza de las comunicaciones por otro. En el primer caso, la comprensión es vista como un **estado** de conocimiento, mientras que en una comunicación u objeto que pretende transmitir o evocar algo, la comprensión hay que entenderla, más bien, como el **proceso** de análisis de las palabras y otros símbolos que conducen a la construcción de significado.

- *Comprensión de situaciones*: La comprensión de una situación requiere establecer un paralelismo entre ella y las experiencias previas relacionadas. Se mide en términos de capacidad para seleccionar la información relevante, explicar cómo y por qué surge esa situación y predecir qué sucederá en el transcurso futuro de la misma.

- *Comprensión de personas*: La comprensión de la conducta de un sujeto supone ser capaz de explicar las acciones que este realiza y de predecir las que podría realizar. *Explicación y predicción* se convierten en elementos indicativos de la comprensión.

Desde el punto de vista de su representación, los autores no consideran adecuado observar la comprensión como un constructo unidimensional con distintos grados o niveles. Por el contrario, proponen considerarla como un **constructo multidimensional**, dado que su elevada complejidad hace que la escala lineal resulte limitada e insuficiente. La comprensión es una actividad privada, individual, en la que el sujeto que comprende tiene la última palabra. Sujetos distintos que hayan recibido una misma instrucción o se hayan enfrentado a las mismas situaciones (de aprendizaje o no) adquieren una comprensión diferente, no pudiéndose representar tales diferencias de forma precisa mediante simples posiciones en un modelo lineal.

Respecto al diagnóstico y la evaluación de la comprensión, White y Gunstone ponen de manifiesto la dificultad que supone estimar la comprensión de un sujeto y tasarla mediante un valor concreto. Igualmente, la relación entre la comprensión de dos personas resulta compleja, puesto que no existen criterios concluyentes con los que poder decir que una persona comprende un concepto más o de mejor forma que la otra. Inclusive se considera la posibilidad de una pérdida en la comprensión: “[...] Incluso si

la primera persona conoce todo lo de la otra y más, tendríamos que considerar si el conocimiento extra añade o resta comprensión” (p. 6). Pero, además, los autores entienden el diagnóstico y la evaluación de la comprensión como una actividad claramente subjetiva, a pesar de los esfuerzos que se realizan en las investigaciones para intentar objetivarla. Esta subjetividad se manifiesta en (1) el juicio sobre la relevancia del conocimiento en la comprensión; (2) el estatus asignado al sujeto cuya comprensión se está valorando; (3) las características de la persona que realiza la valoración.

2.3.4 Otros enfoques y aportaciones

El fenómeno de la comprensión también es objeto de reflexión en otras áreas de conocimiento, como la Matemática o la Lingüística.

Los análisis en torno a la comprensión en Matemáticas suelen estar provocados por las reflexiones sobre la propia actividad profesional y son de escaso interés para el tipo de investigación que aquí se presenta. Por lo general, no suelen ser estudios profundos ni se realizan con la intención de aportar nueva información de carácter didáctico o cognitivo sobre el fenómeno de la comprensión. Como ejemplos, son especialmente conocidas las reflexiones de Hadamard y Poincaré, quienes consideran la comprensión como un proceso continuo de trabajo mental, consciente e inconsciente, seguido de un instante de súbito ‘insight’ o ‘iluminación’ (Sierpiska, 1994; Guzmán, 1996).

Por su parte, el interés en Lingüística se centra en la comprensión del texto oral y escrito, un tema sin duda importante pero que resulta secundario para los propósitos de esta investigación.

2.4 La noción de comprensión del conocimiento matemático

Con independencia de los estudios y publicaciones generales que se han mencionado en los apartados anteriores, existe un cuerpo de conocimientos, teorías y opiniones sobre la comprensión del conocimiento matemático que va adquiriendo cada vez mayor entidad en el campo de la investigación en Educación Matemática.

En los apartados que siguen se expone una revisión no exhaustiva de dichos conocimientos, aunque lo suficientemente representativa como para configurar un panorama completo y preciso del estado actual en el que se encuentra la investigación en este tema.

2.4.1 Organización de los antecedentes y fuentes consultadas

La exposición se inicia con unos preliminares sobre la importancia de la comprensión en Educación Matemática, la evolución de los trabajos realizados en los últimos años y una clasificación genérica de los tipos de estudios existentes. A continuación se realiza una exposición detallada de las aproximaciones más relevantes y se incluyen, para terminar, algunas aportaciones centradas en las relaciones de la comprensión del conocimiento matemático con otras nociones vinculadas de similar complejidad. Para ello se han consultado y analizado las siguientes fuentes:

- **Ainley, J. y Lowe, A. (1999).** Can written questions differentiate between degrees of understanding?
- **Bender, P. (1996).** Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts.

- **Byers, V. y Erlwanger, S. (1985).** Memory in Mathematical Understanding.
- **Byrnes, J. P y Wasik, B. A. (1991).** Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning.
- **Carpenter, T. y Lehrer, R. (1999).** Teaching and learning mathematics with understanding.
- **Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997).** Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas.
- **Davis, R. B. (1992).** Understanding “Understanding”.
- **Duffin, J. y Simpson, A. (1997).** Towards a new theory of understanding.
- **English, L.D. y Halford, G.S. (1995).** *Mathematics Education: Models and Processes.*
- **Farnham-Diggory, S. (1994).** Paradigms of Knowledge and Instruction.
- **Fennema, E. y Romberg, T. A. (1999).** *Mathematics classrooms that promote understanding.*
- **Font, V. (2000).** Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.
- **Díaz-Godino, J. (2000).** Significado y comprensión de los conceptos matemáticos.
- **Díaz-Godino, J. y Batanero, C. (1994).** Significado Personal e Institucional de los Objetos Matemáticos.
- **Gusev, V. A. y Safuanov, I. S. (2000).** Some theoretical problems of the development of mathematical thinking.
- **Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997).** *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding.*
- **Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992).** Learning and Teaching with understanding.
- **Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986).** Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis.
- **Janvier, C. (Ed.) (1987).** *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.*
- **Kieran, C. (1994).** Doing and seeing things differently: a 25-year retrospective of mathematics education research on learning.
- **Koyama, M. (1993).** Building a two axes process model of understanding mathematics.
- **Koyama, M. (1997).** Research on the complementarity of intuition and logical thinking in the process of understanding mathematics: an examination of the two-axes process model by analyzing an elementary school mathematics class.
- **Koyama, M. (2000).** A research on the validity and effectiveness of “two-axes process model” of understanding mathematics at elementary school level.
- **Nakahara, T. (1994).** Study of the representational system in mathematics education.
- **Nesher, P. (1986).** Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related?
- **Pirie, S. y Kieren, T. (1989).** A Recursive Theory of Mathematical Understanding.
- **Pirie, S. y Kieren, T. (1994).** Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it?

- **Resnick, L. B. (1992).** From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge.
- **Rico, L. (2000).** Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática.
- **Rittle-Johnson, B. y Siegler, R. S. (1998).** The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: a review.
- **Romero, I. (2000).** *Representación y Comprensión en Pensamiento Numérico.*
- **Sierpinska, A. (1994).** *Understanding in Mathematics.*
- **Sierpinska, A. (1990).** Some Remarks on Understanding in Mathematics.
- **Sfard, A. (1991).** On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.

2.4.2 Consideraciones preliminares

2.4.2.1 La comprensión: objetivo fundamental en la educación matemática

De la mayoría de las publicaciones revisadas se desprende la idea de que una enseñanza basada en la comprensión resulta fundamental para el desarrollo de una educación matemática adecuada, completa y de calidad. English y Halford (1995) van más allá y presentan, a través de algunos casos concretos, la manera en la que la comprensión asiste al sujeto a la hora de desarrollar procedimientos y estrategias de resolución de tareas matemáticas. Tal como reconocen:

“Un beneficio de la comprensión es que puede guiar el desarrollo de estrategias y procedimientos apropiados” (p. 77).

En los últimos años se ha venido incrementando el interés por este tema, sobre todo desde que Byers y Erlwanger (1985) reconocieron la importancia de que todos los alumnos llegaran a comprender las matemáticas para poder cumplir con las exigencias impuestas por el mundo tecnológico actual. Algunos autores más recientes, como Hiebert et al. (1997), asumen incluso que la comprensión debería ser el objetivo fundamental del que dependen todos los demás; los motivos son diversos:

- Las matemáticas aprendidas con comprensión proporcionan privilegios y ventajas intelectuales (Rico, 1997a) útiles para conocer el mundo que nos rodea.

- Debido a la continua evolución, resulta imposible anticipar todas las destrezas que los estudiantes necesitarán a lo largo de su vida, de ahí que “[...] *a menos que los alumnos aprendan con comprensión es probable que cualquier conocimiento que adquieran les sea de poca utilidad fuera de la escuela*” (Carpenter y Leher, 1999; p. 20).

- Para desenvolverse en la sociedad actual se requieren unos determinados conocimientos matemáticos cuya comprensión es necesaria. Esta necesidad queda justificada también por el carácter jerárquico de la propia disciplina, que hace indispensable la comprensión de conocimientos previos para poder abordar el estudio de otros más complejos. Como señala Davis (1992), los estudiantes necesitan comprender, y si la instrucción que reciben no se ajusta a sus exigencias cognitivas se ven obligados a crear sus propias formas de comprensión, no siempre adecuadas.

- La comprensión produce experiencias intelectuales satisfactorias, mientras que su ausencia es frustrante y provoca sensación de fracaso en los estudiantes (Hiebert et al.,

1997). En este sentido, el fomento de actitudes favorables hacia la matemática, objetivo común en los distintos niveles educativos, no se puede concebir sin comprensión.

Pero, si es evidente la importancia que tiene la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas, queda aún por determinar qué tipo de enseñanza es la más idónea para facilitar dicha comprensión. Con tal finalidad, existen en la actualidad programas de enseñanza experimentales (Carpenter, Fennema et al., 1999) y proyectos curriculares (Goñi, 2000) basados en el aprendizaje comprensivo de las matemáticas.

2.4.2.2 Evolución histórica de los estudios sobre comprensión del conocimiento matemático

Kieran (1994) identifica tres periodos bien diferenciados en la evolución que ha seguido la investigación sobre comprensión en el campo de la Educación Matemática en las últimas décadas:

1º) En los años 70 el aprendizaje estaba separado de la comprensión, de manera que se creía posible la consecución de un aprendizaje sin comprensión real. Aunque los autores trataban el fenómeno, no llegaban a delimitarlo con claridad. Algunos identificaban el término “comprender” con conocer, aplicar y analizar, mientras que otros lo utilizaban como sinónimo de logro o recuerdo inmediato. En este sentido era frecuente la idea de comprensión correcta o exacta y se desarrollaban tests de evaluación para puntuar los logros conseguidos.

2º) El trabajo de Skemp, a finales de los 70, aporta una nueva dimensión al dirigir la atención hacia el análisis psicológico de los procesos mentales involucrados. El autor llega a caracterizar distintos tipos de comprensión del conocimiento matemático (dicotomía entre comprensión relacional y comprensión instrumental) y sienta las bases para el desarrollo posterior de los modelos teóricos propuestos en los 80 y principios de los 90. La comprensión comienza a verse a partir de aquí como un fenómeno complejo, dejándose de lado la visión unidimensional centrada en lo correcto y lo erróneo. Al mismo tiempo, se abordan cuestiones relacionadas con los tipos de conocimiento, las diferencias entre ellos o la distinción entre destreza y comprensión.

3º) La discusión en torno a la dicotomía entre tipos de comprensión y tipos de conocimiento se sitúa en los últimos años en un marco más general. Los tipos de conocimiento se entienden como aspectos necesarios para la comprensión de las matemáticas y el problema del aprendizaje comienza a relacionarse estrechamente con el de la comprensión, pues el aprendizaje se concibe como aprendizaje con comprensión. La comprensión no se concibe sólo como un logro, sino como una actividad en continuo desarrollo.

Kieran (op. cit.) destaca, por último, que los cambios producidos muestran una forma distinta de pensar sobre la comprensión del conocimiento matemático. No obstante, reconoce que la reflexión se viene desarrollando en los últimos años a un elevado nivel de precisión, profundidad y prudencia como consecuencia de una notable evolución en los métodos de investigación en Educación Matemática.

2.4.2.3 Tipos de investigaciones

A modo de referencia, Sierpinska (1994) distingue tres tipos de aproximación al fenómeno de la comprensión⁵:

(a) Estudios que se centran en fomentar la comprensión de los sujetos mediante el desarrollo de propuestas didácticas y la utilización de materiales de enseñanza.

(b) Estudios sobre diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático.

(c) Trabajos teóricos sobre modelos de comprensión, tanto descriptivos como prescriptivos, que se clasifican a su vez en cuatro tipos:

- Modelos que proporcionan una jerarquía con distintos niveles de comprensión.
- Teorías que abordan la comprensión desde la perspectiva de un modelo mental o de una estructura cognitiva en evolución.
- Modelos en los que el proceso de comprensión es contemplado como un juego dialéctico entre dos modos contrapuestos de captar o comprender el objeto de comprensión.
- La aproximación histórico-empírica, donde la atención está puesta en los obstáculos (epistemológicos y de desarrollo) y en la superación de éstos como medio para alcanzar la comprensión.

2.4.3 Aproximaciones al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático

En la actualidad, no existe una única perspectiva desde la que estudiar el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático. En este apartado se describen las principales características de las aproximaciones más importantes, como son: la posición representacionista, la perspectiva histórico-empírica de Sierpinska (1990, 1994), el modelo recursivo de Pirie y Kieren (1989, 1994), el modelo de proceso de Koyama (1993, 1997, 2000) y, en menor medida, la teoría del significado y la comprensión de los objetos matemáticos (Díaz-Godino, 2000; Díaz-Godino y Batanero, 1994) entre otros. Veamos a continuación, en apartados separados, un resumen comentado de cada una de dichas aproximaciones.

2.4.3.1 La posición representacionista

El concepto de representación aparece ligado al de comprensión en numerosas investigaciones en Educación Matemática. Así, Hiebert y Carpenter (1992) proponen un marco teórico basado en el concepto de representación y en el modelo de procesamiento de la información desarrollado en el ámbito de la psicología cognitiva (Resnick y Ford, 1990). Los autores parten de los siguientes supuestos:

(1) Las ideas matemáticas deben ser representadas de algún modo para poder comunicarlas y pensar sobre ellas. La comunicación requiere representaciones externas,

⁵ Según la autora esta tipología sirve más bien para catalogar las publicaciones y no a los investigadores o a los proyectos de investigación, que podrían situarse en más de una aproximación.

mientras que las representaciones internas son necesarias para pensar y operar mentalmente. Los estudios sobre comprensión han de tener en cuenta ambos tipos de representación.

(2) Existe algún tipo de relación entre las representaciones externas e internas. Por un lado, las características de las representaciones externas influyen de algún modo en la naturaleza y características de las representaciones internas. Por otro, las representaciones externas revelan algo acerca de cómo los sujetos representan internamente la información.

(3) Aunque Hiebert y Carpenter reconozcan abiertamente la imposibilidad de especificar la naturaleza exacta de las representaciones internas y de las conexiones entre ellas (tan sólo podrán ser inferidas a través de las representaciones externas), proponen que pensemos en dichas redes y conexiones en términos de: (a) estructuras jerárquicas verticales (unas representaciones son incluidas en otras como casos particulares); (b) telas de araña constituidas por *nodos* (representaciones internas) unidos entre sí mediante *segmentos* (relaciones). El grado o intensidad de las relaciones internas podría determinarse observando el número y la fuerza de las conexiones empleadas por los sujetos (aspecto observable) pero no así la naturaleza de dichas relaciones (aspecto no observable).

A partir de estos supuestos, los autores desarrollan una idea de comprensión en términos de cómo la información es representada y conectada internamente:

“Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si forma parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se enlaza a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes” (p. 67).

Según este modelo, el aumento de la comprensión se interpreta como crecimiento de las redes de representaciones mentales, producido por la incorporación de nuevas representaciones internas a la red ya existente o por la reestructuración o reorganización de la misma a causa de la creación de nuevas conexiones entre representaciones. Estas ideas invitan a pensar en las redes internas como un constructo dinámico y no estático, lo que es coherente con la idea de comprensión como fenómeno de carácter dinámico.

La trascendencia y relevancia de los planteamientos anteriores se ponen de manifiesto en la influencia ejercida sobre la fundamentación y el desarrollo de numerosos estudios y líneas de investigación, como así ocurre con una parte de los trabajos desarrollados dentro del grupo Pensamiento Numérico⁶ (Castro y Castro, 1997; Castro, Rico y Romero, 1997; Rico, 2000; Romero, 2000). Romero (2000), por ejemplo, se expresa en los siguientes términos:

“nuestra noción de comprensión asume que el conocimiento se caracteriza por ser rico en relaciones... Suponemos que el conocimiento se representa internamente, y que esas representaciones internas están estructuradas. La comprensión de un

⁶ Grupo subvencionado por el PAI de la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía.

concepto consiste entonces en el modo y grado de integración en la estructura de conocimientos de un sujeto”.

La autora plantea cinco actividades asociadas a los sistemas de representación para garantizar la comprensión de los conceptos matemáticos: (a) identificar las representaciones, (b) realizar transformaciones dentro de cada uno de los sistemas de representación, (c) cristalizar en objetos conceptuales las relaciones o procesos que aparecen y (e) modelizar situaciones a través de los sistemas de representación asociados a ese conocimiento matemático.

Por otra parte, Castro, Rico y Castro (1997) reconocen que la noción de representación es un instrumento adecuado para el estudio de los fenómenos de comprensión y muestran la necesidad de emplear de forma coordinada una pluralidad de sistemas de representación para poner de manifiesto aspectos esenciales de las estructuras numéricas. La comprensión tiene también aquí una dependencia considerable de la representación como elemento caracterizador de los procesos cognitivos (sólo son cognitivos aquellos procesos que manipulan representaciones), hasta el punto de que incluso se llega a identificar la comprensión con una representación:

“Siguiendo a Wittrock (1990), consideramos que la comprensión es <<una representación estructural o conceptualmente ordenada de las relaciones entre las partes de la información que se debe aprender, y entre esa información y esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencia>>” (p. 363).

En la misma línea, Nakahara (1994) analiza el *Sistema Representacional*, poniendo de manifiesto algunas de sus limitaciones, y clasifica los distintos modos de representación externa que se emplean en Educación Matemática en cinco categorías fundamentales: Simbólica, Lingüística, Ilustrativa, Manipulativa y Realista. Asimismo, identifica el *Sistema Representacional (Externo)* con el conjunto de dichas categorías y sus relaciones; sistema al que atribuye algunas desventajas, como la ambigüedad en la conexión entre las representaciones externas y sus significados matemáticos o la limitación en el estudio del aspecto interno de los procesos de pensamiento de los sujetos. Precisamente, para solucionar las dificultades mencionadas, Nakahara propone una extensión del Sistema Representacional (Externo) para incluir las representaciones internas o privadas (individuales) y las representaciones (tanto externas como internas) compartidas por el grupo-clase.

English y Halford (1995) también consideran la comprensión de un tópico matemático como el proceso consistente en la elaboración de una representación o modelo mental que incluya las relaciones esenciales que lo caracterizan. Cada sujeto elabora su propio modelo mental en función de las relaciones particulares que sea capaz de representar internamente. Tal como subrayan los autores:

“La esencia de comprender un concepto es poseer una representación mental o modelo mental que verdaderamente refleje la estructura de este concepto. [...] comprender el número es tener un modelo mental de él que incluya todas las relaciones esenciales de los números, al menos en el dominio donde el concepto es utilizado.” (p. 57).

Los tipos de relaciones internas existentes en el modelo mental de un conocimiento matemático resultan fundamentales para su comprensión. Para los autores, lo esencial de los modelos mentales son, precisamente, las relaciones que representan, que no sólo se constituyen con las definiciones formales, sino a partir de las propiedades concretas fruto de las experiencias. La experiencia, por tanto, posibilita el enriquecimiento y refinamiento progresivo del modelo mental original, dando lugar de este modo a un desarrollo de la comprensión.

Por su parte, Davis (1992) examina las principales características de lo que denomina la nueva visión emergente de la Educación Matemática. Entre las nociones clave de este programa se encuentra la noción de representación mental del conocimiento. Las matemáticas son consideradas como “[...] *una forma de pensar que involucra representaciones mentales de situaciones problema y de conocimiento pertinente...*” (p. 226).

Por último, Janvier (1987) enumera algunas características de la comprensión claramente relacionadas con la noción de representación:

“1. La comprensión puede ser comprobada por la realización de actos mentales definidos. Esto implica una serie de actividades complejas.

2. Presupone acciones automáticas (o automatizadas) controladas por procesos mentales de reflexión y planificación. Por lo tanto, la comprensión no puede ser identificada exclusivamente con actividades mentales reflejadas en conceptos.

3. La comprensión es un proceso en desarrollo. La construcción de un sistema ramificado de conceptos en el cerebro es lo que proporciona la comprensión. Los conceptos matemáticos no comienzan a construirse desde el momento en el que son introducidos en clase por el profesor. Este principio bien conocido no se pone en práctica fácilmente ni a menudo en la enseñanza diaria.

4. Algunos investigadores intentan determinar etapas en la comprensión. Nos inclinamos a creer que la comprensión es un proceso acumulativo basado principalmente en la capacidad de tratar con un conjunto de representaciones siempre enriqueciéndose. La idea de etapas supone una ordenación unidimensional contraria a las observaciones” (p. 67)

2.4.3.2 La aproximación histórico-empírica de Sierpinska (1990,1994)

Sierpinska (1994) presenta una aproximación a la comprensión que trata de responder a cuestiones como la siguiente: ¿qué significa comprender tal o cual noción en matemáticas?

En sus planteamientos, la especificidad del conocimiento matemático es reconocida como un aspecto esencial. Su principal preocupación no radica en definir con precisión el término *comprensión* o en caracterizar el concepto de comprensión, sino en contribuir a entender mejor los problemas relacionados con la comprensión matemática de los alumnos y vislumbrar **cómo** los sujetos concretos comprenden las matemáticas en su vida real.

La autora reconoce que la comprensión es un fenómeno complejo, en parte debido a la ambigüedad asociada a la propia noción, es decir:

(a) El término comprensión se suele emplear en el lenguaje ordinario para expresar múltiples aspectos que no siempre son equivalentes (p.e., ideas y sentimientos).

(b) Un objeto o entidad puede ser comprendido de diferentes formas y la comprensión no siempre consiste en lo mismo.

(c) Es usual que la noción de comprensión sea incluida en, o reemplazada por, otras expresiones sinónimas.

(d) El término comprensión viene acompañado de una amplia colección de adjetivos que hacen referencia a sus diferentes tipos (holística y configural, cultural, conceptual, espacial, situada, compartida y mutua, adecuada, implícita o intuitiva, entre otros).

La propuesta de Sierpinska no pretende ser un *modelo de comprensión* en el sentido usual del término. Por el contrario, su aproximación se sustenta en la noción fundamental de *acto de comprensión*, que se considera como la experiencia mental real por la que se relaciona un objeto con otro. El objeto, a su vez, será todo aquello que pueda ser aislado como objeto de nuestra comprensión, incluso aunque no lleguemos a identificarlo con claridad:

“[...] los conceptos abstractos matemáticos pueden ser objetos para nosotros.... También los juicios (teoremas, conjeturas, etc.) y los razonamientos (demostraciones, explicaciones) pueden ser considerados como objetos.” (p. 32).

La autora concibe la comprensión como una experiencia de naturaleza activa e identifica cuatro componentes principales en un acto de comprensión:

(a) El *sujeto de comprensión* o el sujeto que comprende (epistémico y psicológico).

(b) El *objeto de comprensión* o lo que el individuo intenta comprender.

(c) La *base de comprensión* o lo que dirige el pensamiento del sujeto hacia el objeto de comprensión o el soporte para realizar un nuevo acto de comprensión.

(d) *Operaciones mentales básicas*, que enlazan el objeto de comprensión con su base. Asimismo, la autora menciona cuatro operaciones básicas que describe en un trabajo anterior (Sierpinska, 1990) como categorías o tipos de actos de comprensión: identificación, discriminación, generalización y síntesis. Estas operaciones se ponen en funcionamiento a través de acciones que implican experimentar, utilizar y aplicar como condiciones necesarias para que se produzcan los actos de comprensión.

Además de los actos de comprensión, Sierpinska caracteriza también lo que denomina *proceso de comprensión* o secuencia de actos de comprensión enlazados entre sí mediante razonamientos de distinto tipo:

“Los procesos de comprensión pueden ser considerados como rejillas de actos de comprensión enlazados por razonamientos. Si A y B son actos de comprensión, entonces podemos admitir que $A \leq B$ (A precede a B) si hubo un razonamiento R , de algún modo inducido o inspirado por A , que condujo, a su vez, al acto de comprensión B ” (p. 72).

Dichos procesos son considerados discontinuos puesto que no se producen necesariamente cambios en la comprensión en función del tiempo. Así, el modo de comprensión puede permanecer estacionario o inalterado durante un determinado periodo o cambiar súbitamente de forma significativa en un instante.

Sierpinska también menciona la continuidad de los mecanismos que hacen funcionar al sistema cognitivo en los procesos de comprensión y señala que, aunque existan

diferentes niveles y grados de sofisticación en la comprensión y los contenidos de los actos de comprensión varíen considerablemente, los mecanismos no sufren cambios significativos. En definitiva, la comprensión puede considerarse como un acto y como un proceso, según el enfoque adoptado en su estudio, aunque también se puede considerar:

“[...] como un acto, pero un acto involucrado en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación una dialéctica en desarrollo entre conjeturas cada vez más elaboradas y validaciones de estas conjeturas” (Sierpinska, 1990; p. 26).

2.4.3.3 El modelo recursivo de Pirie y Kieren (1989,1994)

Pirie y Kieren (1989) exponen las principales características de una teoría sobre comprensión en matemáticas a la que denominan “recursión trascendente”. El interés se centra en el estudio de la evolución de la comprensión en los sujetos, para lo que proponen un modelo de ocho niveles potenciales (Pirie y Kieren, 1994) con el que pretenden representar o describir esta evolución. Su concepción la expresan del siguiente modo:

“La comprensión matemática puede ser caracterizada como nivelada pero de forma no lineal. Es un fenómeno recursivo y la recursión sucede cuando el pensamiento se desplaza entre niveles de sofisticación. En realidad, cada nivel de comprensión está contenido en niveles sucesivos. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos de dentro y además, está obligado por los de fuera” (p. 8).

Los niveles son representados a través de un diagrama constituido por círculos anidados que los autores emplean para elaborar mapas del desarrollo de la comprensión. Pero, aunque utilizan el término nivel para poner de manifiesto la existencia de una cierta jerarquía subyacente, se apresuran en destacar que la comprensión no evoluciona de forma unidireccional, sino que lo hace mediante sucesivos avances y retrocesos a lo largo de los diferentes niveles. Asimismo, señalan que en cada nivel intervienen dos aspectos complementarios que son necesarios para el desarrollo de la comprensión: actuar y expresar. Al actuar se pone en juego toda la comprensión previa mientras que al expresar se está dando una clara solidez al nivel particular en el que estamos situados.

Dos nociones importantes dentro del modelo que estamos considerando son las de *recursión* y *acción efectiva*. Por un lado, los autores insinúan que la clave en el desarrollo de la comprensión está en la recursión. Gracias a ella los sujetos pueden pasar de un determinado nivel de comprensión a otro superior, dándose la circunstancia de que el nuevo nivel alcanzado trasciende al anterior (recursión trascendente), es decir, libera al alumno de las acciones propias del nivel interno que acaba de superar. Por otro lado, la construcción recursiva del conocimiento está basada, a su vez, en las acciones efectivas, que son condiciones necesarias para que se produzca la evolución hacia niveles superiores de conocimiento y a la vez constituyen una restricción para la comprensión.

Pirie y Kieren (1989) destacan también las potencialidades de la teoría propuesta. Según ellos, podríamos hacernos una idea de cómo evoluciona la comprensión matemática si la consideramos como un fenómeno recursivo. La teoría nos permitiría, además, *“[...] ver el proceso de validación del conocimiento personal y comprender la*

transferencia como una reconstrucción recursiva. Le permite a uno identificar los papeles del lenguaje y el pensamiento en cualquier nivel y en el desarrollo entre niveles” (p. 11).

2.4.3.4 Significado y comprensión

Díaz-Godino (2000) expone algunos aspectos a tener en cuenta para la elaboración de una teoría sobre la comprensión en matemáticas, derivados de trabajos previos sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y sus significados (Díaz-Godino y Batanero, 1994).

El autor reconoce la elevada complejidad de los objetos matemáticos y aconseja sustituir la cuestión absoluta “*qué significa comprender*” por otras, en su opinión más útiles y prácticas para la Didáctica de la Matemática, dirigidas fundamentalmente a determinar:

(a) aquellos aspectos de los objetos matemáticos que son más convenientes y adecuados para ser comprendidos por los alumnos de un nivel concreto dentro de una institución particular (escolar o de otro tipo);

(b) las fases o niveles necesarios para lograr que estos alumnos consigan alcanzar esa “buena comprensión” establecida con anterioridad.

En esta labor, el autor considera necesario estudiar previamente la naturaleza de los objetos matemáticos y sus significados:

“Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo se desarrollan estos componentes?” (p. 79).

Para abordar las cuestiones planteadas, el autor utiliza las nociones de *prácticas significativas*, *significado* de un objeto e *institución*. La primera hace referencia a las acciones, observables o no, que con una función determinada realiza una persona para resolver una situación o problema matemático. La noción de *institución* tiene que ver con las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas y que realizan unas prácticas sociales compartidas. En tercer lugar, aquellos sistemas de prácticas que resulten eficientes para alcanzar el fin pretendido, denominados “sistemas de prácticas prototípicas significativas”, constituyen el significado personal (institucional) del objeto. Así pues, los autores consideran necesario diferenciar, al igual que en los objetos, una dimensión institucional y personal del significado (Díaz-Godino y Batanero, 1994).

Los objetos matemáticos son considerados como abstracciones o generalizaciones empírico-operatorias que surgen de los sistemas de prácticas personales (institucionales). En este punto se postula “[...] *una relatividad de los objetos emergentes, intrínseca a las diferentes instituciones involucradas en los campos de problemas correspondientes, y dependientes también de las formas expresivas disponibles*” (p. 81).

A partir de estos supuestos se extraen, entre otras, las siguientes consecuencias: la comprensión de un objeto matemático exige del sujeto el reconocimiento de una finalidad para resolver una clase de situaciones-problemas; la comprensión tiene que ver con procesos sociales y no sólo mentales. En este sentido, el autor considera que los enfoques centrados en destacar la faceta psicológica de la comprensión son reduccionistas al no prestar suficiente atención a los aspectos sociales y culturales que también intervienen:

“[...] puesto que cada persona se desarrolla en diferentes contextos institucionales y culturales, los procesos psicológicos implicados en la comprensión de los aspectos lingüísticos y conceptuales de los objetos matemáticos están mediatizados por los significados institucionales, esto es, por las situaciones problemáticas, los instrumentos semióticos, los hábitos y convenciones compartidas” (p.83).

2.4.3.5 Modelo de proceso

Koyama (1993) presenta un modelo de comprensión para las matemáticas, denominado ‘*modelo de proceso de dos ejes*’, con el que pretende clarificar los procesos dinámicos reales de la comprensión de los alumnos (evolución) cuando se ven inmersos en situaciones de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos. El modelo se elabora con intención de facilitar el desarrollo de la comprensión y servir de herramienta útil y efectiva para el profesor de matemáticas.

La definición “usual” de comprensión, que sostiene que un conocimiento es comprendido cuando se conecta a una red interna de conocimientos previamente adquiridos o a un esquema o estructura cognitiva ya existente, es considerada por Koyama como la *concepción fundamental* de la comprensión de las matemáticas. Pero el autor reconoce que si se considera que la comprensión es una actividad dinámica interna, es necesario arbitrar métodos para exteriorizar dicha actividad, ya que de otro modo sería imposible obtener información sobre el fenómeno:

“[...] Es imposible ver directamente la comprensión cuando se define como una actividad mental. Por tanto, necesitamos algún marco teórico...es indispensable algún modelo para clarificar la comprensión y la importancia de construirlo puede justificarse en este punto” (p. 65).

Por otra parte, el autor entiende que “[...] un modelo de comprensión que sea útil y efectivo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe tener características tanto descriptivas como prescriptivas” (p. 66), para lo que construye un modelo de dos ejes en el que tiene en cuenta cuatro variables jerárquicas de comprensión en el eje vertical y tres etapas de aprendizaje en el eje horizontal (intuitiva, reflexiva y analítica), no necesariamente lineales, que permiten al alumno progresar de un determinado nivel de comprensión a otro superior (Koyama, 2000). Posteriormente, analiza la validez y efectividad del modelo mediante el estudio de casos, las observaciones en el aula y el análisis de protocolos. En una primera experiencia (Koyama, 1997) pone de manifiesto la complementariedad de la intuición y el pensamiento lógico en el proceso de comprensión de las matemáticas, aportando argumentos de validez sobre las tres etapas de aprendizaje. En un segundo estudio (Koyama, 2000), se intenta mostrar nuevamente que los alumnos transcurren por las tres etapas de aprendizaje establecidas.

2.4.3.6 Otras caracterizaciones

Davis (1992) presenta una teoría acerca de cómo se produce el fenómeno de la comprensión utilizando la conocida metáfora del puzzle:

“[...] La “comprensión” ocurre cuando una nueva idea puede ser encajada en una estructura más amplia de ideas previamente reunidas. Esto es particularmente importante cuando la nueva pieza es reconocida como la “respuesta” a una cuestión que ya ha sido de interés, quizá de vital interés. Es una pieza del puzzle lo que en realidad uno ha estado buscando, y su inclusión ayuda a dar sentido a todo el cuadro” (p. 229).

En Kieran (1994) se recogen otras caracterizaciones dadas por Kieren y Romberg. Por una parte, la visión que adopta Kieren de la comprensión es constructivista, considerándola como un fenómeno complejo, de carácter subjetivo o relativo que trasciende la clásica caracterización en términos de coherencia, conectividad o exactitud:

“Conocer es construir sobre estructuras de conocimiento, basadas en las acciones que has llevado en el mundo. Construyes sobre algunas estructuras de conocimiento y estas estructuras de conocimiento te permiten ahora actuar y resolver problemas de todos los tipos, incluyendo el problema regular de organizar tus estructuras de conocimiento, y revisarlas, y pienso que ese tipo de revisión de las estructuras de conocimiento de uno es algo en continuo desarrollo. Esta es mi definición de comprensión” (p. 589).

Romberg, por su parte, defiende una posición fenomenológica: el sujeto comprende si piensa que comprende. Es probable que comprenda si el modo de describir su comprensión tiene sentido para los compañeros y adultos. Sin embargo, no existe una definición común de comprensión ni un modo específico de poder decir que alguien comprende un dominio como la aritmética elemental. La relatividad en este sentido es la faceta de la comprensión más destacada por Romberg (Kieran, 1994).

De otro lado, Duffin y Simpson (1997) consideran como primera aproximación que *“comprender es tomar conciencia de las estructuras mentales internas”* (p. 167). En una fase posterior de su investigación llegan a distinguir tres componentes de la comprensión. La primera (*building*), se refiere al proceso de formación de las estructuras mentales internas, las conexiones que constituyen la amplitud y profundidad de la comprensión que el sujeto tiene en un momento determinado. La segunda componente (*having*), es el estado de las conexiones que dispone el sujeto en un momento dado. Por la tercera componente (*enacting*), entienden los autores el uso de las conexiones disponibles en un momento particular para resolver un problema o responder a una cuestión.

Con estas componentes Duffin y Simpson resuelven la polémica planteada por Sierpiska sobre si la comprensión es un acto, un proceso o un estado. Sugieren que hay aspectos de los tres: un proceso en curso de desarrollo de las conexiones, un estado de las conexiones disponibles en un momento dado y el acto de usar las conexiones para responder a un problema.

Desde una perspectiva distinta, Font (2000) presenta su propia visión sobre las representaciones, los procesos mentales y la comprensión, dando lugar a lo que él mismo denomina la dimensión pragmática-semiótica de la representación. Su idea de comprensión se pone de manifiesto cuando afirma:

“[...] diremos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión y el significado, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona.” (p. 24).

Otras caracterizaciones de la comprensión en Educación Matemática son las siguientes:

(a) *“Comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado”* (Skemp, 1993).

(b) Carpenter y Lehrer (1999) proponen una caracterización donde la comprensión matemática aparece como un fenómeno en evolución (y no como un atributo estático del conocimiento de un individuo) que emerge de cinco tipos de actividad mental:

“Proponemos cinco formas de actividad mental de las que emerge la comprensión matemática: (a) construcción de relaciones, (b) extensión y aplicación del conocimiento matemático, (c) reflexión sobre las experiencias, (d) articulación de lo que uno conoce y (e) construcción de conocimiento matemático por uno mismo.” (Carpenter y Lehrer, 1999; p. 20)

(c) *“[...] Comprender un fenómeno significa descubrir la esencia, revelar las razones de su origen, su correlación con otros fenómenos, su lugar en un sistema de fenómenos circundantes. El acto de comprensión puede no ser momentáneo, tiene una variedad de parámetros interconectados”* (Gusev y Safuanov, 2000).

2.4.4 Nociones vinculadas a la comprensión del conocimiento matemático

Una cuestión de suma importancia en Educación Matemática es la que se refiere a las relaciones existentes entre la comprensión y otros conceptos igualmente complejos, tales como: significado, aprendizaje, enseñanza, memoria, conocimiento, obstáculo epistemológico, imagen, destreza algorítmica y explicación, entre otros. A continuación, resumimos algunas ideas al respecto de los autores consultados, indicando que en algunos estudios analizados no se profundiza demasiado sobre la naturaleza de tales relaciones.

2.4.4.1 Comprensión y significado

Sierpinska (1994) se preocupa por aclarar su posición respecto a la relación entre comprensión y significado, indicando que es el significado el que debe ser explicado a través de la comprensión y no al revés, como defienden otros autores. Así, el significado de algo será una cierta forma de comprender ese algo, una clase de comprensión, puesto

que se necesita al menos alguna comprensión de un objeto para comenzar a tener un significado de él. Señala la autora que “[...] *Explicar el significado por la comprensión es también característico de la filosofía hermenéutica, donde la comprensión es una interpretación de aquello a lo que el pensamiento está siendo dirigido en un acto intencional.*” (p. 24).

Por otro lado, mantiene que la comprensión es una experiencia mental; es algo que siempre sucede en el interior de la mente, a diferencia del significado que es de naturaleza pública. No obstante, admite que los objetos de comprensión y de significado son coincidentes y expresa (Sierpinska, 1990) la relación entre ambos aspectos en los siguientes términos:

“*La comprensión de un concepto será concebida entonces como el acto [o los actos] de captar su significado*” (p. 27).

2.4.4.2 Comprensión y aprendizaje

Byers y Erlwanger (1985) ven el *aprendizaje* como uno de los procesos cognitivos involucrados en la comprensión de las matemáticas, siendo el *conocimiento recordado* uno de los resultados de este aprendizaje.

Nesher (1986), por su parte, utiliza como ejemplo el procedimiento de contar para analizar hasta qué punto la comprensión interviene en el aprendizaje de destrezas algorítmicas. Según ella, en el aprendizaje de un cierto algoritmo es necesaria la comprensión previa de las destrezas que lo componen, las cuales servirán posteriormente como sistema de control del algoritmo total. Una vez que ha sido completado el aprendizaje y la ejecución se ha hecho instintiva, podremos hablar de procedimiento mecánico, en el que los procesos de comprensión y pensamiento están desactivados. Sin embargo, cuando ocurre algún error, todos los dispositivos saltan y el sistema de control entra en acción para restablecer la regularidad de la ejecución. Para Nesher es aquí donde la comprensión juega un papel crucial.

Según Kieran (1994), Kieren está en desacuerdo con la posibilidad de un aprendizaje sin comprensión o de una capacidad de hacer algo sin saber el porqué. Al menos los sujetos deben tener algún nivel de comprensión o conocer el porqué de algún modo, aunque no se corresponda con el que tiene el observador externo encargado del diagnóstico.

English y Halford (1995), por último, enfatizan el hecho de que el aprendizaje con comprensión no debe ser identificado con el aprendizaje por descubrimiento. Según los autores, el aprendizaje consiste en construir modelos mentales y en conectarlos a procedimientos, un proceso que necesita de guía. Sin embargo, se puede promover el descubrimiento con o sin guía externa. Sobre esta base, el aprendizaje con comprensión es entendido como descubrimiento guiado.

2.4.4.3 Comprensión y enseñanza

Las observaciones de los autores en este sentido van desde simples advertencias y recomendaciones didácticas generales hasta propuestas más concretas y elaboradas. Veamos algunas de ellas:

Nesher (1986) intenta responder a la pregunta de si en la enseñanza de las matemáticas se debe dar más importancia a la comprensión o al dominio de destrezas algorítmicas. Lejos de dar una respuesta concluyente a favor de una u otra opción, considera que ambas son necesarias. Por ejemplo, para llegar a comprender el concepto de media aritmética el alumno necesita tener una mínima experiencia con el cálculo de medias. Inversamente, en el cálculo algorítmico intervienen elementos de comprensión: saber cómo determinar el número que hay que colocar en el denominador, saber qué ocurre si uno de los números es cero, etc. Para Nesher la separación entre la ejecución algorítmica y la comprensión es imposible en cualquier etapa del aprendizaje.

El programa descrito por Davis (1992) recomienda que los estudiantes tengan experiencias matemáticas significativas con materiales didácticos y problemas matemáticos extraídos de la vida cotidiana para que elaboren representaciones mentales eficaces y las relaciones entre ellas. La comprensión viene determinada, precisamente, por las relaciones establecidas entre esas representaciones mentales.

Como llamada de atención, Koyama (1993) destaca lo contradictorio de las recomendaciones que se hacen desde los currículos oficiales para fomentar la comprensión en matemáticas, cuando en realidad el conocimiento disponible sobre este fenómeno es limitado y no se sabe con exactitud lo que deben hacer los profesores para garantizar que sus estudiantes desarrollen una adecuada comprensión de estos conocimientos. Sin embargo, en un trabajo posterior y en base a su modelo de comprensión (Koyama, 2000), el autor enuncia algunas recomendaciones didácticas y aconseja al profesor de matemáticas que proponga en clase situaciones problema donde los alumnos puedan desarrollar sus propias ideas matemáticas (construcción individual del conocimiento) para que, posteriormente, las expliquen y discutan con el profesor y el resto de los compañeros (construcción social del conocimiento).

A modo de propuesta más elaborada, Fennema y Romberg (1999) presentan los supuestos fundamentales para una reforma de la enseñanza de la matemática centrada en la comprensión. Según estos autores, la “enseñanza para la comprensión” de las matemáticas debe estar caracterizada por tres ejes de instrucción: tareas, instrumentos y prácticas normativas. Las tareas han de ser especialmente diseñadas con el propósito de fomentar la comprensión, para lo que hay que cuidar su selección y secuenciación así como la integración de la resolución de problemas con el aprendizaje de conceptos y destrezas básicas. Los instrumentos, por su parte, hacen referencia a las representaciones y a las herramientas que se utilizan para representar ideas matemáticas y situaciones-problema. Por último, las prácticas normativas son las normas que rigen el comportamiento en el aula del profesor y los alumnos y regulan el modo en que las tareas e instrumentos son empleados para el aprendizaje.

Por su parte, Gusev y Safuanov (2000) proporcionan algunos consejos para que el profesor elabore métodos de enseñanza que favorezcan el desarrollo de la comprensión en clase de matemáticas. De entre ellos, podemos citar el uso del principio genético para enseñar matemáticas (un objeto matemático no puede ser comprendido si se considera aislado) o la recomendación de enseñar a los alumnos a derivar conclusiones del concepto matemático en estudio.

Por último, en relación con la memorización y la práctica rutinaria sin comprensión, Anthony y Knight (1999) no entienden dicha práctica como una simple actividad

repetitiva, sino como una actividad “*de naturaleza experiencial que proporciona experiencias variadas dirigidas al desarrollo y mantenimiento de la comprensión*” (p. 33). La función de la práctica en el aula está, por tanto, estrechamente vinculada al desarrollo de la comprensión:

“[...] para reflexionar acerca de por qué trabajan los procedimientos aritméticos, construir una red de relaciones entre hechos numéricos y desarrollar procesos de descubrimiento, etiquetando e interiorizando relaciones, los estudiantes necesitan una práctica extensa con tareas que son diseñadas para desarrollar la comprensión” (p. 36).. . . *“La comprensión se desarrolla a lo largo del tiempo a través de la práctica con actividades específicamente diseñadas para desarrollar y mantener esta comprensión”* (p. 37).

La práctica, no obstante, no debería llevarse a cabo sin haber adquirido antes algún significado apropiado, aunque sea parcial, del conocimiento en cuestión, lo que conduce a que el principal objetivo de la práctica en el aula de matemáticas debería ser el de fortalecer las relaciones construidas (no impuestas) previamente por los individuos.

2.4.4.4 Comprensión y memoria

Para Byers y Erlwanger (1985) la memoria juega un papel fundamental en la comprensión matemática, puesto que las distorsiones que se producen en la memoria “*parecen jugar un importante papel en las dificultades del estudiante con el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas*” (p. 278). No obstante, determinar qué es lo que recuerdan los sujetos que “comprenden matemáticas” frente a los que no las comprenden, resulta un problema de difícil solución en opinión de los autores.

Asimismo, consideran la aproximación constructivista como la más pertinente para el estudio del recuerdo y la comprensión en matemáticas. La idea constructivista de que el conocimiento almacenado en la memoria puede experimentar cambios cualitativos supone para Byers y Erlwanger un avance cualitativo frente a la visión de la memoria defendida por el Procesamiento de la Información. El aprendizaje no sólo requiere interconexión entre las piezas almacenadas en la memoria, también necesita integración y modificación.

En el mismo orden de reflexión, Byers y Erlwanger reconocen la especificidad del conocimiento matemático como factor determinante en el estudio de la función que desempeña la memoria en la comprensión. Los autores prefieren hablar de procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático considerado como un tipo de pensamiento muy particular y diferente a otros.

Anthony y Knight (1999), por su parte, sostienen que comprensión y memoria están íntimamente relacionadas, siendo ambas necesarias para alcanzar un grado de realización o actuación efectivo. No obstante, señalan que aún están pendientes de respuesta algunas cuestiones importantes relativas a dicho vínculo, como por ejemplo: ¿cuál es la naturaleza real de dicha relación? ¿Cómo transcurre o evoluciona? ¿De qué modo se pueden lograr unas destrezas, una comprensión y un conocimiento computacional eficientes? ¿Qué enlaces se establecen entre la comprensión, el almacenamiento y la recuperación del conocimiento?

2.4.4.5 Comprensión y conocimiento

Sierpinska (1990) intenta aclarar la relación existente entre comprender y conocer, aceptando la existencia de varios tipos de actos de comprensión que conducen a diferentes maneras de conocer. De este modo, proporciona una explicación que satisface en su opinión la aparente contradicción existente en algunos autores (como por ejemplo en Skemp y Dewey cuando entienden la comprensión como un acto a la vez que definen distintos tipos o estilos de comprensión/conocimiento (considerados como términos sinónimos)).

2.4.4.6 Comprensión y obstáculo epistemológico

La relación entre las nociones de comprensión y obstáculo epistemológico también ha sido tratada por Sierpinska (1990, 1994) cuando reconoce que superar un obstáculo epistemológico y comprender son sólo dos formas de hablar de lo mismo. La diferencia está en el punto de vista que adopte el observador. Así, los obstáculos epistemológicos centran la atención en las maneras insuficientes o incorrectas de conocer (punto de vista “negativo”), mientras que la comprensión dirige su atención hacia los nuevos modos de conocimiento (punto de vista “positivo”). Añade la autora que ambas perspectivas no pueden adoptarse simultáneamente, aunque tampoco puede olvidarse ninguna de ellas si se quiere completar el cuadro epistémico del sujeto.

2.4.4.7 Comprensión e imagen

Las nociones de *imagery* y *understandings*, que traducimos por “imágenes” y “comprensiones” respectivamente, son consideradas por Bender (1996) como constructos psicológicos fundamentales y complejos de cuyo estudio en profundidad se suele huir en las investigaciones pero que constituyen un medio apropiado para el análisis y promoción de los procesos de enseñanza-aprendizaje de los sujetos. El autor entiende por *imágenes* a las “representaciones mentales, a menudo usuales (pero también auditivas, olfativas, táctiles, gustativas y kinestésicas) de algún objeto, situación, acción, etc., que tienen su base sensorial en la memoria a largo plazo y son activadas en procesos conscientes” (p. 63).

Imágenes y comprensiones se asocian a distintos modos de pensamiento: el analógico para las primeras y el proposicional para las segundas. No obstante, Bender admite la existencia de una estrecha relación entre ambas nociones. Por un lado, no se puede concebir un proceso de comprensión que transcurra al margen de todo elemento analógico (intuición, referencia a lo real, etc.) y, por otro, la simple invocación o el empleo de una imagen ya lleva consigo algún grado de comprensión, sobre todo en situaciones que exigen de una explicación verbal. Esta relación aconseja fomentar el desarrollo de ambos modos de pensamiento en la enseñanza y aprendizaje de la matemática así como la permanente transformación entre ellos.

2.4.4.8 Comprensión y destreza algorítmica

Nesher (1986) examina la diferencia conceptual entre las nociones de *comprensión* y *ejecución algorítmica* a partir de la descripción de sus características. Analiza la importancia de los algoritmos como herramientas eficaces que liberan al pensamiento humano de ciertas tareas permitiéndole atender a otras de mayor exigencia cognitiva. La capacidad para ejecutar algoritmos (característica de las máquinas) es diferente a la

habilidad para operar con reglas aprehendidas de forma intuitiva que no pueden ser especificadas claramente. El ser humano tiene la ventaja de poder trabajar en ambas situaciones, aunque la ejecución algorítmica es mucho más eficaz en las máquinas. En cambio, éstas adolecen de comprensión o, lo que es lo mismo, de un sistema de control sobre los procesos involucrados. Por tanto, dependiendo de cómo sea este control podemos hablar de diferentes niveles de comprensión.

Resnick (1992) analiza los algoritmos a partir de lo que está y no está permitido hacer, proporcionando un nuevo sentido a la comprensión de reglas y procedimientos. Así, uno comprende una regla o procedimiento matemático cuando conoce todas sus restricciones y autorizaciones, esto es, cuando conoce lo que está permitido hacer y lo que está prohibido.

2.4.4.9 Comprensión y explicación

En Sierpinska (1994) identificamos un vínculo de unión entre explicación y comprensión: “*El objetivo de una explicación es fundar la comprensión sobre una nueva base*” (p. 77). La autora distingue dos tipos de explicaciones: la *explicación científica*, cuya intención es la de alcanzar una base de comprensión más conceptual; y la *explicación didáctica*, centrada en una base de comprensión más familiar (p.e., alguna imagen, algún conocimiento previo, alguna experiencia). Se contraponen así la explicación científica a la didáctica y se identifica en este punto una fuente de problemas didácticos.

2.4.4.10 Comprensión y tipos de conocimiento

Desde un punto de vista general, Farnham-Diggory (1994) presenta una clasificación de los diferentes tipos de conocimiento y los modelos de instrucción existentes: modelo de conducta, de desarrollo y de aprendizaje. Dentro del marco de cualquiera de estos tres paradigmas instruccionales, se producen cinco tipos de conocimiento:

(a) *Conocimiento declarativo*. Es el conocimiento que puede ser reconocido usualmente en las palabras, a través de lecturas, libros, escritos, a través de signos de lenguaje, braille o notación matemática.

(b) *Conocimiento procedimental*. El conocimiento procedimental está en la forma de las secuencias de acción. Es un conocimiento que tiene que ser demostrado.

(c) *Conocimiento conceptual*. Los conceptos son de dos tipos: categorías y esquemas. Las categorías se definen usualmente como listas de atributos. Los esquemas añaden atributos espaciales y temporales.

(d) *Conocimiento analógico*. El conocimiento analógico, a veces llamado conocimiento de imágenes, mantiene correspondencias específicas entre el exterior y el interior de la mente. Puede adquirirse mediante una exposición sencilla; los sentidos se estimulan y la memoria retiene ese modelo sensorial.

(e) *Conocimiento lógico*. Es un sistema de implicaciones causales; un modelo mental de conexiones y relaciones que se adquiere ejercitando el razonamiento propio.

Tomando como referencia la tipología tradicional que establece dos tipos de conocimiento, el *conceptual* y el *procedimental*, Hiebert y Carpenter (1992) exponen su propia visión sobre la relación existente entre ellos. El conocimiento conceptual lo identifican con el conocimiento comprendido, esto es, el conocimiento representado y

conectado internamente en una red rica en relaciones. El conocimiento procedimental, por su parte, es definido como una secuencia de acciones: “[...] *Las conexiones mínimas necesarias para crear representaciones internas de un procedimiento son conexiones entre las sucesivas acciones en el procedimiento. Ejemplos de procedimientos son los algoritmos estándar de cálculo en aritmética*” (p. 78).

Byrnes y Wasik (1991) también consideran oportuna la distinción general entre conocimiento conceptual y procedimental (Hiebert y Lefevre, 1986), pero creen que no se han dado explicaciones adecuadas de las relaciones existentes entre estos dos tipos de conocimiento. En el caso de las matemáticas, estos autores realizan un estudio para comprobar cuál de los dos enfoques, el de la *activación simultánea* o el de la *interacción dinámica*, ofrece una mejor explicación de la relación entre el conocimiento conceptual y procedimental. Así, el primero de ellos postula que los alumnos cometen errores de cálculo porque los símbolos matemáticos son poco significativos para ellos, con lo que el conocimiento conceptual es necesario y suficiente para usar correctamente los procedimientos. Por el contrario, el segundo, considerado por los autores más adecuado que el primero, asegura que el conocimiento conceptual es necesario pero no suficiente para adquirir destrezas. Ambos conocimientos se apoyan entre sí pero no avanzan simultáneamente sino de forma iterativa (pequeños incrementos en uno provocan pequeños incrementos en el otro).

Por su parte, Sfard (1991) intenta mostrar que una noción matemática puede ser concebida de dos formas diferentes y complementarias: estructuralmente (como un objeto) y operacionalmente (como un proceso): “*la habilidad para ver un concepto matemático como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de comprensión*” (p. 5). Analizando el origen y la evolución histórica de algunos conceptos matemáticos, la autora llega a la conclusión de que éstos surgen primeramente como procedimientos que el individuo tiene que ejecutar (la génesis del número está en contar, por ejemplo) y que, con el paso del tiempo, llegan a concebirse como objetos o entidades abstractas estáticas.

Aunque la idea de Sfard sobre el orden de adquisición del conocimiento contrasta con las de autores como Neshier (1986) o Byrnes y Wasik (1991), hay unanimidad entre ellos en admitir la estrecha relación existente entre los tipos de conocimiento: “[...] *casi cualquier actividad matemática puede ser vista como una compleja interacción entre las versiones operacional y estructural de la misma idea matemática: cuando un problema complejo es abordado, el resolutor cambiará repetidamente de un acercamiento a otro con el fin de usar su conocimiento de la manera más eficaz posible*” (p. 28).

En la misma línea se sitúa el trabajo de Rittle-Johnson y Siegler (1998), en el que se examinan las relaciones entre el conocimiento conceptual y procedimental a través de la revisión de algunos estudios previos realizados en diferentes dominios matemáticos. Así, establecen que los conocimientos conceptual y procedimental están positivamente correlacionados, que no existe un orden determinado de adquisición del conocimiento conceptual y procedimental y que se echan en falta estudios fiables que permitan describir con certeza cómo la adquisición de un tipo de conocimiento influye en la adquisición del otro.

También Resnick (1992) se centra en dar una explicación de los diferentes tipos de conocimiento matemático existentes, de las relaciones entre ellos y de su evolución. El autor distingue cuatro tipos de conocimiento matemático: protocuantitativo, de la cantidad, del número y de los operadores. Dos ideas se destacan sobre el modo en el que estos tipos de conocimiento se relacionan:

1º) En todo momento, un sujeto puede estar funcionando en varios niveles de pensamiento matemático.

2º) Por el hecho de desarrollar formas de razonamiento más avanzadas, las anteriores no quedan descartadas sino que permanecen en el sistema de conocimiento del individuo. La capacidad para moverse de atrás hacia adelante entre las matemáticas de las cantidades, números y operadores es crucial para permitir que el sujeto relacione su conocimiento matemático abstracto con situaciones prácticas concretas.

2.5 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático

Las cuestiones referentes al diagnóstico y la valoración de la comprensión que poseen los sujetos sobre los conocimientos matemáticos aparecen de forma recurrente en la mayoría de los estudios que hemos revisado. En esta sección describimos, de forma resumida y ordenada, la información recopilada en torno a esta faceta de la comprensión, de especial interés para la investigación en curso.

2.5.1 Fuentes consultadas

- **Ainley, J. y Lowe, A. (1999).** Can written questions differentiate between degrees of understanding?
- **Castro, E. (1994).** *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años).*
- **Clausen-May, T. (2000).** Understanding Assessment- The Assessment of Understanding.
- **Conradie, J. y Frith, J. (2000).** Comprehension Tests in Mathematics.
- **Davis, R. B. (1992).** Understanding “Understanding”.
- **DeMarois, P. y Tall, D. (1996).** Facets and Layers of the Function Concept.
- **Díaz-Godino, J. (2000).** Significado y comprensión de los conceptos matemáticos.
- **Díaz-Godino, J. y Batanero, C. (1994).** Significado Personal e Institucional de los Objetos Matemáticos.
- **Duffin, J. y Simpson, A. (1997).** Towards a new theory of understanding.
- **Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992).** Learning and Teaching with understanding.
- **Morgan, C. (1996).** Language and Assessment Issues in Mathematics Education.
- **Niemi, D. (1996).** Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications, and Explications.
- **Pirie, S. y Kieren, T. (1989).** A Recursive Theory of Mathematical Understanding.

- **Pirie, S. y Kieren, T. (1994).** Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it?
- **Pirie, S.E.B. (1988).** Understanding: Instrumental, Relational, Intuitive, Constructed, Formalised...? How Can We Know?
- **Romero, I. (2000).** *Representación y Comprensión en Pensamiento Numérico.*
- **Schank, R. C. (1988).** Una explicación de la inteligencia.
- **Sierpinska, A. (1990).** Some Remarks on Understanding in Mathematics.
- **Sierpinska, A. (1994).** *Understanding in Mathematics.*
- **Vergnaud, G. (1997).** The Nature of Mathematical Concepts.

2.5.2 Principales aportaciones

2.5.2.1 Modos y términos en los que valorar la comprensión

Para Sierpinska (1994) la comprensión debe ser evaluada en términos de superación de obstáculos epistemológicos o de desarrollo. Así, los actos de comprensión más significativos e importantes y, por tanto, los que mejor se valorarán, serán aquellos que consistan en superar un obstáculo relacionado con el conocimiento científico desarrollado. El obstáculo, por su parte, hay que entenderlo como una dificultad que imposibilita o impide un cambio en la estructura mental del sujeto⁷ y no necesariamente como algo a sortear para alcanzar la ‘buena’ o ‘correcta’ comprensión. Sin embargo, el lenguaje es confuso y propicio a interpretaciones sesgadas:

“[...] La profundidad de la comprensión podría ser medida por el número y la calidad de los actos de comprensión que uno ha experimentado o por el número de obstáculos epistemológicos que ha superado” (Sierpinska, 1990; p. 35).

A diferencia de esta visión, Díaz-Godino (2000) entiende la comprensión personal de un objeto matemático como la captación o apropiación de su significado. De esta manera, la comprensión se valorará en términos de correspondencia con el significado institucional establecido para ese objeto por la institución donde tiene lugar la valoración. Así, *“Una institución (escolar o de otro tipo) dirá que un sujeto comprende el significado de un objeto -o que ha captado el significado de un concepto, por ejemplo- si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas prototípicas que configuran el significado de dicho objeto institucional”* (pp. 84-85).

La comprensión desde la perspectiva de Hiebert y Carpenter (1992), como conocimiento bien conectado, da lugar a una estrategia clara de cara a la valoración: la comprensión será valorada en función de cómo esté conectado el conocimiento; habrá que determinar y valorar, por tanto, los tipos de conexiones establecidas. Pero estas conexiones son internas, por lo que se valorarán mediante las conexiones externas que los sujetos sean capaces de establecer cuando se enfrenten a tareas donde haya que relacionar distintas representaciones externas del mismo conocimiento matemático. Trabajos de investigación como el de Castro (1994) abordan la valoración de la comprensión desde esta perspectiva.

⁷ Puede ser, entre otros, un conocimiento o una situación cognitiva.

En la misma línea representacionalista, Romero (2000) hace explícita la estrecha relación que ha de existir entre las representaciones externas e internas de un conocimiento matemático:

“[...] podemos afirmar que se ha producido la comprensión de un concepto por parte de un sujeto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento. Y esta manifestación sólo puede hacerse a través de los sistemas de representación [externos] y mediante las actividades asociadas a los mismos.”

Por su parte, Schank (1988) presenta con notoria claridad el problema de la medición de la comprensión:

“[...] todo sistema, humano o mecánico, se juzga por sus outputs. [...] Nos enfrentamos a un dilema. No podemos recurrir al output para decirnos si un sistema realmente comprende. Por otra parte, un output es todo lo que razonablemente esperamos conseguir” (p. 151).

En otras palabras, la única información pertinente que podemos obtener sobre la comprensión de un individuo viene proporcionada por su comportamiento observable (gestos, producción escrita, explicación verbal, etc.). Pero la comprensión, al ser un fenómeno que transcurre en el interior de la mente, no puede ser observada directamente en su totalidad y de forma completa (al menos por ahora). Esta es la razón por la que sólo podemos aspirar a una descripción aproximada de la situación real, razón por la cual vamos a emplear en la investigación la expresión ‘aproximación al fenómeno de la comprensión’. Admitida esta limitación, la cuestión principal se traslada a las situaciones para que el sujeto actúe, a su comportamiento y a las acciones que debe realizar para que un observador externo pueda asegurar que comprende en un cierto grado. Schank lo expresa del siguiente modo:

“Un sistema que no solamente hace cosas interesantes, sino que puede explicar por qué las hace relacionándolas con lo que hizo en otras situaciones y circunstancias de este mundo, bien puede decirse que comprende en alguno de los niveles del modelo de comprensión. Esto no quiere decir que un sistema que no pueda explicar no pueda comprender. La cuestión es cómo un sistema que comprende puede demostrarlo a un observador externo. [...] Así, mientras no podemos afirmar que quien no puede explicar, es que no ha comprendido, sí podemos afirmar que quien puede explicar, sí que ha comprendido)” (p. 151).

Schank utiliza la explicación como criterio e instrumento para valorar la comprensión, asignando un nivel de comprensión a cada tipo de explicación característica: el nivel “dar sentido” lo asocia a una “explicación de coherencia”, el de “comprensión cognitiva” a una “explicación de fracaso” y el de “empatía completa” a una “explicación contributiva”.

2.5.2.2 Métodos, técnicas e instrumentos para evaluar la comprensión

En primer lugar, Pirie y Kieren (1994) describen una técnica que denominan “mapping” para registrar la evolución de la comprensión matemática de una persona,

utilizando para ello una representación gráfica⁸ que genera diagramas-mapa de la evolución de acuerdo con lo observado. Los autores son conscientes de que un análisis de este tipo sólo puede estar basado en las observaciones realizadas por el profesor o investigador y, por tanto, se cuidan de no hacer ningún comentario acerca de lo que ocurre en la mente del sujeto. Según ellos, este método permite estudiar con detalle la naturaleza del desarrollo de la comprensión en un individuo ante muchos tópicos o en muchos estudiantes ante un tópico específico.

DeMarois y Tall (1996), por su parte, proponen un modelo en la misma línea que el de Pirie y Kieren (1994) para determinar los perfiles de comprensión de los estudiantes sobre el concepto de función. El modelo combina dos dimensiones diferentes: la primera (longitud) se centra en las distintas representaciones o “facetas” que admite la función (simbólica, numérica, geométrica, descripciones escritas y verbales, notacional, coloquial y kinestética⁹); la segunda (profundidad) se refiere al desarrollo vertical del concepto de función y abarca desde un nivel de pre-acción (conocimientos mínimos) hasta el nivel proceptual, pasando por los niveles de acción, proceso y objeto. Los autores utilizan la entrevista con el objetivo de analizar la imagen que poseen los sujetos del concepto de función y establecer, para cada individuo, un perfil gráfico de la comprensión de dicho concepto. El estudio empírico realizado les sirve, al mismo tiempo, para comprobar la operatividad del modelo para evaluar la comprensión.

En la misma línea que los demás autores consultados, Díaz-Godino (2000) manifiesta su convencimiento de que la comprensión personal de un objeto matemático no puede ser observada directamente, sino a través de las acciones que realiza el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas que requieren del empleo de ese objeto. En tal sentido, es consciente de la amplitud del campo de situaciones o tareas asociadas a cualquier objeto matemático y sostiene que la selección de situaciones adecuadas para la evaluación constituye, por tanto, el principal problema a resolver. A este respecto, el autor opina que su teoría del significado (Díaz-Godino y Batanero, 1994) puede aportar algunos criterios válidos para seleccionar tales situaciones de evaluación:

"El carácter observable de las prácticas sociales permite, mediante un estudio fenomenológico y epistemológico realizado adecuadamente, determinar, para un objeto dado, el campo de problemas asociado, así como los significados institucionales. El análisis de las variables didácticas del campo de problemas proporciona un criterio para estructurar la población de las posibles tareas de las cuales debe extraerse una muestra representativa, si se quiere garantizar la validez de contenido del instrumento de evaluación." (p. 344).

A diferencia de la anterior, la aproximación descrita por Davis (1992) centra su atención en el modo en que los estudiantes utilizan las representaciones mentales y construyen otras nuevas, para lo que aconseja usar el material escrito elaborado por los alumnos y la grabación en video de entrevistas o sesiones de clase en las que se resuelven tareas matemáticas. Según Davis, se obtiene una información más detallada de cómo piensan los estudiantes cuando trabajan en matemáticas si se hace un

⁸ Ocho círculos, correspondientes a los distintos niveles contemplados, unidos entre sí por un punto común a todas las circunferencias.

⁹ Explicación de los sujetos sobre su propia comprensión de función.

seguimiento continuado de un individuo concreto antes que un estudio puntual con un grupo numeroso.

Por el contrario, Niemi (1996) considera que el proceso para obtener unos instrumentos de valoración válidos comienza con el Análisis del dominio conceptual seleccionado. El propósito principal de este Análisis es el de descubrir la “estructura profunda” del conocimiento matemático en estudio para utilizarla posteriormente como base del diseño de las tareas. El autor distingue dos tipos de Análisis:

(a) *Un Análisis Semántico*, dirigido a esclarecer la naturaleza del conocimiento matemático, sus distintos significados y representaciones, los elementos que la constituyen, etc.

(b) *Un Análisis Estructural*, del que se extrae un modelo general de comprensión matemática. Al entenderse la comprensión en términos de redes de relaciones entre diferentes elementos (símbolos, conceptos, procedimientos, objetos, acciones, situaciones), la valoración (*assessment*) transcurre en términos de habilidad o capacidad para establecer relaciones de distinto tipo.

Tras los análisis mencionados se ha de pasar al diseño de unas tareas con las que poder confirmar o refutar las distintas hipótesis de investigación planteadas y unos instrumentos con los que poder valorar diferentes facetas de la comprensión del conocimiento matemático. En realidad, lo que Niemi propone al considerar una variedad de tareas es una estrategia de valoración multifacética, con la que alcanzar una validez de constructo aceptable para el instrumento de evaluación, o sea, una cierta garantía de que las inferencias realizadas se ajusten a la realidad. En términos del propio autor:

“Cuando son utilizadas valoraciones múltiples, las inferencias sobre la comprensión pueden basarse en la convergencia de evidencia desde fuentes diferentes. La confianza en las inferencias sobre la comprensión del estudiante, esto es, la validez de constructo, no derivará simplemente de una evidencia de “validez externa”... ni exclusivamente de medidas tradicionales de fiabilidad... sino principalmente de los patrones de relaciones entre tareas que representan diferentes facetas de la comprensión del dominio...” (p.355).

Este modo de proceder se asemeja, en parte, a la propuesta de Vergnaud (1997) para esclarecer los procesos cognitivos de conceptualización. En términos generales, Vergnaud argumenta del siguiente modo:

1. El conocimiento matemático no llega a comprenderse en su totalidad de forma inmediata, sino a través de un proceso de conceptualización complejo que es esencial para la propia comprensión del conocimiento en sí.

2. Para llegar a describir y determinar ese proceso de conceptualización se considera oportuno enfrentar a los individuos a las situaciones problemáticas que lo hacen útil y significativo. Se requiere, por tanto, la determinación previa de ese conjunto de situaciones.

3. Una vez determinado tal conjunto, se trata de emplear las distintas situaciones para establecer los diferentes *esquemas* de los sujetos¹⁰.

4. El origen fundamental de los conceptos se encuentra en los invariantes operacionales subyacentes a la conducta. No obstante, estos invariantes (conceptos y teoremas en acción que evolucionan con el tiempo) presentan la seria dificultad de permanecer parcialmente ocultos, por lo que resulta difícil llevar a cabo la observación e interpretación de la conducta. Es en este punto donde cobra especial interés el lenguaje y la explicación:

“Es función de los componentes léxicos y sintácticos del lenguaje natural contribuir a la transformación de los invariantes operacionales en conceptos y teoremas explícitos; y por lo tanto a cambiar el estatus del conocimiento” (pp. 14-15).

En otras palabras, resulta fundamental para el progreso de la comprensión de los conceptos que los alumnos realicen el ejercicio reflexivo de explicitar sus conceptos y teoremas en acción mediante el uso del lenguaje.

Un ejemplo concreto de instrumento de evaluación es el presentado por Conradie y Frith (2000) bajo la denominación de *test de comprensión*. El método consiste en presentar al sujeto la demostración de algún resultado teórico y a continuación unas cuestiones cortas sobre características específicas de la misma:

“La filosofía es que, haciendo esto, el examinador puede investigar específicamente y con bastante profundidad la naturaleza de la comprensión de los estudiantes y evitar comprometer a los estudiantes a un aprendizaje memorístico prolongado” (p. 227).

Según Conradie y Frith, para la elaboración y posterior calificación de estos instrumentos de observación conviene tener presente aspectos como el tiempo de respuesta, la precisión en la formulación de las cuestiones, la secuenciación de la dificultad o la aceptación de respuestas inesperadas. Entre las ventajas de los tests de comprensión, destacan las siguientes:

- Proporcionan un incentivo para comprender, y no sólo memorizar, las demostraciones que se presentan en un curso superior de matemáticas;
- Pueden servir para que el alumno vea el estudio de la teoría como una experiencia más interesante;
- Permiten una evaluación mucho más precisa de la comprensión de los estudiantes en todos los niveles;
- Facilitan la identificación de problemas de comprensión específicos que, en general, serían difíciles de detectar con una cuestión estándar del tipo “*enuncia y prueba*”.

¹⁰ Vergnaud utiliza el término *esquema* para referirse a la organización invariante de la conducta para cierta clase de situaciones. También se podría identificar como un comportamiento tipo (en principio difícil de observar) asociado a una clase o categoría de situaciones.

2.5.3 Dificultades y limitaciones

2.5.3.1 *La naturaleza relativa de la evaluación*

En Sierpinska (1994) encontramos algunas ideas en torno a la evaluación de la comprensión con especial atención hacia el carácter relativo de la misma. En concreto, se estudian dos de los aspectos que justifican dicha relatividad: (1) la etapa de desarrollo cognitivo del sujeto que comprende y (2) la cultura en la que está inmerso. Así lo manifiesta la autora:

“Lo que una persona comprende y cómo lo comprende no es independiente de su etapa de desarrollo, del lenguaje en el que se comunica, de la cultura en la que ha sido socializada. Sus creencias, sus ‘normas cognitivas’, su visión del mundo pueden ser fuentes de obstáculos para la comprensión de estructuras teóricas de conocimiento científico contemporáneo” (p. 138).

Sierpinska evita dar una caracterización para la buena comprensión o la comprensión correcta. En tal sentido, considera que si el sujeto siente que ha experimentado un acto de comprensión, entonces se ha de admitir que dicha comprensión es buena por sí misma. El problema surge cuando es un agente externo quien compara esa comprensión, a priori correcta, con unos patrones o estándares de comprensión concebidos de antemano. Los posibles desajustes se interpretan, en este caso, en términos de una comprensión errónea, limitada o inadecuada, lo cual puede que no se ajuste a la realidad.

Desde un punto de vista normativo, cuando es un sujeto quien se propone evaluar la comprensión de otro, Sierpinska admite que no se puede hablar en términos absolutos de una comprensión objetivamente correcta o buena. No obstante, reconoce que algunas evaluaciones pueden llegar a ser más objetivas que otras. Por ejemplo, la comprensión de un concepto matemático medida en función de su ajuste o coherencia con el sistema lógico en el que está inmerso, podría considerarse como una vía objetiva de evaluación.

Otro autor que menciona la relativización que surge en la evaluación de la comprensión es Díaz-Godino (2000), quien identifica la comprensión con la concordancia de significados que tiene el sujeto con lo establecido en la institución escolar que se toma como referencia para su evaluación. De hecho, la relatividad institucional en la evaluación es una de las características de la teoría del significado presentada por Díaz-Godino y Batanero (1994).

2.5.3.2 *El problema de la interpretación en la evaluación*

Como indican Pirie y Kieren (1989), las acciones efectuadas por los alumnos son el medio a través del cual se exhibe el conocimiento. Del mismo modo, la teoría propuesta por Duffin y Simpson (1997) sobre la evaluación de la comprensión centra su interés en la valoración de las características (internas) de la comprensión mediante las **manifestaciones externas** de la misma. Según esto, la comprensión de un sujeto es descrita mediante las **interpretaciones** que el observador realiza a partir de sus acciones y siguiendo un proceso indirecto y prolongado con numerosas observaciones:

“[...] a menos que la comprensión se manifieste no tenemos ningún modo de inferir algo sobre el nivel de comprensión que tiene el sujeto e, incluso cuando este

sujeto está haciendo algo (como dar una explicación o resolver un problema) no podemos ver que la comprensión se esté manifestando, únicamente interpretamos nuestras observaciones como el uso de esa comprensión...” (p. 169).

La interpretación de los comportamientos observables parece, sin embargo, que no está exenta de problemas. Así, Ainley y Lowe (1999) ponen en evidencia las carencias e ineficacia de los SATs (Standards of Assessment and Testing) como instrumentos de diagnóstico, al comprobar que sujetos a los que dicho estudio les asignaba el mismo nivel presentaban en realidad diferencias entre ellos.

Por otra parte, el problema de la interpretación está íntimamente ligado al de la elección de las tareas y del instrumento de diagnóstico. En este sentido, Clausen-May (2000) analiza los tipos de cuestiones que suelen aparecer en los tests de evaluación escritos con intención de responder a la pregunta planteada por Ainley y Lowe (1999) sobre si las cuestiones escritas pueden diferenciar entre grados de comprensión. En este sentido, una cuestión aún pendiente es la del diseño de cuestiones cerradas para valorar la comprensión conceptual.

Morgan (1996), partiendo del supuesto de que casi todo el testimonio que puede obtener un observador proviene de los textos lingüísticos, simbólicos y gráficos que ellos mismos producen, también aborda la validez de la valoración de la comprensión en base a la interpretación de la producción escrita/oral de los sujetos (textos lingüísticos). En su trabajo llega a la conclusión de que la relación existente entre el texto (escrito u oral) producido por un alumno y la correspondiente valoración de la comprensión matemática, no puede reducirse a una simple relación biunívoca o de isomorfismo. Ninguna producción observable o manifestación externa resulta lo suficientemente transparente como para que de ella se pueda construir una representación exacta y real de la verdadera comprensión que posee el sujeto. En consecuencia, el autor sugiere que un cierto conocimiento sobre cómo el lenguaje empleado puede influir en las inferencias del investigador junto con la atención prestada durante el proceso de análisis de datos a las diferentes formas de lenguaje utilizadas por los sujetos, pueden ser de utilidad para enriquecer los análisis resultantes y evitar distorsiones debidas a una falta de control sobre el lenguaje de los estudiantes.

2.5.3.3 Complejidad y otras limitaciones

Son numerosas las voces que reconocen la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático como una labor altamente compleja. Así, por ejemplo, Sierpiska (1990) hace explícito el problema que supone idear métodos que muestren con certeza los actos de comprensión de los sujetos así como la dificultad de diseñar mecanismos que los provoquen, como es el caso de las tareas escolares para favorecer la comprensión.

Hiebert y Carpenter (1992) también son conscientes de la dificultad que supone valorar la comprensión del conocimiento matemático que poseen los sujetos. Para ellos, esta complejidad viene motivada, fundamentalmente, por dos aspectos:

(a) Los modelos de comprensión usuales en Educación Matemática suelen ser propuestas teóricas centradas en la dimensión interna de la mente y que adoptan de antemano supuestos sobre aspectos difícilmente observables. Esto hace que la valoración se convierta, por tanto, en una auténtica tarea inferencial.

(b) La comprensión de un sujeto no puede inferirse a través de la respuesta dada a una sola situación-problemática. Se requiere una variedad de tareas de diferente naturaleza asociadas a un mismo conocimiento matemático para poder llegar a establecer con ciertas garantías un perfil sobre la comprensión de dicho conocimiento.

En general, la mayoría de los modelos propuestos para explicar el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático suelen generar estrategias con las que llevar a cabo una evaluación o valoración de la misma (Niemi, 1996). Estas estrategias, sin embargo, no llegan a validarse lo suficiente, ni en la propia investigación realizada ni en otras posteriores, de manera que son escasas las investigaciones en Educación Matemática dedicadas a validar instrumentos de este tipo. Tal como indica el autor, “[...] *En este momento, las medidas validadas de comprensión de las matemáticas y las estrategias para desarrollar estas medidas son visiblemente escasas. Muchos tests a gran escala ampliamente usados no valoran de forma apropiada la comprensión de conceptos específicos o dominios conceptuales y no son útiles para tomar decisiones sobre el desarrollo de una enseñanza para la comprensión. Estos tests muestran ítems de muchos dominios diferentes, con un número escaso de ítems representando a cada dominio*” (p.359).

En Pirie (1988), por ejemplo, también se muestra parte de la problemática que existe en torno a la valoración de la comprensión. Esta autora reconoce la imposibilidad de llegar a entender en su totalidad el fenómeno de la comprensión, aunque considera útil y necesario la elaboración de modelos teóricos para explicar, al menos, aspectos parciales del fenómeno. Por otra parte, advierte de la necesidad de tener precaución a la hora de describir e interpretar la comprensión que posee un sujeto a partir de las acciones que realiza cuando resuelve tareas problemáticas:

“[...] Las metáforas y categorizaciones teóricas son indudablemente valiosas, pero debemos tener especial cuidado cuando, en la práctica, intentamos describir el pensamiento de un alumno particular como algo evidenciado por sus acciones” (p.2).

Para la autora, las herramientas de las que disponemos en la actualidad para medir la comprensión matemática son primitivas y “[...] *deberíamos ser reacios a poner etiquetas a los niños [sobre su comprensión] basadas en cómo “hacen” matemáticas a menos que explícitamente afirmemos que las etiquetas se refieran sólo a las habilidades de los alumnos para ejecutar tareas matemáticas particulares*” (p. 6).

Por último, DeMarois y Tall (1996) son igualmente conscientes de la complejidad subyacente a la evaluación de la comprensión y registran las limitaciones que presenta su aproximación. Para ellos, aunque las facetas y niveles contemplados proporcionan un marco amplio desde el que iniciar el análisis del conocimiento matemático y el posterior establecimiento de perfiles, resulta necesario realizar más estudios en la misma línea para llegar a determinar perfiles de comprensión completos y significativos.

CAPÍTULO III

ANTECEDENTES (II): ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS ALGORITMOS Y EL CÁLCULO ARITMÉTICO ELEMENTALES

3.1 Introducción

Además de la revisión de antecedentes sobre comprensión del conocimiento matemático, cuyos resultados se exponen en el capítulo anterior, es necesario realizar la revisión de la información disponible sobre el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. La justificación es evidente sin más que tener en cuenta que se trata de una información fundamental para completar la primera fase del Análisis Didáctico en torno al problema de investigación y para desarrollar el análisis epistemológico y fenomenológico de dicho conocimiento matemático concreto. Ambas actividades, como se puede comprobar en los tres capítulos siguientes, conducen a la determinación de los medios adecuados para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del algoritmo de multiplicar.

En consecuencia, se presenta en este capítulo una descripción amplia y comentada, aunque con un alcance limitado que hemos considerado suficiente para los propósitos de la investigación, de la información de interés consultada sobre la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales. De hecho, la revisión que se presenta en este capítulo, a diferencia de la realizada sobre el fenómeno general de la comprensión, se ha extendido sólo lo preciso para garantizar un primer acercamiento a la naturaleza de los algoritmos y procedimientos algorítmicos¹ y poner de manifiesto las posibles conexiones entre dicho campo y el de la comprensión del conocimiento matemático².

En las condiciones señaladas, el capítulo se inicia con un análisis de carácter general sobre la naturaleza de los algoritmos y procedimientos algorítmicos elaborado con las aportaciones realizadas por algunos de los autores examinados (apartado 3.2). A continuación, en el apartado 3.3, se describe la problemática vigente en Educación Matemática acerca de la enseñanza de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas elementales así como del cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones y se presentan las diferentes posiciones y líneas de actuación propuestas para la enseñanza de la Aritmética elemental.

¹ Requisito exigido para la aplicación de la Aproximación a la comprensión del conocimiento matemático que se propone en el capítulo V.

² En el capítulo IV se establecen vínculos concretos entre los trabajos realizados en el área del cálculo aritmético elemental y los estudios centrados en la comprensión del conocimiento matemático. De este modo se pretende mostrar cómo los problemas y limitaciones identificados en el campo de la comprensión así como los logros y hallazgos alcanzados se reflejan en el campo del cálculo aritmético elemental.

En el apartado 3.4, por su parte, se tratan diversos temas relacionados con el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos y el cálculo aritmético. En concreto, se reúne, se organiza y sintetiza parte de la información existente sobre razonamiento y pensamiento algorítmico, sobre aportaciones recientes al cálculo aritmético desde la perspectiva del estudio de errores, sobre aritmética cognitiva, tareas y situaciones matemáticas y sobre los factores y condicionantes que intervienen en el aprendizaje del cálculo aritmético elemental, entre otros aspectos.

Finalmente, en el apartado 3.5, se enumeran las conclusiones más relevantes de interés para la investigación.

3.2 Algoritmos y procesos algorítmicos

3.2.1 La noción de algoritmo

De acuerdo con su origen, el término algoritmo debería hacer referencia a las distintas técnicas calculistas surgidas en el campo aritmético. No obstante, al haber sido traspasados en la actualidad los límites de la Aritmética, se pueden encontrar definiciones como las siguientes:

“Un algoritmo es una sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso, ciertas operaciones de tipo ejecutable, con vistas a la resolución de los problemas pertenecientes a una misma clase” (Ifrah, 1998, p. 1616)

“Un algoritmo es una prescripción, una orden o sistema secuenciado de órdenes que encadena una serie de operaciones elementales que llevan desde los datos iniciales al resultado” (Gairín y Sancho, 2002, p. 83)

En consecuencia, el concepto asociado a la noción de algoritmo suele abarcar más de lo que en principio se puede suponer. De hecho, bajo estas definiciones, no se tiene en cuenta la naturaleza particular de los elementos que intervienen (números, puntos y rectas,...) ni el tipo de reglas elementales involucradas (colocar las cifras en columnas, trazar una perpendicular,...) ni la clase de operaciones ejecutables (realizar una división, construir un pentágono,...). Que haya un número finito de reglas que hay que aplicar en un orden determinado o que el algoritmo sirva para resolver problemas de un mismo tipo, son características vinculadas más a las acciones y al procedimiento en sí que al contenido y hacen que bajo el término algoritmo se reúnan muchas más situaciones que las que inicialmente se incluían.

Por otra parte, en el ámbito de la Educación Matemática, Usiskin (1998) reconoce la dificultad que supone proponer una caracterización para la noción de algoritmo susceptible de ser aceptada ampliamente por la comunidad de educadores matemáticos. Por un lado, existen procedimientos inmediatos tan simples que no queda claro si debieran alcanzar la categoría de algoritmo de lápiz y papel (por ejemplo: la multiplicación de fracciones o los hechos numéricos básicos). Por otro lado, se emplean procesos tan complejos en ciertas demostraciones que resulta difícil determinar si los estudiantes que los desarrollan están aplicando un método ya aprendido o en realidad están resolviendo un problema novedoso (por ejemplo: demostraciones de sumas por

inducción o de congruencias de triángulos). En cualquier caso, el autor considera que la mayoría de los procedimientos algorítmicos que se presentan en el aula de matemáticas pertenecen a alguna de las tres categorías siguientes:

(a) Algoritmos aritméticos: como los de columnas para sumar, restar, multiplicar y dividir números de varios dígitos o los métodos para calcular raíces cuadradas y cúbicas, para operar con fracciones o para determinar la media aritmética, entre otros.

(b) Algoritmos de álgebra y cálculo: como los procedimientos para resolver ecuaciones lineales e inecuaciones, manipular fracciones algebraicas, calcular integrales definidas, simplificar radicales o evaluar fórmulas, entre otros.

(c) Algoritmos de dibujo: como los empleados para hacer gráficos de barras o de sectores, representar funciones, realizar construcciones con regla y compás o encontrar la transformada de imágenes de figuras, entre otros.

A lo largo del desarrollo de la presente memoria empleamos el término algoritmo para referirnos a los métodos de cálculo correspondientes a las cuatro operaciones aritméticas elementales: adición, sustracción, multiplicación y división. Asimismo, con la expresión *algoritmo tradicional escrito* o *algoritmo estándar escrito* nos referimos a los métodos clásicos de lápiz y papel y de columnas asociados a estas operaciones y que perduran en la actualidad en el ámbito educativo.

3.2.2 Procesos algorítmicos y heurísticos

En el presente apartado, con la intención de profundizar en la naturaleza de los procesos algorítmicos en general, se abordan algunas de las diferencias existentes entre los procesos algorítmicos y los llamados procedimientos heurísticos. Ambos tipos de procesos son importantes en Educación Matemática y, como veremos, están relacionados entre sí. El análisis de las diferencias mencionadas se organiza en torno a los cinco puntos siguientes:

(a) El uso adecuado de un procedimiento algorítmico garantiza siempre la obtención de una respuesta correcta. Sin embargo, dicha garantía es sólo teórica; aunque se considere al algoritmo como una sucesión finita de reglas, su ejecución práctica puede ser inviable o muy costosa si aumenta excesivamente el número de pasos. En tal sentido, Maurer (1998) advierte que a veces la garantía de respuesta concluyente se suele pasar por alto para considerar también como sucesos algorítmicos a determinados procedimientos de interés que teóricamente pueden permanecer funcionando sin dar una respuesta o que contienen una regla que no puede ser especificada con precisión (por ejemplo, la generación de un número aleatorio).

Por su parte, los métodos heurísticos no aseguran la solución de un problema al no especificar con exactitud el proceso que permite alcanzarla. El dominio de algunas estrategias heurísticas particulares puede mejorar nuestra habilidad para resolver problemas pero no consigue que tengamos la certeza absoluta de poder llegar a la solución, tal y como sucede con los procedimientos algorítmicos. Podemos decir, por tanto, que los algoritmos llevan asociado un determinismo mucho mayor que los métodos heurísticos, lo que facilita, en la misma medida, la seguridad sobre la obtención de la solución de un problema.

(b) Este determinismo hace que cada procedimiento algorítmico lleve asociada una colección o clase de problemas formada por aquellos que pueden ser resueltos a través de él. Dicho de otra forma, los procesos algorítmicos sirven para clasificar problemas, diferenciando entre los que pueden y no pueden ser resueltos mediante un algoritmo particular. Pero, debido precisamente a estas características, los problemas que venimos mencionando suelen ser catalogados como ejercicios, ya que el único requerimiento cognitivo para resolverlos consiste en saber cómo funciona el mecanismo o cuales son los pasos a dar (hemos visto en (a) que la puesta en práctica garantiza por sí sola la solución). Volveremos sobre esta cuestión en el apartado (d).

Sin embargo, estrategias heurísticas como *buscar un problema semejante* o *hacer un diagrama* no están restringidas a ninguna clase particular de problemas, que es, precisamente, donde reside la potencialidad del método heurístico: aunque éste no garantice la solución, las pautas de actuación que propone pueden ser útiles para resolver la mayoría de los problemas matemáticos que se planteen. La figura 3.1 pretende ser una ilustración gráfica de la diferencia analizada.

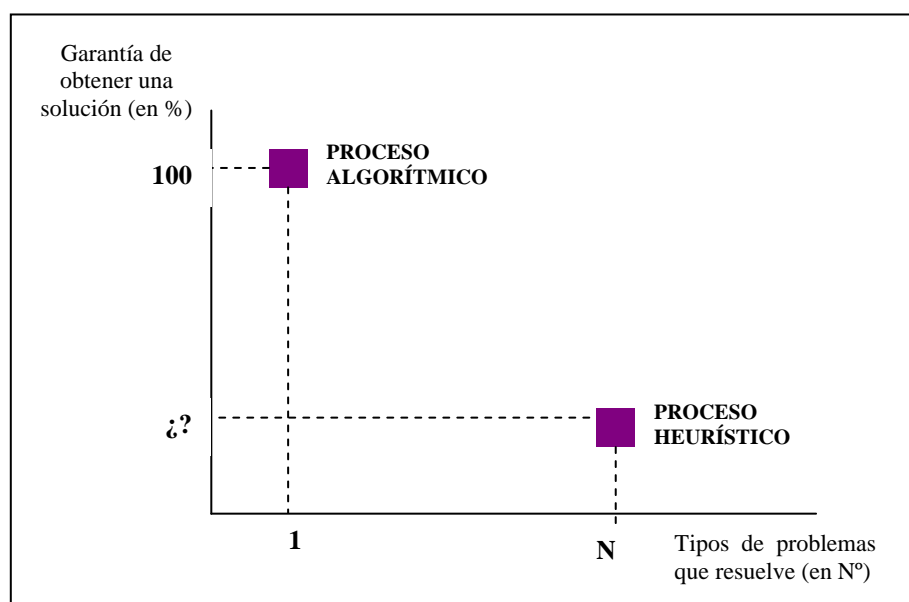


Figura 3. 1.- Situación relativa de los procesos algorítmicos y heurísticos.

(c) Es frecuente que dentro del procedimiento heurístico seguido para resolver un problema haya una parte de naturaleza algorítmica. Generalmente corresponde a una fase de *ejecución del plan* de acuerdo con el modelo de resolución de problemas propuesto por Polya (1965). En cambio, el determinismo asociado a los procesos algorítmicos hace imposible o muy difícil lo contrario, aunque el sujeto que domina un algoritmo pueda ser capaz, en un momento dado, de reducir algunos pasos mediante estrategias de tipo heurístico. Es lo que ocurre, por ejemplo, con el algoritmo semiautomático de la división (Gómez, 1988), donde es normal utilizar la estimación para elegir las cifras más adecuadas en el cociente.

(d) La diferente naturaleza de los procesos algorítmicos y heurísticos queda aún más patente al considerar el tipo de conocimiento involucrado en cada uno de ellos. Así, de acuerdo con la clasificación de Farnham-Diggory (1994) sobre los tipos de conocimiento existentes, podemos identificar al conocimiento declarativo y al procedimental como los únicos necesarios para dominar los procesos algorítmicos,

mientras que los métodos heurísticos requieren de todos los tipos de conocimiento existentes: declarativo, procedimental, conceptual, analógico y lógico.

Incluso en los alumnos de nivel más bajo en cuanto a resolución de problemas, donde sus estrategias se reducen básicamente a la representación externa con objetos físicos, Carpenter (1986) señala que los procedimientos heurísticos no están automatizados en secuencias fijas de pasos, sino que dependen de la naturaleza semántica de cada problema. Por eso afirma que el conocimiento utilizado en estos casos es más conceptual que procedimental, a pesar de que en un principio la falta de flexibilidad en los métodos haga pensar lo contrario.

Por todo ello, usando la terminología propia del campo de la Inteligencia Artificial, podemos decir que los procedimientos heurísticos están más cercanos a una conducta inteligente del individuo que los procesos algorítmicos y que la complejidad de los primeros frente a los segundos se pone de manifiesto al hablar de la resolución de verdaderos problemas y no de meros ejercicios mecánicos.

(e) El empirismo lógico siempre ha intentado identificar racionalidad con computabilidad algorítmica. Asimismo, Popper considera el descubrimiento y la creatividad como actos de naturaleza irracional o, más exactamente, <<arracional>> (Brown, 1994), haciendo referencia a que no hay ninguna justificación racional para el “insight” propio del método heurístico en resolución de problemas. En consecuencia, para estas tendencias y autores, el proceso algorítmico sería racional y el heurístico irracional.

Pero tales ideas son contrarias a las defendidas por Brown (1994), para quien la racionalidad requiere de juicios fundados en la razón humana: “*En tanto que se puedan llevar a cabo las decisiones por medio de algoritmos, la intervención humana deja de ser necesaria [irracionalidad]; precisamente cuando no disponemos de ningún procedimiento efectivo que nos guíe debemos apelar a un juicio humano racional e informado [racionalidad]*” (p. 195). Desde este punto de vista, los procesos algorítmicos deben ser entendidos como irracionales, mientras que los heurísticos se ajustan más a un comportamiento racional del individuo. Precisamente, la intervención del juicio humano en el procedimiento heurístico hace que éste sea falible, lo que contrasta con la infalibilidad del algoritmo y justifica, en parte, el argumento expuesto en el apartado (a).

Sea como fuere, independientemente de la concepción que podamos tener de *racionalidad*, hemos de resaltar que ésta puede utilizarse para discriminar entre los procesos algorítmicos y heurísticos.

3.3 Enseñanza de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales

En los últimos años se han venido elaborando propuestas alternativas de actuación en el aula para desarrollar una instrucción más efectiva y mejorar la enseñanza-aprendizaje de los algoritmos de cálculo elementales. La mayor parte de los documentos publicados sobre enseñanza de los algoritmos numéricos van dirigidos a profesores de matemáticas y recogen propuestas y sugerencias didácticas acerca de cómo trabajar en el aula con los métodos de cálculo correspondientes. Estos trabajos, aunque son de carácter divulgativo, se suelen apoyar en investigaciones previas y dejan entrever diferentes concepciones acerca del aprendizaje y desarrollo cognitivo del estudiante. Pero no todos los trabajos revisados son de este tipo. Junto a ellos, hemos considerado algunos trabajos de investigación relacionados con la enseñanza de los algoritmos en la escuela

y que también serán analizados a continuación de la relación exhaustiva de documentos consultados que se expone en el apartado siguiente.

3.3.1 Fuentes consultadas

Destacamos las siguientes fuentes examinadas:

- **Ball, S. (1986).** From Story to Algorithm.
- **Bell, A. (1993).** Principles for the design of teaching.
- **Boero, P., Ferrari, P. L. y Ferrero, E. (1989).** Division Problems: Meanings and Procedures in the Transition to a Written Algorithm.
- **Burns, M. (1994).** Arithmetic: The Last Holdout.
- **Cambell, P. F., Rowan, T. E. y Suarez, A. (1998).** What Criteria for Student-Invented Algorithms?
- **Carroll, W. M. (1996).** Use of Invented Algorithms by Second Graders in a Reform Mathematics Curriculum.
- **Carroll, W. M. y Porter, D. (1998).** Alternative Algorithms for Whole-Number Operations.
- **Curcio, F. R. y Schwartz S. L. (1998).** There are no algorithms for teaching algorithms.
- **Gómez, B. (1988).** *Numeración y Cálculo.*
- **Gómez, B. (1999a).** El futuro del cálculo.
- **Hamrick, K. B. y McKillip, W. D. (1978).** How Computational Skills Contribute to the Meaningful Learning of Arithmetic.
- **Hedrés, R. (1998).** The teaching of traditional standard algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupils' own methods.
- **Ibrah, G. (1998).** *Historia Universal de las Cifras.*
- **Kamii, C. (1995).** *Reinventando la aritmética III.*
- **Kamii, C. y Dominick, A. (1997).** To Teach or Not to Teach Algorithms.
- **Kamii, C., Lewis, B. A. y Livingston, S. L. (1993).** Primary Arithmetic: Children Inventing their own Procedures.
- **Kouba, V. L. y Franklin, K. (1995).** Multiplication and Division: Sense Making and Meaning.
- **Kraemer, J. M. (1999).** Dividir construyendo los números (mentalmente) ¿Una alternativa frente al algoritmo usual de la división?
- **Mason, D. E. (1998).** Capsule Lessons in Alternative Algorithms for the Classroom.
- **Maza, C. (1991).** *Multiplicar y dividir.*
- **Philipp, R. A. (1996).** Multicultural Mathematics and alternative algorithms.
- **Ramírez, A. y Usón, C. (1996).** ...Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones.
- **Resnick, L. B. (1992).** From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge.
- **Roa, R. (2001).** Algoritmos de cálculo.
- **Ron, P. (1998).** My Family Taught Me This Way.
- **Schliemann, A. D., Dos Santos, C. M., Da Costa, S. C. (1993).** Constructing Written Algorithms: A Case Study.
- **Skemp, R. (1993).** *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.*

- **Stanic, G.M.A y McKillip, W. D. (1989).** Developmental Algorithms Have a Place in Elementary School Mathematics Instruction.
- **Stefanich, G. P. y Rokusek, T. (1992).** An Analysis of Computational Errors in the Use of Division Algorithms by Fourth-Grade Students.
- **Steinbring, H. (1989).** Routine and Meaning in the Mathematics Classroom.
- **Trajtenbrot, B.A. (1977).** *Los algoritmos y la resolución automática de problemas.*
- **Usiskin, Z. (1998).** Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age.
- **Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996).** Number and Arithmetic.
- **Whitin, D. J. y Whitin, P. E. (1998).** The “Write” Way to Mathematical Understanding.

3.3.2 Los algoritmos en el currículum: una polémica aún vigente

La polémica que tuvo lugar en Europa cinco siglos atrás entre los *abacistas*, o partidarios del cálculo con fichas sobre el ábaco y de numeraciones arcaicas como la griega o la romana, y los *algoristas*, o defensores del moderno cálculo escrito con números de origen hindú (Ifrah, 1998), ha llegado a trasladarse en los últimos años al ámbito educativo, aunque esta vez en forma de dudas en torno al cómo y al porqué de la enseñanza de los algoritmos de lápiz y papel. De hecho, Ramírez y Usón (1996) destacan el paralelismo existente entre la disputa surgida entonces y la controversia actual establecida en torno a la enseñanza de los algoritmos aritméticos elementales. Incluso llegan a considerar que la resistencia a su abandono, mostrada en la actualidad por algunas instituciones, entre ellas la escolar, es comparable a la posición conservadora adoptada en su día por los abacistas, reacios a olvidar sus métodos de cálculo tradicionales.

Indagando en los antecedentes de esta situación, encontramos en Gómez (1999a) la justificación histórica de la inclusión de los algoritmos tradicionales en los programas de matemáticas oficiales. El autor señala que la enseñanza del cálculo aritmético, tal y como la conocemos hoy en día con la presencia de las denominadas “cuatro reglas de cálculo”, comenzó a configurarse a principios del siglo XIX. Hasta esta época, por no haber un currículum obligatorio, estuvieron conviviendo en las escuelas varios métodos de cálculo para una misma operación, siendo el profesor de aula el que debía seleccionar para su enseñanza unos u otros procedimientos de acuerdo a su criterio. Sin embargo, “[...] *al establecerse el sistema general y público de enseñanza, se hizo necesario un programa común para los estudiantes de un mismo nivel educativo, un programa de mínimos que todos debían aprender, y en consecuencia un solo método para cada operación; todos el mismo, el mejor por más general; desde entonces estos algoritmos serán conocidos como << las cuatro reglas >>...*” (p. 22).

Por otra parte, en lo que se refiere a la polémica mencionada, existen dos posiciones distintas enfrentadas entre sí, una a favor y otra en contra de la enseñanza de estos métodos de cálculo en la actualidad; posiciones que también pueden hacerse extensibles a cualquier algoritmo matemático. Veamos, a continuación, una breve discusión sobre los argumentos que sustentan ambas opiniones.

(a) Si la Matemática tiene como objetivo prioritario resolver problemas y encontrar soluciones a cuestiones cada vez más difíciles, parece que la necesidad de algoritmos está totalmente justificada. Son varias las razones que respaldan esta afirmación. En

primer lugar, “*en la matemática se considera resuelta una serie de problemas de un determinado tipo cuando se elabora el algoritmo para su resolución*” (Trajtenbrot, 1977, p.14). En segundo lugar, el progreso en matemáticas exige la automatización de los procesos elementales para concentrar la atención en las nuevas ideas, las cuales, a su vez, necesitarán transformarse en automáticas para poder abordar otras más complejas y así sucesivamente (Skemp, 1993). La consecuencia más natural que se extrae de estos argumentos es la necesidad y oportunidad de enseñar a los alumnos unos algoritmos que resuelvan las operaciones aritméticas elementales de forma sencilla y automática.

Usiskin (1998), por su parte, enumera hasta nueve razones diferentes por las que es útil saber y enseñar algoritmos matemáticos: son eficaces, fiables, precisos, rápidos, proporcionan un registro escrito, establecen una imagen mental, son instructivos (por ejemplo, la construcción con regla y compás del triángulo equilátero exhibe elegantemente propiedades características de lo “equilátero”), pueden ser utilizados en otros algoritmos y pueden ser objetos de estudio (comparación de eficacia, características matemáticas, análisis de velocidad, entre otras características).

Entre las ventajas de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas básicas, Hedrén (1998) destaca las siguientes:

- son métodos de cálculo muy efectivos y fruto del proceso de refinamiento que han experimentado durante siglos;
- son procedimientos que pueden ser utilizados siempre del mismo modo por muy complejos que sean los números involucrados en el cálculo;
- constituyen un tesoro cultural que forma parte de la historia de la matemática y que, por tanto, debemos cuidar.

(b) A pesar de los supuestos beneficios que proporciona la enseñanza de los algoritmos estándar para sumar, restar, multiplicar y dividir, algunos autores (Gómez, 1988; Maza, 1991) afirman que éstos han encontrado en la calculadora, para operaciones con números grandes, y en el cálculo mental, para operaciones con números pequeños, duros adversarios que han terminado por desplazar su posición central en el currículum. En realidad, se viene cuestionando cada vez más la importancia y necesidad real de instruir a los estudiantes en unos procedimientos de cálculo sofisticados, de difícil comprensión y de dudosa utilidad práctica para la vida cotidiana. Si la función principal de estos algoritmos es la de reducir el esfuerzo mental, existen otros métodos de lápiz y papel más simples de utilizar (por ejemplo, los de rejilla para el producto), aunque ninguno de ellos es comparable a la sencillez, rapidez y eficacia de la calculadora. Por otra parte, si lo que se busca es un aprendizaje comprensivo, existen estudios (Kamii, 1995) que muestran la deficiente comprensión que poseen ciertos alumnos de los algoritmos tradicionales así como la elevada capacidad de estos mismos sujetos para inventar y desarrollar procedimientos de cálculo significativos, tanto escritos como mentales. Estos son algunos de los argumentos de los que defienden que la presencia en el currículum de los algoritmos de columnas para las cuatro operaciones aritméticas básicas debería limitarse drásticamente e incluso desaparecer por completo.

A decir verdad, la problemática establecida no se reduce únicamente a una simple discusión entre partidarios y detractores de los algoritmos estándar, sino que constituye una cuestión más compleja donde intervienen todas las manifestaciones del cálculo y las posibles relaciones entre ellas (figura 3.2). Por ejemplo, Carroll y Porter (1998) se preocupan por distinguir los algoritmos estándar de los de lápiz y papel, dando a entender que los primeros son sólo un subconjunto muy particular de los segundos. De

hecho, la diferencia entre ambos queda patente en lo que a su enseñanza se refiere. Así, estos autores hacen algunas observaciones para justificar la utilidad de los algoritmos escritos en el aula de matemáticas:

- (a) Algunos cálculos no son fáciles de realizar mentalmente.
- (b) Frente a la calculadora o la estimación mental, los algoritmos escritos constituyen el método más razonable para calcular con números de tamaño medio.
- (c) Hay alumnos que tienen dificultades para inventar algoritmos por sí mismos. En estos casos, el aprendizaje de ciertos métodos escritos presentados por el profesor puede ser la alternativa adecuada.
- (d) Existen condicionantes institucionales y sociales que hacen que los estudiantes necesiten conocer algunos métodos escritos para cada operación.

Sin embargo, estas justificaciones favorables difieren notablemente de la idea que poseen los autores respecto a la enseñanza de los algoritmos escritos estándar:

“Aunque sea ventajoso para todos los estudiantes conocer al menos un procedimiento escrito para cada una de las operaciones, los algoritmos estándar enseñados en la escuela no son a menudo los más apropiados o comprensibles. Aunque son eficientes, el significado de estos algoritmos estándar... a menudo es confuso para los alumnos que los aprenden sin comprensión” (p. 107).

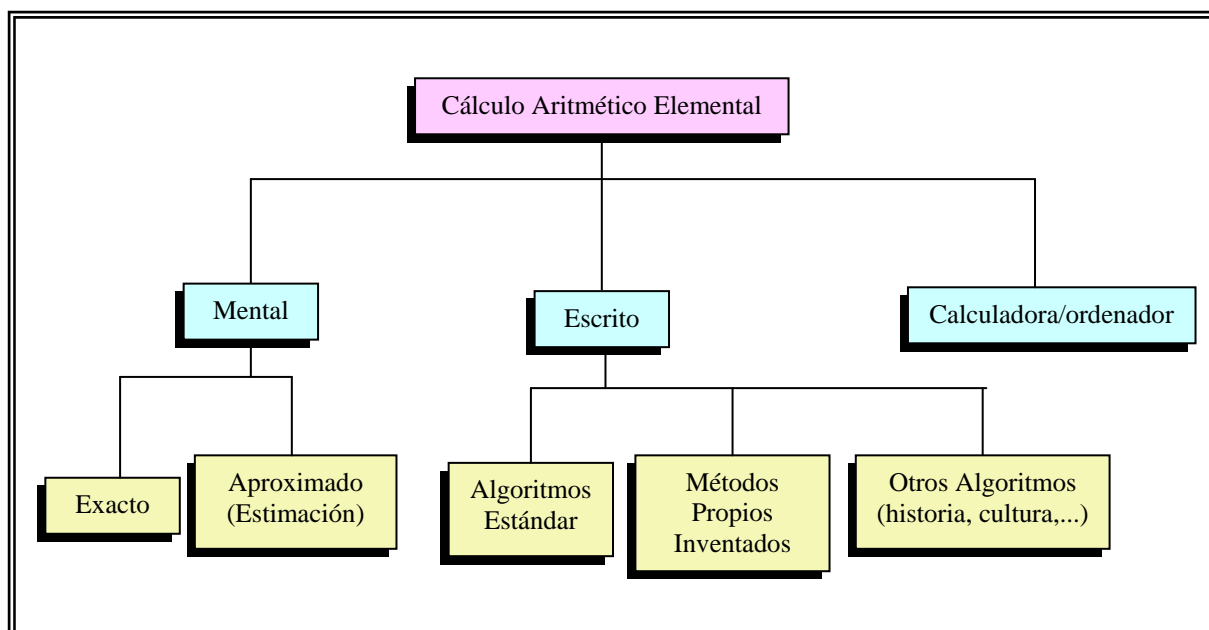


Figura 3.2.- Cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones

Por otra parte, conociendo la propuesta de enseñanza de Kamii y colaboradoras (apdo. 3.3.4.2), Carroll (1996) analiza en su trabajo el nivel de competencia aritmético que realmente puede alcanzar un alumno medio cuando está inmerso en un currículum de matemáticas basado en la resolución de problemas y sin instrucción directa del profesor. Asimismo, estudia los algoritmos que son capaces de desarrollar estos estudiantes y las estrategias implicadas en su uso.

El autor selecciona tres colegios de diferente clase socio-económica para realizar unas entrevistas a 33 alumnos de 2º grado (11 de cada colegio), en las que se les pide

resolver tres problemas aritméticos de enunciado verbal, característicos del currículum reformado, y tres problemas descontextualizados de puro cálculo, típicos del currículum tradicional. De los resultados obtenidos, Carroll destaca la escasa diferencia en el éxito de los alumnos al resolver los dos tipos de problemas, algo que es contrario a otros resultados que aseguran que los estudiantes a menudo encuentran los problemas de enunciado verbal más difíciles que los de mero cálculo. Asimismo encuentra que, a pesar de que se le ha dado poco peso a la instrucción en el nuevo currículum, los estudiantes han calculado tan bien o incluso mejor que aquellos que han recibido una instrucción tradicional. Sin embargo, a pesar de que Burns (1994) o Kamii y Dominick (1997) sugieren eliminar la enseñanza de los algoritmos tradicionales, no hay evidencias claras sobre la capacidad real que tienen los estudiantes para inventar y usar procedimientos aritméticos significativos sin instrucción directa alguna. Por eso, la conclusión más relevante a la que llega Carroll es a la de cuestionar el nivel de competencia aritmética que debe alcanzar un alumno medio en su paso por la escuela. Según el autor, son necesarias investigaciones dedicadas a estudiar las ventajas y desventajas del uso de algoritmos alternativos (mentales y escritos) y a analizar las relaciones entre el conocimiento de los hechos numéricos y los algoritmos alternativos y el papel que juega el conocimiento y las creencias del profesor en la instrucción.

En los apartados siguientes se muestran los distintos enfoques existentes en la actualidad sobre la enseñanza del cálculo aritmético elemental. Todos se diferencian entre sí, precisamente, por destacar alguna de sus manifestaciones en detrimento de otras (por ejemplo, el cálculo mental sobre el escrito y la calculadora) y por el modo de abordarlas y relacionarlas entre sí. Veamos, en lo que sigue, amplios resúmenes de las aportaciones mencionadas agrupadas en torno a los siguientes temas: enseñanza de los algoritmos estándar (apartado 3.3.3), enfoques de enseñanza no tradicionales (apartado 3.3.4) y aproximaciones integradoras (apartado 3.3.5).

3.3.3 Enseñanza de los algoritmos estándar. Distintas aproximaciones

En la revisión llevada a cabo se han detectado diversas líneas de actuación, claramente diferenciadas, que pasamos a describir a continuación:

Para Stanic y McKillip (1989) los métodos de cálculo se suelen presentar en clase como algoritmos estándar que los alumnos deben dominar, sin existir un periodo de desarrollo previo donde se progrese en etapas sucesivas desde la manipulación significativa con material didáctico (por ejemplo, con bloques multibase) hasta el procedimiento clásico de lápiz y papel. Los autores consideran que el punto de partida para llegar a comprender un determinado algoritmo se sitúa en el trabajo con materiales manipulativos, siendo fundamental la utilización de algoritmos extendidos o desarrollados para ayudar a los alumnos a establecer las conexiones adecuadas. El proceso que proponen consta de dos fases: una primera, en la que los alumnos realizan las acciones de sumar, restar, multiplicar o dividir con el material didáctico específico a la vez que se presenta el correspondiente algoritmo extendido acompañado con una descripción verbal adecuada; una segunda, en la que los alumnos comparan el algoritmo extendido y el estándar centrando la atención, posteriormente, en este último.

Roa (2001) también reconoce la necesidad de realizar diferentes actividades previas con materiales de distinto nivel de concreción. El autor considera adecuado iniciar el aprendizaje de los algoritmos con la manipulación de objetos concretos que permitan la

representación de la estructura del sistema de numeración decimal posicional, destacando entre todos ellos a los bloques multibase. En la misma línea se manifiestan Stefanich y Rokusek (1992), aunque también introducen la utilización del análisis de los errores cometidos por los alumnos. Así, los autores emplean la enseñanza por diagnóstico para desarrollar un programa instructivo de dos días de duración tras pasar el pretest de detección de errores para el algoritmo estándar de la división. En el primer día, los profesores exponían el algoritmo escrito de la división con ayuda de los bloques multibase (base 10). Posteriormente, para que se familiarizaran con el procedimiento, se les pidió a los estudiantes que formaran grupos de cuatro y resolvieran divisiones similares empleando el mismo material didáctico. Al final de la sesión se hizo una puesta en común de cada una de las tareas propuestas. La táctica empleada en este primer día consistió en fragmentar el algoritmo en sus partes más simples, tratar de dominarlas de forma automática y reconstruir a partir de ellas todo el proceso de cálculo; es lo que los autores denominan la técnica de “procedimentar”, esto es, *“hacer que los estudiantes ejecuten la destreza sin tener que pensar sobre ella”* (p. 202).

En el segundo día, cada profesor recopiló algunos de los errores cometidos por los alumnos durante el día anterior, los expuso ante el grupo y desarrolló una instrucción directa acerca de cómo corregirlos. A continuación, les propuso que identificaran y corrigieran errores similares haciendo uso de lo aprendido.

Una vez concluidas las dos sesiones, los estudiantes pasaron a una unidad de resolución de problemas con calculadora durante 5 semanas, transcurrida la cual volvieron a realizar el test inicial de detección de errores.

En base a los resultados obtenidos, los autores llegan a la conclusión de que la instrucción por diagnóstico desarrollada resultó efectiva. Según ellos, sin una intervención como ésta los errores sistemáticos cometidos hubieran continuado “latentes” durante un periodo de tiempo considerable. Por este motivo, recomiendan a los profesores que busquen regularidades en los datos erróneos de sus alumnos y que analicen el trabajo escrito elaborado, puesto que de él se obtiene información útil para el diagnóstico y la posterior planificación de un programa de instrucción adecuado para remediar las deficiencias detectadas.

Una aproximación algo diferente a la anterior es la que propone combinar los materiales manipulativos con explicaciones escritas producidas por los estudiantes. En este sentido, Whitin y Whitin (1998) aconsejan el empleo de la escritura como medio para dar sentido a las reglas artificiales asociadas a los algoritmos de cálculo que los alumnos normalmente no logran comprender. Es más, afirman que los profesores pueden utilizar la escritura para valorar la comprensión de los estudiantes, fomentar el sentido numérico y mejorar el contenido de las conversaciones matemáticas.

Otro uso característico de la escritura para evaluar la comprensión consiste en proponer a los estudiantes que inventen enunciados de problemas cuya solución se obtenga a través de un cálculo dado (por ejemplo, $50-32=18$). Asimismo, puede ser útil el empleo en clase de diarios o cuadernos de campo donde se registren todas las producciones y cálculos realizados por los niños al resolver problemas. En opinión de Whitin y Whitin, este material escrito podría ser empleado posteriormente en el aula para reflexionar y discutir en común las justificaciones escritas elaboradas por algunos de los alumnos.

Por su parte, Schliemann, Dos Santos y Da Costa (1993) advierten sobre el hecho de que los métodos de enseñanza basados en el uso de materiales didácticos para conectar

la componente sintáctica y semántica de los algoritmos de cálculo no han alcanzado la eficacia deseada (Resnick (1992) hace un breve análisis de las carencias de estos métodos). Estos autores plantean una aproximación alternativa hacia la comprensión en dos fases:

1º) Fomentar que el alumno construya sus propias reglas y convenios para representar de forma escrita los cálculos mentales que ya es capaz de ejecutar.

2º) Facilitar, con ayuda del profesor, la transición gradual de la representación escrita particular a los algoritmos clásicos aceptados en la escuela.

Como contribución para demostrar la viabilidad de esta aproximación, Schliemann y sus colaboradores presentan un estudio donde se recoge la progresiva sistematización de un algoritmo escrito para la suma inventado por un alumno de 14 años con dificultades de aprendizaje. Aunque el procedimiento inventado no resultó tan refinado como el tradicional, el estudiante manifestó en su uso una profunda comprensión de las propiedades del sistema de numeración decimal.

Boero, Ferrari y Ferrero (1989) describen los pormenores de una investigación de tipo curricular orientada a la elaboración de propuestas de enseñanza para aproximar a los alumnos de un modo comprensivo a los algoritmos escritos de las cuatro operaciones aritméticas básicas, con especial interés en la división. Según estos autores, la aproximación a un algoritmo escrito para la división comienza con la elección de los problemas pertinentes que se han de presentar a los estudiantes, para lo que es importante tener en cuenta los denominados “campos de experiencia” concretos, expresión que emplean para referirse a *“aquellos contextos, identificados por el niño como unitarios y reconocibles en base a sus propias características, en los cuales el profesor propone actividades de modelización matemática, resolución de problemas aritméticos y geométricos, etc.”* (p. 18).

Para comenzar el proceso, se sugiere que las primeras actividades estén relacionadas con situaciones vividas directamente por los estudiantes. En una etapa posterior, se pueden proponer problemas en situaciones no experimentadas, aunque similares a las ya conocidas. En cualquier caso, las tareas ficticias son excluidas de la secuencia de enseñanza y tampoco se enseña el procedimiento de cálculo escrito para la división. Con ello se pretende que los alumnos, a través de la creación de métodos de cálculo propios lleguen a comprender la división como un modelo matemático identificativo de un conjunto de situaciones problema. A diferencia de la enseñanza tradicional, la formalización estándar de la operación aritmética quedaría aplazada hasta que los estudiantes tuvieran conocimiento de los significados de la operación.

Para mostrar la adecuación de la aproximación descrita, Boero et al. desarrollaron durante cinco años una investigación que involucraba a 120 aulas de 1º a 5º de Primaria y en la que emplearon una metodología mixta con observaciones directas en el aula, análisis de protocolos y tests de evaluación. Las principales estrategias empleadas por alumnos de 8 a 10 años al resolver algunos de los PAEV de división (partición y medida) propuestos durante el proyecto fueron éstas:

1. Estrategias de distribución manipulativa. División basada en el dibujo o realizada con ayuda de materiales concretos.
2. Estrategias de ensayo y error para completar el dividendo, con dos modalidades:

2.a) Adición repetitiva

2.b) Multiplicación:

- como suma reiterada³ (problemas de medida).
- como operación inversa de la división ($d * ? = D$; problemas de partición).

3. Sustracciones repetitivas hasta “vaciar” el dividendo, con dos modalidades:

3.a) Versión simple.

3.b) Versión sofisticada, donde se combina el producto y la sustracción (el modelo más cercano al algoritmo estándar escrito de la división de números naturales).

La investigación concluye que con el método de enseñanza empleado se obtiene una ligera mejoría en la competencia y comprensión de los estudiantes, que estos acceden a los significados menos evidentes de la división, que descubren multitud de regularidades numéricas y operativas y que llegan a comprender, con relativa facilidad, un algoritmo escrito para dividir números naturales (el surgido de la estrategia 3b) igual de eficaz que el estándar pero con la diferencia de que cada uno de los pasos está plenamente justificado.

3.3.4 Enfoques de enseñanza no tradicionales

3.3.4.1 Algoritmos escritos alternativos

Frente a los procedimientos estándar, Carroll y Porter (1998) optan por la presentación en el aula de algoritmos escritos alternativos más comprensibles que los tradicionales. Tal como señalan, estos métodos de cálculo podrían ser útiles para los estudiantes con independencia del tipo de instrucción que reciban. Si ésta es tradicional, basada en la enseñanza de algoritmos estándar, los métodos alternativos servirían para mostrar que existen otras formas de calcular y para que los estudiantes con dificultades de aprendizaje dispongan de otros procedimientos de cálculo. Por el contrario, en el caso de una enseñanza basada en el cálculo mental y en el uso de la calculadora, los algoritmos alternativos proporcionarían un método de lápiz y papel para trabajar con números de tamaño medio, que no son fáciles de manipular mentalmente pero para los que tampoco se hace necesario el empleo de la calculadora.

Por otra parte, Philipp (1996), defensor de la reforma en la enseñanza de la Aritmética en EEUU, también propone tareas centradas en la búsqueda de algoritmos de cálculo alternativos. Según el autor, con las actividades de este tipo no se pretende sugerir a los profesores que enseñen una gran cantidad de algoritmos ni que elijan el algoritmo más conceptual y adecuado, sino que dé facilidades a los alumnos para que presenten y discutan en clase algoritmos alternativos, bien inventados por ellos mismos o bien aprendidos fuera de la escuela.

Esta aproximación evitaría, entre otras cosas, que ocurran problemas como el detectado por Ron (1998) en estudiantes de Primaria de origen latino en colegios estadounidenses. Estos alumnos, según el autor, suelen encontrarse frente a procedimientos diferentes para la sustracción, unos “oficiales” y otros de origen familiar, que terminan combinando para crear algoritmos híbridos incorrectos.

³ Existe una versión más sofisticada en la que se utilizan relaciones numéricas (doblar,...).

Los algoritmos escritos alternativos no surgen únicamente por influencias culturales sino que a veces provienen de la propia historia de la Matemática. Mason (1998), por ejemplo, acude a ella y aconseja emplear en el aula algoritmos propios de épocas pasadas, puesto que a través de la comparación entre los métodos de cálculo antiguos y los actuales se puede ver claramente que el conocimiento matemático no es estático ni definitivo. Como ejemplo de algoritmo histórico alternativo, la autora menciona el algoritmo de “cálculo sobre líneas”, un procedimiento empleado en el siglo XV por los comerciantes europeos para sumar y restar. Entre las ventajas de este método, se menciona el hecho de que la adición se puede realizar sin necesidad de conocer las tablas de sumar. Además, la manipulación de las fichas refuerza los conceptos de valor posicional y de agrupamiento, y permite dar un sentido al mecanismo de “llevadas”. En cuanto a la extensión, Mason considera que no resulta difícil mostrar a los alumnos el procedimiento para restar una vez que se han familiarizado con el de la suma.

3.3.4.2 Invención y desarrollo de algoritmos

Motivado por el dilema existente entre la enseñanza de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas básicas y la enseñanza centrada en el desarrollo de métodos de cálculo alternativos elaborados por los propios alumnos, Hedrén (1998) estudia la evolución de una clase desde 2º hasta 5º de Primaria en la que no se enseña ningún algoritmo estándar sino que se trabaja para que los alumnos inventen y desarrollen sus propios procedimientos de cálculo escrito bajo la óptica del constructivismo social. En el aula experimental se fomentó el uso de: (a) distintos métodos de lápiz y papel, (b) el cálculo mental y la estimación y (c) la calculadora. En definitiva, se contempló el cálculo aritmético elemental en todas sus manifestaciones con excepción de los algoritmos estándar escritos.

De las distintas observaciones realizadas, Hedrén extrajo, entre otras, las siguientes conclusiones:

- (a) Los alumnos mostraron una elevada comprensión del valor posicional al tener que hacer los cálculos en numerosas ocasiones separando las centenas, decenas y unidades de las cifras.
- (b) Se puso de manifiesto el dominio de las propiedades de las cuatro operaciones aritméticas. En concreto, para simplificar los cálculos algunos estudiantes emplearon un tipo de compensación en la adición y la sustracción así como la propiedad distributiva del producto y la división respecto de la suma.
- (c) Los métodos escritos inventados por los alumnos fueron muy similares a los utilizados cuando calculaban mentalmente. En cierto sentido, se podría decir que dichos métodos eran la representación escrita de los procedimientos de cálculo mental.

En consecuencia, Hedrén duda de la necesidad real de enseñar algoritmos como los estándar para las cuatro operaciones aritméticas básicas. En su opinión, si los profesores y padres de alumnos insisten demasiado en su enseñanza, ésta, al menos, debería aplazarse hasta 6º de Primaria o 1º de Secundaria, cuando ya los alumnos han tenido suficientes oportunidades para desarrollar un buen sentido numérico y están en condiciones de comprender esos métodos hasta ahora incomprensibles.

Por otra parte, Kamii, Lewis y Livingston (1993), Burns (1994) y Kamii y Dominick (1997) adoptan una posición aún más crítica sobre la conveniencia de enseñar

algoritmos preestablecidos en los primeros años de escolaridad. Estas autoras se apoyan en el constructivismo piagetiano para defender una enseñanza de la Aritmética que se preocupe por ofrecer a los alumnos oportunidades para que inventen sus propios métodos de cálculo. Kamii et al. (1993) dan las tres razones siguientes para justificar esta opinión:

1. Los estudiantes no tienen que renunciar a su propio pensamiento.
2. A diferencia de lo que ocurre con los algoritmos, su comprensión sobre el valor de posición se refuerza y no se debilita.
3. Los alumnos desarrollan un mejor sentido numérico que se demuestra tratando a los números globalmente, como un todo, y no como cifras cercanas pero independientes.

Desde un enfoque similar, Burns (1994) cree que lo ideal es considerar la Aritmética como parte de un currículum de matemáticas centrado en la resolución de problemas, donde las situaciones y el contexto son las que determinan la elección de los procedimientos adecuados. Por su parte, Kamii y Dominick (1997) ponen de manifiesto el carácter nocivo de los algoritmos a través de unas entrevistas individuales realizadas en la Hall-Kent School de Birmingham (Alabama) a dos grupos de estudiantes con y sin instrucción en procedimientos algorítmicos de cálculo. A todos se les pidió que realizaran las mismas operaciones aritméticas por el método que creyeran oportuno y, a la vez, explicaran el proceso seguido en la consecución de la solución. Se obtuvieron los siguientes resultados:

(a) Los alumnos de las clases “sin algoritmos” alcanzaron un porcentaje de respuestas correctas muy superior al conseguido por los estudiantes de las clases “con algoritmos”.

(b) Las diferencias más importantes se daban en las respuestas incorrectas. Los alumnos de las clases “con algoritmos” dieron unas respuestas incorrectas irrazonablemente grandes y pequeñas. Por el contrario, las producidas por los estudiantes de las clases “sin algoritmos” fueron más razonables.

(c) Las explicaciones de los alumnos ponían al descubierto la profunda comprensión de unos (“sin algoritmos”) frente a la falta de comprensión de otros (“con algoritmos”) sobre los principios que rigen los cálculos aritméticos.

Haciendo uso de la clasificación propuesta por Piaget acerca de los tipos de conocimiento existentes: físico, lógico-matemático y social-convencional (Kamii, 1995), Kamii y Dominick (op. cit.) destacan que los algoritmos enseñados hoy en día en la escuela pertenecen al conocimiento social-convencional determinado por la sociedad y el tiempo en que vivimos. En cambio, en los procedimientos de cálculo que construyen los alumnos interviene un conocimiento lógico-matemático. *“Esta diferencia explica porqué los algoritmos no ayudan al desarrollo del razonamiento matemático de los niños”* (Kamii y Dominick, 1997, p. 58).

Con un enfoque cercano a los anteriores, Verschaffel y De Corte (1996) describen las características generales de la aproximación denominada Educación Matemática

Realista (RME). Esta aproximación presta atención a la aritmética mental y sugiere para los primeros grados de la escuela elemental un trabajo extenso en cálculo mental y estimación como fase previa necesaria para el desarrollo de algoritmos propios de lápiz y papel. La aritmética mental es entendida aquí en el sentido de “[...] *inventar y aplicar estrategias que son idiosincrásicas pero apropiadas para un problema particular, basadas en la comprensión de las características básicas del sistema numérico y de las operaciones aritméticas*” (p. 120).

La aproximación RME se sustenta, entre otros, en los siguientes supuestos:

(i) Los procedimientos de cálculo escrito elaborados por los sujetos dependerán, entre otros factores, de sus destrezas en el cálculo mental y de su conocimiento sobre el valor posicional de las cifras y la descomposición numérica.

(ii) El contexto en el que se desarrollan los problemas juega un papel fundamental en los primeros grados, pues proporciona a los alumnos el significado necesario para las actividades numéricas que realizan. La conexión con la realidad del sujeto es una de las bases más importantes de esta aproximación.

(iii) Los algoritmos de cálculo son construidos gradualmente por los propios estudiantes a medida que se van enfrentando a distintos problemas en contexto.

(iv) El objetivo final no es lograr que los sujetos lleguen a determinar y emplear el correspondiente algoritmo estándar escrito del currículum oficial. Por el contrario, los procedimientos obtenidos pueden variar de un sujeto a otro y no tienen porqué ser tan sofisticados como los usuales.

En España también aparecen defensores de esta tendencia, como es el caso de Ramírez y Usón (1996), quienes afirman que “[...] *el sitio de los algoritmos de lápiz y papel está junto a la máquina de Pascal o al ábaco en el museo de viejos instrumentos de cálculo para deleite de curiosos, estudiosos y coleccionistas*” (p. 64). Entre las razones expuestas para justificar esta afirmación se encuentra la siguiente: “[...] *nuestros algoritmos que son los más refinados y sintéticos que hayamos podido conseguir están, por esa misma razón, lejos de ser didácticamente los más adecuados al estar alejados del sentido último de la operación que efectúan y de las propiedades de los números implicados en ellas...*” (p. 64). Estos autores exponen para cada operación aritmética una variedad de procedimientos de cálculo alternativos que se acercan a los significados de las distintas operaciones.

La taxonomía de tres niveles planteada por Ball (1986), como modelo para introducir los diferentes conceptos y tópicos en matemáticas, puede ser interpretada también como una propuesta de enseñanza aplicable a la Aritmética elemental. De forma resumida, el proceso de enseñanza recorrería las tres fases o niveles siguientes:

-Nivel de historia (*story level*): donde se plantean algunos problemas concretos cercanos a la realidad del estudiante y que se resuelven mediante el concepto matemático a enseñar. Lo esencial en esta etapa es que el alumno llegue a identificar y relacionar el concepto con la situación problemática familiar propuesta. Por ejemplo, el concepto de suma se presentaría a través de problemas de enunciado verbal contextualizados.

-Nivel de destreza (*skill level*): en el que se procura que el sujeto practique mediante una serie de actividades de aplicación del nuevo concepto o tópico matemático. En esta fase se disminuye el énfasis por las situaciones contextualizadas, aunque se puede contar con la ayuda de algún material concreto o el uso de alguna representación pictórica. La suma se mostraría en este nivel usando numerales y el signo '+’.

-Nivel de algoritmo (*algorithm level*): Los niveles de historia y destreza tienen el propósito de facilitar la conexión del mundo real del sujeto con el mundo matemático. Una vez establecido este vínculo, se ha de procurar incitar a los alumnos a que diseñen sus propios procedimientos de cálculo, en forma de atajos, para obtener las respuestas de forma más rápida. Se supone que una confianza suficiente en el manejo del nuevo concepto da lugar a un deseo en los propios estudiantes de encontrar por ellos mismos métodos de resolución más eficaces a los utilizados inicialmente. La suma de números naturales se realizaría aquí con diferentes algoritmos, según el caso y el alumno implicado.

En el modelo de Ball los algoritmos son vistos, por tanto, como meros atajos que los alumnos desarrollan para obtener de forma rápida las respuestas a los distintos problemas planteados. Hemos de mencionar, no obstante, que el objetivo de la instrucción planteada por este autor no es la adquisición de algoritmos en sí, sino garantizar que los conceptos se desarrollen con firmeza en la mente de los sujetos.

Finalmente, aquellos que defienden una enseñanza de los algoritmos aritméticos basada en la invención de métodos de cálculo personales, deben tener presente que no conviene aceptar cualquier algoritmo por el simple hecho de haber sido inventado por un estudiante. Antes bien, son necesarios unos criterios de valoración para determinar si deben o no ser aceptados como procedimientos adecuados. Por ejemplo, Cambell, Rowan y Suarez (1998) enumeran los tres criterios siguientes:

- (a) Los métodos inventados deben ser eficientes (rápidos, cómodos y sin excesivo registro escrito, entre otras características).
- (b) Deben ser matemáticamente válidos.
- (c) Deben ser generalizables.

Se aconseja que los alumnos participen a la hora de decidir la validez, eficiencia y generalidad de sus propios algoritmos así como los de sus compañeros, lo que también constituye una parte importante del aprendizaje. En este sentido, también se valora en la aproximación RME (Verschaffel y DeCorte, 1996) el desarrollo de los alumnos en función del nivel de abstracción y abreviación de los procedimientos de solución elaborados.

3.3.5 Aproximaciones integradoras

Desde hace décadas se vienen realizando estudios y experiencias orientadas a la integración de las distintas posibilidades de enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental. Por ejemplo, Hamrick y McKillip (1978) apuestan por el desarrollo en el aula de un determinado nivel de destreza computacional, no para que los alumnos adquieran la capacidad de realizar cálculos complejos y extensos a gran velocidad y en poco tiempo, sino como medio para contribuir al aprendizaje

significativo de la aritmética. Según ellos, este nivel de destreza computacional es recomendable, entre otros motivos, porque facilita el aprendizaje de contenidos matemáticos superiores, ayuda a comprender el significado de las operaciones aritméticas, favorece las destrezas de aplicación práctica, hace posible la exploración de tópicos y el reconocimiento de generalizaciones y posee una cierta utilidad social. Para ello se defiende una perspectiva centrada conjuntamente en el aprendizaje de los hechos numéricos básicos, en la justificación del funcionamiento de los algoritmos estándar escritos, en la realización de cálculos mentales y en la estimación de resultados.

En una etapa más reciente, Curcio y Schwartz (1998) proponen una solución de consenso ante la variedad de métodos de enseñanza propuestos. En concreto, una aproximación que equilibre y conecte el desarrollo del pensamiento algorítmico involucrado en la invención con los algoritmos más tradicionales del currículum (figura 3.3). Según ellos y de acuerdo con Carroll (1996), esto es lo más adecuado, ya que es imposible que los alumnos construyan por sí mismos todos los algoritmos matemáticos necesarios para progresar con garantía en los cursos superiores.

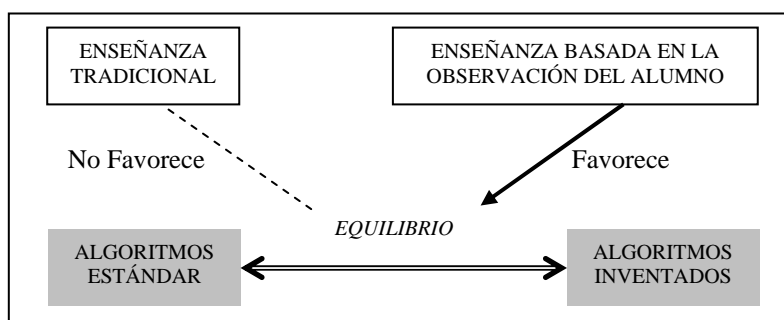


Figura 3.3.- Cuadro resumen de las ideas de Curcio y Schwartz (1998)

Ahora bien, al igual que Steinbring (1989), los autores dejan claro su desacuerdo con los métodos expositivos tradicionales y apuestan por un modelo de enseñanza basado en la observación de los alumnos y en la posterior toma de decisiones instruccionales. En consecuencia, suponiendo que los alumnos son capaces de inventar reglas y descubrir relaciones, la labor del profesor debe consistir en escuchar y plantear preguntas precisas al estudiante para identificar su nivel de comprensión y tomar decisiones sobre la instrucción posterior. En el mismo sentido, Kouba y Franklin (1995) recomiendan que el profesor actúe en el aula como si fuera un investigador obligado a solucionar problemas concretos en situaciones específicas, lo que recuerda los planteamientos de la *investigación-acción* como método más adecuado de investigación educativa o de la tendencia denominada *diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas* (Stefanich y Rokusek, 1992; Bell, 1993).

En otro orden de reflexión, Kraemer (1999) considera que los problemas del cálculo no tienen su origen en la falta de dominio de los algoritmos aprendidos sino en la poca capacidad de los alumnos para flexibilizar los cálculos (conocimiento limitado de las relaciones numéricas). En consecuencia, considera inadecuado reducir toda la problemática del cálculo a cuestiones relacionadas con la enseñanza de los algoritmos estándar escritos, puesto que, según el autor, no se trata “*de revisar los algoritmos usuales, ni su aprendizaje, sino desarrollar las condiciones efectivas para el*

aprendizaje de un cálculo flexible <<mental>> (con papel y lápiz para anotar las respuestas u operaciones intermedias) y de <<estimación>>” (p. 38).

La idea de abordar el cálculo desde una perspectiva integradora también es compartida por Carroll y Porter (1998), para quienes los algoritmos alternativos escritos “*deberían ser parte de un esquema instruccional que incluya estimación, aritmética mental, calculadoras, métodos inventados por los estudiantes, y discusiones de las diferentes estrategias usadas*” (p. 108). Asimismo, se pueden incluir en esta aproximación las consideraciones realizadas por Roa (2001) al hacer explícitas algunas recomendaciones generales sobre la realización de cálculos según la situación concreta en la que se esté inmerso:

“[...] si se trata de cálculos exactos sencillos éstos se llevarán a cabo mentalmente, si son más complicados es necesaria la mediación de un algoritmo y la utilización de un soporte para escribir ya sea lápiz y papel o tiza y pizarra. Caso de no requerir una respuesta exacta, sino solamente aproximada, los cálculos se realizarán mentalmente por estimación utilizando alguna de las estrategias que se conocen para esta acción: descomposición, truncamiento, redondeo.” (p. 232).

3.4 Aprendizaje y comprensión de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales

3.4.1 Fuentes consultadas

En este caso se han considerado las siguientes referencias, algunas de ellas ya contempladas en el apartado anterior:

- **Anghileri, J. (1995).** Language, Arithmetic and the Negotiation of Meaning.
- **Ashcraft, M. H. (1995).** Cognitive Psychology and Simple Arithmetic: A Review and Summary of New Directions.
- **Blanco, L. (1993).** Una clasificación de problemas matemáticos.
- **Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991).** *El aprendizaje de las matemáticas.*
- **Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002).** *Números y algoritmos.*
- **Gavilán J. M^a y Barroso, R. (1996).** Didáctica de los algoritmos a través de reconstrucciones.
- **Gómez, B. (1999b).** *Juntando partes en Pensamiento Numérico y Algebraico.*
- **Hatano, G., Amaiwa, S. y Inagaki, K. (1996).** “Buggy Algorithms” as Attractive Variants.
- **Hennessy, S. (1993).** The stability of children’s mathematical behavior: when is a bug really a bug?
- **Hiebert, J. y Wearne D. (1993).** Instructional Tasks, Classroom Discourse and Students’ Learning in Second-Grade Arithmetic.
- **Kamii, C. (1995).** *Reinventando la aritmética III.*
- **Maurer, S. B. (1998).** What Is an Algorithm? What Is an Answer?
- **Mingus, T.T.Y. y Grassl, R. M. (1998).** Algorithmic and Recursive Thinking Current Beliefs and Their Implications for the Future.
- **Sierpinska, A. (1994).** *Understanding in Mathematics.*

- **Stefanich, G. P. y Rokusek, T. (1992).** An Analysis of Computational Errors in the Use of Division Algorithms by Fourth-Grade Students.
- **Steinbring, H. (1989).** Routine and Meaning in the Mathematics Classroom.

Las aportaciones se han agrupado en torno a los siguientes temas y apartados que se desarrollan a continuación: razonamiento y pensamiento algorítmico (apartado 3.4.2), errores en cálculo aritmético (apdo. 3.4.3), aritmética cognitiva (apdo. 3.4.4), tareas y situaciones matemáticas (apdo. 3.4.5) y factores y condicionantes (apdo. 3.4.6).

3.4.2 Razonamiento y pensamiento algorítmico

Para empezar, conviene aclarar los significados usualmente asociados a algunas de las expresiones relacionadas con el concepto de algoritmo en Educación Matemática.

Maurer (1998), por ejemplo, utiliza el término ‘algorithmics’ para referirse al sentido contemporáneo dado a la expresión *matemáticas algorítmicas*. Según él, esta expresión adopta dos significados: uno tradicional, que pone de relieve la simple realización o ejecución de algoritmos, y otro, que hace referencia al desarrollo y modificación de algoritmos, a su comprensión y a la elección inteligente entre algoritmos diferentes para una misma tarea. Se trata, en definitiva, de pensar sobre los algoritmos y no como ellos.

Desde otro punto de vista, Mingus y Grassl (1998) determinan el significado de las expresiones *pensamiento algorítmico* y *pensamiento recursivo* estableciendo la diferencia entre ellos. En cuanto al pensamiento algorítmico, adoptan como modelo el de resolución de problemas de Polya (1965) y hacen las siguientes consideraciones:

“El pensamiento algorítmico es un método de pensamiento y guía de los procesos de reflexión que utiliza procedimientos paso a paso, precisa entradas y produce salidas de datos, requiere decisiones sobre la calidad y adecuación de la información que llega y de la información que sale, y controla los procesos de reflexión como medio para vigilar y dirigir el proceso de pensamiento. En esencia, el pensamiento algorítmico es simultáneamente un método de pensamiento y un medio para pensar sobre el pensamiento de uno” (p. 34).

Alternativamente, en cuanto al pensamiento recursivo, afirman:

“[...] es un método de pensamiento paso a paso, interminable, en el que cada paso depende del paso o los pasos que viene inmediatamente antes que él. El pensamiento recursivo es iterativo y autoreferencial” (p. 34).

Precisamente, la naturaleza iterativa y autoreferencial de este tipo de pensamiento es la que lo distingue del pensamiento algorítmico, a pesar de que ambos proceden paso a paso.

3.4.3 Errores en cálculo aritmético

A pesar del tiempo que se dedica en las aulas de matemáticas de Primaria a enseñar los algoritmos de cálculo, siempre hay un buen número de estudiantes en este nivel, e incluso en Secundaria, que cometen errores cada vez que utilizan dichos métodos (Dickson, Brown y Gibson, 1991; Kamii, 1995). Esta circunstancia ha llevado a algunos investigadores a analizar y clasificar los tipos de errores y a proponer teorías explicativas de los procesos de razonamiento que siguen los alumnos cuando inventan

procedimientos de cálculo incorrectos. En Gómez (1999b) se incluye una extensa recopilación de referencias que hacen mención a estos trabajos.

Pero la abundancia de estudios sobre errores sistemáticos, ideas equivocadas (*misconceptions*) y comprensiones deficientes se debe, según Sierpinska (1994), a que es más sencilla la tarea de probar que una comprensión no es perfecta que la de obtener datos objetivos sobre una comprensión adecuada. De hecho, para la autora los resultados en Educación Matemática acerca de una buena comprensión son escasos y a menudo están pobremente justificados.

Henessy (1993), por su parte, considera que la situación en el aula todavía no ha cambiado significativamente para la mayoría de los estudiantes. Aún se siguen cometiendo numerosos errores en cálculo aritmético provocados por el uso de algoritmos “buggy” o versiones erróneas de algoritmos correctos utilizadas de forma sistemática. Así, para estudiar la permanencia de estos “bugs”, la autora realiza una experiencia con 67 alumnos sobre resolución de sustracciones con lápiz y papel, obteniendo los siguientes resultados:

(a) La incapacidad para continuar con el procedimiento correcto de cálculo permanece estable a lo largo del tiempo. Por el contrario, los alumnos no aplican reglas “buggy” de modo sistemático, siendo limitada la estabilidad de los errores numéricos y los “bugs” individuales.

(b) Los estudiantes pueden alternar procedimientos correctos e incorrectos a la hora de resolver problemas con idéntica estructura matemática y diferentes números, lo que se produce gracias a la influencia del contexto en el que las reglas defectuosas son aprendidas o al nivel de motivación para usar el procedimiento correcto.

(c) Aparecen “bugs” a dos niveles. Unos son superficiales, sintácticos e inestables y otros profundos, semánticos y estables. Estos últimos, aunque sean escasos, son los que deben preocupar a profesores y educadores matemáticos.

En esta misma línea se encuentra el trabajo de Hatano, Amaiwa e Inagaki (1996) en el que se estudian los motivos por los que determinados alumnos tienen necesidad de crear y utilizar algoritmos “buggy” en problemas de restar con números de varias cifras. La justificación clásica de la “regla desconocida que se repara” contrasta con la del *enfoque de la variante atractiva* que adoptan estos investigadores, quienes afirman:

1. Los alumnos que muestran errores sistemáticos en la sustracción con números de varias cifras a menudo conocen el algoritmo correcto (supuesto del “procedimiento correcto”), lo que provoca que sea poco sostenible el punto de vista de la regla desconocida.

2. Los alumnos confían en los algoritmos “buggy” porque los consideran variantes correctas que ahorran esfuerzo mental en el cálculo (supuesto de la “economía de esfuerzo”).

Los dos supuestos son confirmados empíricamente en base a los siguientes resultados:

- En una misma sesión y en un mismo cuestionario los participantes no respondieron utilizando de forma consistente un conjunto fijo de reglas, sino que alternaron estrategias y procedimientos de cálculo incorrectos con los métodos correctos (la misma conclusión ya la obtuvo Hennessy (1993) aunque en sesiones separadas).

- Mientras mayor es la habilidad de los estudiantes en el manejo de las destrezas simples implicadas en la sustracción con llevadas y mayor es la comprensión conceptual del principio involucrado en el algoritmo correcto, menor es la tentación de confiar en procedimientos erróneos. Los alumnos no tienen necesidad de ello porque el algoritmo (correcto) que ya utilizan les resulta sencillo. En cambio, aquellos que no manifiestan competencia en estos dominios, buscando una economía de esfuerzo mental, inventan métodos alternativos más sencillos, atractivos y potencialmente incorrectos.

Como método para dirigir de forma efectiva la recuperación de aquellos estudiantes a los que se les ha identificado previamente algún error sistemático, Stefanich y Rokusek (1992) intentan poner de manifiesto las potencialidades de la enseñanza diagnóstica mediante un estudio realizado con estudiantes de 4º de Primaria. En una primera fase, examinan los errores que cometen los alumnos sobre el algoritmo estándar escrito para dividir números naturales y diseñan y desarrollan, en una segunda fase, un proceso de enseñanza que culmina con una nueva evaluación mediante el mismo test inicial. Entre los resultados más destacables del estudio, Stefanich y Rokusek señalan el hecho de que en la mayoría de los casos sólo fue necesario mostrar uno o dos ejemplos de procedimientos incorrectos para hacer que los alumnos corrigieran sus errores.

3.4.4 Aritmética cognitiva

Ashcraft (1995) se interesa por describir la evolución seguida en las últimas décadas y la situación actual de la denominada *aritmética cognitiva*, área de investigación preocupada por las estructuras y procesos mentales empleados por los sujetos cuando ejecutan operaciones aritméticas básicas, tales como sumas y multiplicaciones con números de una sola cifra. Básicamente, la cuestión a solventar es la siguiente:

“¿Qué hace la gente mentalmente cuando realiza aritmética simple y qué procesos cognitivos subyacentes, representaciones en la memoria y componentes mentales son necesarias para esta destreza?” (p. 4)

El campo de la aritmética mental o cognitiva, tal como es descrito por Ashcraft, parece centrarse exclusivamente en los hechos numéricos básicos, por lo que podría entenderse como una particularización de la aproximación representacionista a la comprensión, caracterizada por el interés en lo mental e interno. Desde este punto de vista se han desarrollado diversos modelos en los que intervienen conceptos como la memoria a largo plazo, la recuperación o la inferencia, entre otros, y se ha “consolidado” la idea común de unas representaciones mentales asociadas a los hechos básicos y conectadas entre sí formando redes que son almacenadas en la memoria a largo plazo. El grado de aprendizaje y de dominio es explicado, básicamente, en términos de accesibilidad a las redes internas, de fortaleza entre conexiones y de complejidad de la estructura reticular. Asimismo, son reconocidas las funciones desempeñadas por la memoria de trabajo, examinándose la actuación de los sujetos en términos de participación o intervención de dicha memoria.

3.4.5 Tareas y situaciones matemáticas

Hemos de destacar aquí las actividades planteadas por Gavilán y Barroso (1996) para trabajar en el aula con diferentes algoritmos aritméticos (multiplicación y raíz cuadrada). En el caso del producto, proponen el uso de tareas de resolución de multiplicaciones con cifras desconocidas para poder aprehender las propiedades de la multiplicación y alcanzar una comprensión conceptual del algoritmo, “*que a veces se piensa que sólo conlleva una mera comprensión instrumental*” (p. 193).

Inspirándose en la filosofía del cuasi-empirismo de Lakatos (1994), Gavilán y Barroso describen el diálogo entre profesor y alumnos que tiene lugar en una clase de Primer Curso de la Diplomatura de Maestro al intentar resolver la siguiente multiplicación con cifras desconocidas:

$$\begin{array}{r}
 \& \& 7 \& \\
 \times \& \& 7 \& \\
 \hline
 \& \& \& \& \& \\
 \& \& \& 2 \& \\
 8 \& 5 \& \\
 \hline
 \& \& \& \& \&
 \end{array}$$

En el proceso de reconstrucción los estudiantes se ven obligados a conversar entre sí para confirmar o refutar sus propias conjeturas y la de los demás, siendo fundamental el papel del profesor como moderador y guía de la sesión. La intención de los autores es la de mostrar una enseñanza de la matemática alternativa, lejos de los métodos expositivos tradicionales, en la que los alumnos participan activamente con procedimientos informales, planteando y resolviendo dudas y conjeturas que deben probar o rechazar.

La potencialidad de estas tareas particulares, centradas en la detección de cifras ocultas o desconocidas, también es resaltada por Blanco (1993), quien entiende que dichas tareas ayudan a profundizar en algoritmos concretos y pueden emplearse como ejercicios de lógica. Resulta contradictorio, no obstante, que el autor las incluya en la categoría de ejercicios algorítmicos o de repetición por considerar que estas situaciones poseen una capacidad muy limitada para desarrollar habilidades de pensamiento y estrategias propias de la resolución de problemas, lo cual no parece ser así, como se desprende de lo incluido a este respecto en los capítulos VI y VII a los que nos remitimos.

En Gairín y Sancho (2002) se pueden encontrar también numerosas situaciones pertenecientes al campo fenomenológico de los algoritmos estándar escritos de las cuatro operaciones aritméticas elementales. Estas tareas se presentan como medios para conocer y analizar el funcionamiento de los algoritmos de lápiz y papel y para ampliar la comprensión de los procedimientos de cálculo mediante el análisis de los pasos ocultos en las secuencias algorítmicas y la explicitación de las propiedades aritméticas que fundamentan su funcionamiento.

3.4.6 Algunos factores y condicionantes

Diversos autores analizan las múltiples relaciones e influencias que se producen en este campo. De entre ellos, Steinbring (1989) examina cómo las creencias y limitaciones del profesor influyen notablemente en la enseñanza de la matemática y, por tanto, en el

aprendizaje y la comprensión. Así, se constata en la enseñanza de las matemáticas escolares el conocido fenómeno de *algoritmización del conocimiento*, por el que se reducen los procesos de aprendizaje a la simple transmisión directa por parte del profesor de procedimientos, reglas y técnicas operacionales. Según Steinbring, esto es debido, en parte, a una serie de restricciones de carácter social y epistemológico que afectan de manera directa al docente.

De otro lado, Anghileri (1995) expone algunas reflexiones en torno a la naturaleza del *lenguaje* y al papel que este desempeña en el desarrollo del conocimiento de la Aritmética. Para el autor, el lenguaje se muestra como un condicionante de la comprensión de los sujetos. Así, se suelen emplear en Aritmética palabras y símbolos que admiten distintos significados y pueden ser interpretados de diferentes modos. La interpretación que un sujeto da a un determinado término o símbolo influye en su comprensión, en el sentido de que dicho término o símbolo puede ser vinculado a un procedimiento válido para unos problemas particulares e ineficaz para otros. Dicho de otra manera, las interpretaciones dadas por los sujetos a los símbolos escritos y los significados asociados a ellos llegan a ser, en ocasiones, verdaderos obstáculos epistemológicos. Anghileri muestra un ejemplo de este hecho con la operación de la división, poniendo de manifiesto que un solo significado no es suficiente para resolver los posibles problemas que se puedan plantear. En definitiva, es necesario flexibilizar las interpretaciones y articular las múltiples conexiones entre *palabras, símbolos, significados y procedimientos*. La labor del profesor en esta tarea requiere una *negociación de nuevos significados* con sus alumnos para las distintas palabras y símbolos utilizados, al objeto de garantizar la adecuación de los procedimientos en la resolución de los distintos problemas aritméticos. La negociación del significado se presenta, entonces, como un medio para desarrollar e incrementar la comprensión matemática. Tal como menciona Anghileri:

“Los nuevos significados necesitarán ser “reconciliados” con la comprensión existente en los niños y esta reconciliación es parte del proceso de negociación que tiene lugar entre alumnos y profesores en la clase de matemáticas.” (p. 10)

El propósito último del profesor será garantizar que sus alumnos sean conscientes de los distintos significados que se pueden asociar a las palabras y símbolos matemáticos y que sean capaces de acudir en cada caso a aquellos significados que les permitan desarrollar procesos de resolución apropiados para cada problema.

Por otra parte, en Hiebert y Wearne (1993) se exponen los aspectos fundamentales de un estudio que pretende aclarar la relación existente entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para ello, se comparan los efectos que producen dos tipos de instrucción sobre el aprendizaje de los alumnos en el ámbito de la Aritmética elemental. De forma más precisa los autores afirman:

“El objetivo de este estudio fue proporcionar descripciones de clase que utilizaron diferentes aproximaciones instruccionales y relacionar las características de la instrucción con el aprendizaje de los estudiantes. Estábamos especialmente interesados en cómo la instrucción dirigida a promover la comprensión conceptual antes que la destreza algorítmica difería de la instrucción más convencional y en cómo estas diferencias estaban relacionadas con diferencias en el aprendizaje” (p. 394).

Para su análisis, Hiebert y Wearne centran la atención en dos de los rasgos fundamentales que describen cualquier tipo de instrucción en el aula: las tareas o situaciones problemáticas que se plantean a los estudiantes y la naturaleza del discurso desarrollado en clase. La investigación se llevó a cabo comparando la metodología tradicional en Aritmética elemental, caracterizada por la memorización de procedimientos, la práctica continuada de ejercicios mecánicos y el escaso tiempo dedicado a resolver cada uno de los problemas planteados, con una aproximación alternativa centrada en la construcción de relaciones, en las estrategias de resolución de problemas y en las diferentes formas de representar las soluciones. En estas clases se dedicaba mayor atención a menos problemas, y se exigía a los alumnos que describieran los procesos de resolución empleados, que interpretaran las respuestas y que proporcionaran explicaciones utilizando frases relativamente elaboradas. Los resultados obtenidos se pueden resumir de la siguiente forma:

- Las tareas instructivas y el discurso en el aula ejercen una *influencia directa* sobre el aprendizaje (los sujetos aprenden lo que se les presenta y lo que los profesores y compañeros les comunican).

- Además de la influencia directa, se produce una *influencia indirecta* sobre el pensamiento matemático de los individuos (ciertos tipos de tareas y discursos empleados en las clases de matemáticas llegan a favorecer unas formas de pensar más productivas).

Conviene subrayar, por último, que la intención de Hiebert y Wearne en este trabajo no es la de defender un tipo de enseñanza concreta ni la de proporcionar prescripciones de cara a la mejor instrucción. Como bien reconocen, es posible que otras aproximaciones resulten más adecuadas que la empleada en la experiencia. Asimismo, entienden que las relaciones entre las variables que intervienen en la instrucción aún son demasiado complejas como para creer solucionado el problema de determinar la naturaleza exacta de la relación entre enseñanza y aprendizaje. Tan sólo consideran que estudios como el realizado pueden aportar datos relevantes de cara a la construcción de modelos detallados acerca de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje en el aula de matemáticas.

3.5 Conclusiones de interés para la investigación

Se presenta a continuación una síntesis no exhaustiva de las ideas fundamentales expuestas a lo largo de los distintos apartados del presente capítulo. Posteriormente, a propósito del Análisis Didáctico que se expone en el capítulo IV, se analizarán con más detalle sus relaciones con el resto de conclusiones y datos extraídos del capítulo II.

1.- Se aprecian dificultades para establecer las fronteras de lo algorítmico. No obstante, en los procesos algorítmicos se reconocen características propias vinculadas, fundamentalmente, a las acciones y al procedimiento. Así, los algoritmos suelen estar caracterizados por un número finito de reglas y normas, por seguir un orden permanente determinado, por garantizar la obtención de respuestas correctas, por resolver problemas de un mismo tipo y por exigir un conocimiento de tipo procedimental, entre otras particularidades (apdo. 3.2).

2.- Aún permanecen vigentes en Educación Matemática las polémicas en torno a la enseñanza de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas elementales. Esta problemática se muestra más compleja al extenderse en la actualidad a todas las manifestaciones del cálculo aritmético elemental (apdo. 3.3.2). La cuestión básica a resolver consiste en determinar qué es lo que hay que enseñar del cálculo aritmético elemental y cómo hay que enseñarlo.

3.- Se detecta disparidad de posicionamientos prácticos ante el diseño de una enseñanza del cálculo aritmético elemental orientada a favorecer la comprensión. En términos generales se apuesta por algunas de las siguientes posibilidades: la enseñanza de algoritmos estándar a través del empleo de diferentes elementos didácticos (apdo. 3.3.3); la enseñanza de algoritmos escritos alternativos, culturales e históricos (apdo. 3.3.4.1); la invención y desarrollo de algoritmos propios (apdo. 3.3.4.2) y, finalmente, propuestas encaminadas a la integración de los aspectos anteriores (apdo. 3.3.5).

4.- Del estudio de las diversas tendencias de enseñanza identificadas se desprende la idea de que en el campo del cálculo aritmético elemental existe una frontera reconocida entre la reproducción y aplicación mecánica de los algoritmos enseñados en la escuela, por un lado, y el reconocimiento y conciencia de las propiedades fundamentales justificativas de los mecanismos de cálculo, por otro. Esto es, parece ser que en esta área prevalece aún, de manera implícita, la clásica dicotomía entre lo procedimental y lo conceptual como conocimientos contrapuestos de naturaleza diferente.

5.- Los estudios sobre errores en el cálculo aritmético, de amplia tradición en Educación Matemática, aún constituyen un área de investigación abierta y en la que quedan pendientes numerosas cuestiones relacionadas con la comprensión deficiente de los sujetos. Por lo general, en estos trabajos se busca una justificación basada en el funcionamiento interno sobre la presencia de errores en los individuos y los motivos que provocan una comprensión defectuosa de los procedimientos de cálculo (apdo. 3.4.3).

6.- El campo del cálculo aritmético elemental es tratado por la *aritmética cognitiva* como una particularización de la aproximación representacionista a la comprensión del conocimiento matemático (apdo. 3.4.4).

7.- Las tareas y situaciones a emplear con los alumnos constituye una fuente de discusión estrechamente relacionada con las propuestas de enseñanza (apdo. 3.4.5). Algunos autores (Blanco, 1993; Gavilán y Barroso, 1996; Gairín y Sancho, 2002) recomiendan emplear tareas variadas alternativas a las usuales para garantizar una mejor comprensión de los procedimientos de cálculo.

8.- Son múltiples los factores y condicionantes que intervienen en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de la Aritmética elemental (apdo. 3.4.6). Se pueden destacar, entre otros, las creencias y limitaciones del profesor, la naturaleza teórica del conocimiento matemático, las restricciones específicas del entorno social, las tareas y situaciones instructivas, el lenguaje y el discurso desarrollado en el aula.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DIDÁCTICO

4.1 Introducción

En los dos capítulos precedentes se ha presentado una síntesis estructurada y comentada de la información puntual recopilada en torno a los aspectos más relevantes del área problemática, cubriéndose de este modo la fase previa de la investigación. A partir de esta información puntual, y con objeto de profundizar en las relaciones más destacadas entre los distintos campos revisados y extraer conclusiones operativas y prioridades para la investigación, se ha realizado un estudio teórico basado en el procedimiento metodológico de carácter meta-analítico y estructurado en dos fases al que hemos denominado Análisis Didáctico. La primera fase consiste en la revisión primaria de antecedentes, tarea que resulta inmediata en la medida en que se utilizan directamente las informaciones puntuales de los dos capítulos anteriores, tanto aisladamente o en forma de resultados conjuntos como por presencia o ausencia de información en términos de proposiciones que indican la necesidad de realización de estudios para cubrir carencias detectadas. La segunda fase, o de revisión secundaria de la información, consiste en un análisis cualitativo de carácter didáctico de la información obtenida hasta este momento y a cuya explicación y organización se dedica la mayor parte del presente capítulo.

En consecuencia, en los apartados que siguen y como enlace necesario entre los capítulos II y III de antecedentes y los capítulos V y VI de desarrollo y aplicación de la Aproximación que presentamos, se exponen los principales resultados que se obtienen del cruce de planteamientos entre autores y de la propia reflexión crítica realizada sobre sus principales supuestos. Mediante el diálogo indirecto pretendemos construir una base teórica de consecuencias y resultados desde la que desarrollar y sustentar nuestra propuesta para el estudio del fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático. Al mismo tiempo, para ordenar el diálogo y la reflexión mencionados, se ha prestado especial atención a los siguientes aspectos del problema de investigación: la naturaleza de los estudios, aproximaciones, planteamientos y propuestas en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático; la visión representacionista como caso especial; la problemática del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático; la influencia del conocimiento matemático en las teorías sobre comprensión y, por último, el cálculo aritmético elemental desde la perspectiva de la comprensión.

En los apartados que siguen se exponen, en primer lugar, las principales características del Análisis Didáctico (apdo. 4.2) y las líneas generales de su aplicación al problema específico de la investigación que se presenta (apdo. 4.3); a continuación,

en el apartado 4.4, se incluye un resumen de los principales resultados primarios generales de la revisión realizada, mientras que en el apartado 4.5 se abordan los resultados del análisis y la discusión de dicha información primaria y de las principales relaciones entre campos y estudios en torno al núcleo central del problema de investigación y del capítulo. Por último, como consecuencia de las consideraciones realizadas en el apartado 4.5, se incluyen en el apartado 4.6 las principales conclusiones de interés para la presente investigación y algunas de las consecuencias extraídas para la elaboración de una aproximación original a la comprensión del conocimiento matemático, cuyas principales características se explican detalladamente en el capítulo V.

4.2 Consideraciones generales sobre el Análisis Didáctico

El contenido del presente capítulo es el resultado de la aplicación de una metodología de investigación no empírica basada en un procedimiento de meta-análisis cualitativo (Fernández, 1995; González, 1998a, 1998b, 1999). En este apartado se expone una breve síntesis de las características generales de dicho procedimiento, para cuya información completa nos remitimos a González (1999).

I. Definición de Análisis Didáctico

Entendemos por Análisis Didáctico en Educación Matemática al procedimiento metodológico que analiza, relaciona e integra, a través de un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, información procedente de diversas áreas de investigación interrelacionadas por su objeto de estudio: Historia y Epistemología de la Matemática, Aprendizaje y Cognición, Fenomenología del conocimiento matemático y Enseñanza y estudios curriculares en relación con las matemáticas. El Análisis Didáctico proporciona una síntesis estructurada que permite detectar dificultades, limitaciones y carencias en los trabajos previos así como organizar y delimitar con precisión el desarrollo posterior de la investigación (González, 1999).

II. Fases

El proceso del Análisis Didáctico consta de dos fases:

(A) Una *revisión primaria* de la información en cada una de las áreas de investigación consideradas, que incluye la obtención de datos, resultados y conclusiones relevantes organizados por cuestiones y contenidos relacionados con el problema de investigación.

(B) Un *análisis de las relaciones* existentes en la información recopilada con anterioridad. En esta fase se extraen resultados y conclusiones generales y se identifican cuestiones, conjeturas y prioridades para la investigación.

III. Fuentes y tipos de información:

- Información puntual o aislada como resultado de la lectura individual de cada aportación identificada. Se trata de información no relacionada y tratada de forma neutra.

- Información elaborada como productos o resultados propiamente dichos del Análisis Didáctico derivados de la información puntual previa.

IV. Tipos de resultados

- **Resultados Primarios (RP)** o conclusiones del análisis primario en términos de proposiciones contrastadas o asumidas por grupos de autores relevantes; estos datos pueden ser comunes a una serie de autores o líneas de estudio o singulares, en la medida en que sean importantes y merezca la pena destacarlos de los demás. Aquí se incluyen también las informaciones que sintetizan los resultados de una serie de trabajos o posiciones y las lagunas o carencias detectadas, consideradas como información explícita por defecto.

- **Resultados Secundarios (RS)**: conclusiones obtenidas de la reflexión realizada sobre las relaciones entre las informaciones aisladas o los resultados primarios y de estos entre sí. No es información directa explícita ni está en los trabajos revisados, considerados aisladamente, sino que se encuentra implícita en los estudios revisados y en los análisis de las relaciones entre los resultados aislados o puntuales y entre los resultados primarios. Estos resultados pueden ser, entre otros: opiniones, valoraciones y posiciones personales fundadas en datos objetivos (puntuales o primarios), conjeturas plausibles en virtud de la información que las sustenta, interpretaciones avaladas y/o sólidas en base a argumentaciones coherentes y fundadas, lagunas o carencias implícitamente detectadas o requisitos y necesidades obligadas por las situaciones, contextos o la mera realidad, a tenor de las circunstancias que rodeen los estudios revisados.

- **Consecuencias** para la investigación (C): De todos los resultados primarios y secundarios, sólo algunos de ellos van a ser útiles para el estudio. Asimismo, de los propios resultados secundarios se pueden elaborar conclusiones que no estén exactamente entre dichos resultados, sino que procedan del análisis de los mismos. A su vez, estas consecuencias pueden ser, entre otras:

- conjeturas para la investigación;
- recomendaciones para la realización de estudios teóricos o empíricos previos;
- componentes de modelos teóricos a utilizar y contrastar en el estudio;
- orientaciones generales.

Los tres tipos de resultados son proposiciones de diferente naturaleza que van a influir sobre la investigación de distinto modo, ya que tanto los estudios teóricos como los empíricos que se llevan a cabo van a estar condicionados por ellos. En consecuencia, a lo largo del contenido del presente capítulo se van a utilizar recuadros y siglas numeradas para resaltar los tipos de proposiciones obtenidas en cada caso. Hemos de advertir, no obstante, que un buen número de resultados están enunciados en forma de proposiciones complejas o mixtas (varias proposiciones combinadas) de dudosa categorización, a pesar de lo cual hemos optado por situar cada uno de ellos en la categoría a la que corresponde la proposición que creemos de mayor peso dentro del enunciado o, en su defecto, a la que corresponden la mayoría de las proposiciones que contiene.

4.3 Aplicación al problema de investigación

La reflexión realizada en esta investigación gira en torno a dos ámbitos concretos de información: la comprensión del conocimiento matemático, su diagnóstico y evaluación y los algoritmos y el cálculo aritmético elementales. Estos campos genéricos

constituyen la referencia que posiciona el problema específico del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Los contenidos analizados se distribuyen de acuerdo con la estructura esquemática de la figura 4.1, que refleja, al mismo tiempo, el proceso de concreción seguido en el estudio. De manera específica, la revisión primaria de información, expuesta en los capítulos II y III como primera fase del Análisis Didáctico, se emplea parcialmente en este capítulo en función de su utilidad para la reflexión en torno a los temas centrales de la investigación, como son los relacionados con la complejidad del fenómeno de la comprensión, las características de los enfoques, aproximaciones y modelos sobre comprensión en Educación Matemática, el diagnóstico y evaluación de la comprensión, la influencia determinante del conocimiento matemático o la comprensión y su valoración en el ámbito específico de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales, entre otros. El resto de la información recogida, sobre la que no se realiza una discusión abierta, resulta secundaria para los objetivos de la investigación, si bien ha servido para contextualizar y completar el ámbito de estudio en el que nos situamos.

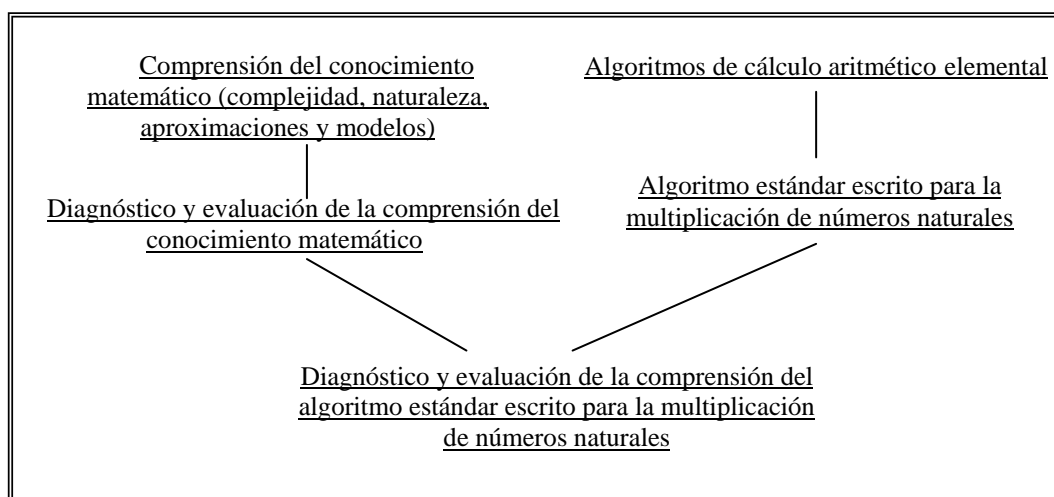


Figura 4.1.- Ámbitos de reflexión contemplados en la investigación

4.4 Conclusiones generales

Según se puede comprobar mediante un examen detenido de los capítulos II y III, la extensión y complejidad de la información aconsejan que se realice una selección de los aspectos fundamentales de los antecedentes con carácter previo al desarrollo de cualquier tipo de análisis; selección que está condicionada, como sabemos, por la naturaleza y características del problema de investigación y que se encuentra limitada por los propios estudios y publicaciones sometidos a examen. Bajo dichas restricciones, enumeramos a continuación los principales resultados y conclusiones generales del análisis de la información puntual contenida en los capítulos II y III y que constituyen la referencia para los comentarios y críticas que se exponen más adelante en los apartados

4.5 y siguientes del presente capítulo. Dichos resultados y conclusiones generales, enunciados en términos de resultados primarios, son los siguientes:

RP₁) *La comprensión como fenómeno de interés general:* Diversas áreas de conocimiento, entre ellas la Didáctica de la Matemática, muestran un gran interés por el estudio del fenómeno de la comprensión, llegándose a identificar una preocupación especial por aclarar aspectos como su naturaleza y funcionamiento o su relación con la explicación e interpretación, entre otros.

RP₂) *Múltiples aproximaciones a la comprensión del conocimiento matemático:* En Educación Matemática se pueden encontrar algunas propuestas consolidadas para el estudio de la comprensión, como la posición representacionista de Hiebert y Carpenter (1992), la aproximación histórico-empírica de Sierpinska (1990, 1994) o el modelo recursivo de Pirie y Kieren (1989, 1994). Todas ellas, junto con otros trabajos puntuales y de menor envergadura desarrollados con fines cognitivos (p.e., Duffin y Simpson, 1997; Díaz-Godino, 2000) o curriculares (p.e., Hiebert et al., 1997), proporcionan la base de información disponible en la actualidad sobre la comprensión del conocimiento matemático.

RP₃) *Interpretación representacionista como aproximación mayoritaria:* Numerosas investigaciones adoptan para el análisis de la comprensión los supuestos del representacionismo clásico. En ellos, la comprensión es interpretada en términos de representaciones internas del conocimiento y de relaciones entre ellas en la mente del sujeto. Asimismo, se suele reconocer un vínculo especular entre las representaciones internas y externas.

RP₄) *Preocupación por el diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático:* Se muestra evidente el interés y la preocupación de los trabajos revisados por la problemática de la observación y determinación del tipo y grado de comprensión que tienen los sujetos. Esta atención también provoca diferencias importantes entre las reflexiones expuestas, que sobre todo giran en torno a los modos y términos en los que valorar la comprensión, los métodos, técnicas e instrumentos a emplear, la relatividad de la valoración, el problema de la interpretación y, en definitiva, la complejidad subyacente al proceso de diagnóstico y evaluación de los sujetos.

RP₅) *Relación estrecha entre comprensión y cognición:* Otro centro de interés en Educación Matemática se sitúa en el esclarecimiento de las supuestas relaciones existentes entre la comprensión y otras nociones cognitivas, tales como el aprendizaje, el conocimiento, la memoria o la representación, entre otras. Conviene recordar, no obstante, que la mayoría de las deliberaciones y modelos sobre esta cuestión discurren en un nivel exclusivamente teórico.

RP₆) *Divergencias y lagunas en el cálculo aritmético elemental:* La situación descrita en el capítulo III muestra una complejidad y diversidad considerables en lo que se refiere a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo aritmético elemental. De hecho, se identifican diversas tendencias en la enseñanza que son el producto de las distintas manifestaciones del cálculo. En términos generales, se apuesta por algunas de las siguientes posibilidades: enseñanza de algoritmos estándar empleando diferentes

elementos; enseñanza de algoritmos escritos alternativos, culturales e históricos; invención y desarrollo de algoritmos propios y, finalmente, propuestas de integración. Las tareas y situaciones a emplear con los alumnos son una de las fuentes de discusión.

RP₇) *Relación enseñanza-aprendizaje en el cálculo aritmético elemental*: Las distintas líneas de actuación propuestas para la enseñanza de la aritmética elemental, si bien coinciden en algunos planteamientos, también presentan diferencias importantes debidas a las diversas concepciones en las que se basan sobre el aprendizaje y desarrollo cognitivo del alumno.

RP₈) *Limitaciones en las situaciones de evaluación*: La mayoría de los estudios revisados en el capítulo III que incluyen una parte empírica donde se analizan las competencias de los alumnos, utilizan básicamente dos tipos de tareas como instrumento de diagnóstico y evaluación del conocimiento aritmético: problemas de enunciado verbal que simulan situaciones reales y ejercicios de cálculo de los que aparecen normalmente en los libros de texto como actividades clásicas.

RP₉) *Doble naturaleza del algoritmo y su consideración didáctica*: En el campo del cálculo aritmético elemental existe una frontera reconocida entre la reproducción y aplicación mecánica de los algoritmos enseñados en la escuela, por un lado, y el reconocimiento y conciencia de las propiedades fundamentales justificativas de los mecanismos de cálculo, por otro. Esto es, prevalece implícita en el área la clásica dicotomía entre lo procedimental y lo conceptual como conocimientos contrapuestos de naturaleza diferente.

4.5 Comprensión del conocimiento matemático: discusión y resultados

En este apartado se presentan los resultados más relevantes surgidos de la reflexión sobre el contenido expuesto en el capítulo II acerca de la comprensión del conocimiento matemático. Los temas tratados tienen el propósito fundamental de describir, de acuerdo con las conclusiones extraídas, las particularidades de la situación actual de los conocimientos sobre el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático en el campo de la investigación en Educación Matemática. Los resultados se han agrupado en torno a dos grandes apartados: complejidad y especificidad, por un lado, y estudios y modelos, por otro.

4.5.1 Complejidad y especificidad

La revisión de antecedentes pone de manifiesto la complejidad subyacente al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático. Aún más, a lo largo de los capítulos II y III se muestran reiteradas evidencias a favor del supuesto de que

RS₁) *las características de los estudios sobre comprensión desarrollados en Educación Matemática, así como los realizados en áreas de investigación específicas como la del Cálculo Aritmético Elemental, están condicionadas por la complejidad inherente a este fenómeno en sus distintas manifestaciones.*

Esta complejidad se manifiesta principalmente:

(i) Al contemplar la comprensión en relación con otras nociones de corte cognitivo igualmente complejas (figura 4.2a) y asumiendo el carácter multidimensional del fenómeno (figura 4.2b).

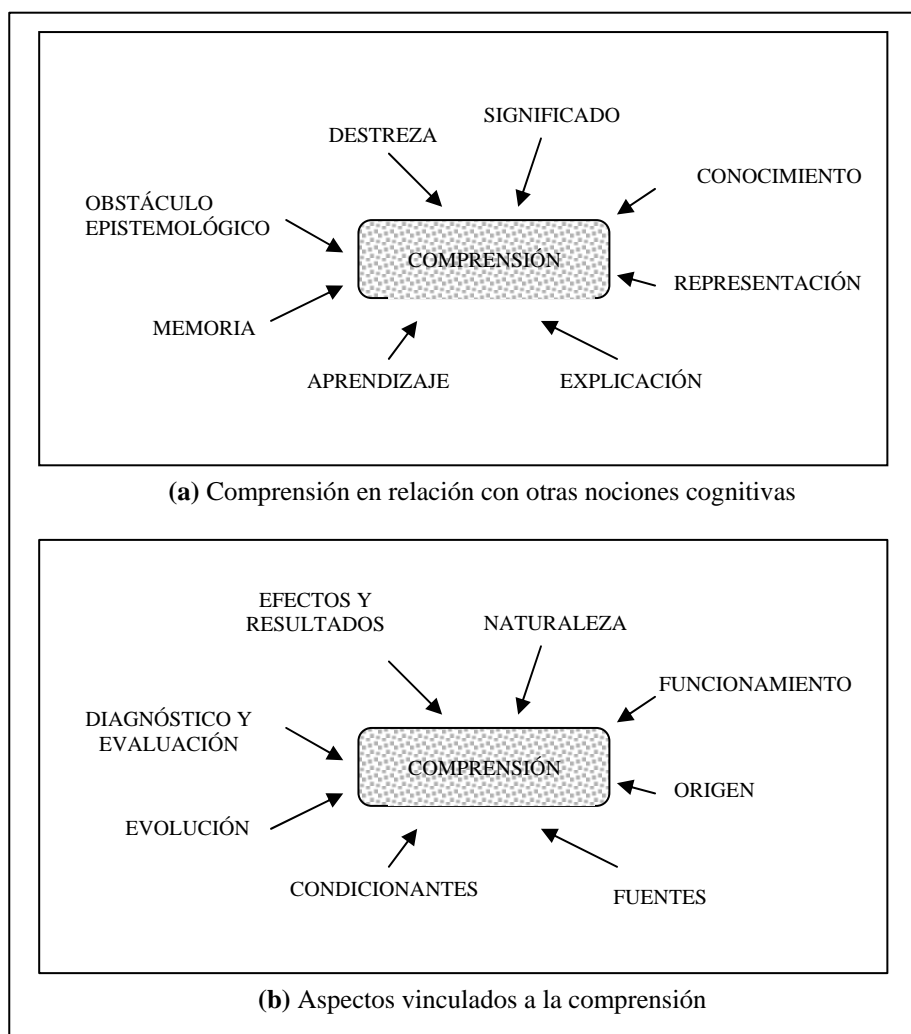


Figura 4.2.- Complejidad asociada al fenómeno de la comprensión

(ii) Al reconocer la comprensión como una noción que adopta distintos significados según el contexto en el que es utilizada (Sierpiska, 1990). Tal como se muestra en el capítulo II, se suele presentar como objetivo prioritario en la enseñanza y aprendizaje de la matemática (aprendizaje con comprensión y enseñanza para la comprensión), como método de investigación para las Ciencias Sociales (Verstehen), como cualidad característica del ser humano o como objeto de estudio para la Didáctica de la Matemática.

(iii) Al analizar las distintas posibilidades de comprensión que pueden presentarse, entre las que identificamos:

- (a) La comprensión que un sujeto tiene sobre sí mismo y sus propias acciones.
- (b) La comprensión que un sujeto tiene sobre un acontecimiento o suceso externo.
- (c) La comprensión que un sujeto tiene sobre un conocimiento (matemático o de otro tipo).
- (d) La comprensión que un sujeto tiene sobre otro sujeto.

En nuestra opinión, todas estas “comprensiones” manifiestan características peculiares que las hacen diferentes unas de otras, lo que supone una dificultad añadida al uso del término comprensión.

(iv) En la terminología y en la traducción. Durante la revisión de antecedentes se han observado diferencias terminológicas importantes así como una confusión y falta de precisión considerables a la hora de utilizar los términos relacionados con el fenómeno de la comprensión. Sierpinska (2000), por ejemplo, destaca la confusión producida en Fennema y Romberg (1999) al emplear las nociones de ‘aprendizaje con comprensión’ y ‘comprensión’. Tal como explica la autora, mostrar que un estudiante ha aprendido matemáticas con comprensión, de acuerdo a una definición establecida previamente sobre lo que significa aprender con comprensión, no es garantía para poder afirmar que ha llegado a comprender matemáticas.

Las traducciones suponen otra fuente de dificultad. Por ejemplo, los términos *understanding* y *comprehension*, empleados en distintos contextos en los antecedentes revisados, son interpretados en esta investigación como *comprensión*, reconociéndose a la vez que tal decisión podría suponer en principio la omisión de algún matiz de significado relevante.

En otro orden de reflexión, parece ser que considerar la especificidad del conocimiento matemático es uno de los aspectos clave para el desarrollo de una adecuada teoría de la comprensión en Educación Matemática. De hecho:

RP₁₀) En Didáctica de la Matemática se suele reconocer la especificidad del conocimiento matemático como factor que condiciona la comprensión del sujeto así como la valoración de ésta.

Sobre esta cuestión, señala Webb (1992):

“[...] la naturaleza de las matemáticas es lo suficientemente distinta y las prácticas matemáticas escolares son lo suficientemente diferentes como para sugerir que la valoración en matemáticas debiera distinguirse de la valoración en otras áreas de contenido.” (p. 662)

No obstante, a pesar de este reconocimiento:

RS₂) *Se echa en falta un mayor número de trabajos que traten explícitamente la comprensión del objeto matemático como fenómeno particular diferente a la comprensión de otros elementos y, de forma más amplia, estudios que analicen las características de la comprensión de cada uno de esos elementos y las posibles relaciones entre ellos.*

En la actualidad, estas cuestiones constituyen un campo abierto para la investigación. Así por ejemplo, en filosofía hermenéutica y en psicología la comprensión se ha estudiado en profundidad desde los puntos de vista (b) y (d) (mencionados con anterioridad en (iii)) mientras que en Educación Matemática se considera fundamentalmente la opción (c) como centro de interés, si bien es cierto que el término comprensión suele utilizarse también en otros sentidos que, por lo general, se ajustan a los puntos (c) y (d). Así, el ejercicio de valorar la comprensión de un conocimiento matemático podría interpretarse en realidad como el problema de *comprender* -(d)- lo que otro sujeto *comprende* -(c)- sobre ese conocimiento matemático.

4.5.2 Estudios y modelos

En este apartado se expone una síntesis de las conclusiones más relevantes extraídas de los estudios que sobre el fenómeno de la comprensión se han desarrollado en Educación Matemática en los últimos años. En concreto, se presenta una descripción y una clasificación genérica de los principales trabajos realizados y se discuten, de manera específica, las particularidades de los principales modelos de comprensión elaborados.

4.5.2.1 Naturaleza de los estudios

Tras revisar los estudios realizados sobre la comprensión del conocimiento matemático en Didáctica de la Matemática hemos observado que:

RS₃ (a) *Los esfuerzos por aclarar este fenómeno se han venido desarrollando hasta ahora desde perspectivas diferentes, abordando cuestiones parciales y asumiendo objetivos no-comunes, al menos a corto plazo.*
 (b) *Se manifiesta un panorama de carácter atomista con una leve emergencia de la posición representacionista sobre las demás.*

Entre los resultados más destacados podemos señalar que:

RP₁₁ La mayoría de las posiciones adoptadas en Educación Matemática frente a la comprensión del conocimiento matemático reconocen una relación no-fortuita o no-arbitraria entre los estados mentales del sujeto y su conducta externa.

No obstante,

RS₄ *en la actualidad no se conoce con precisión la naturaleza exacta de tal relación (ver RP₁₁), por lo que consideramos que es en este punto donde surgen las principales diferencias entre las distintas perspectivas y aproximaciones a la comprensión.*

En este sentido, Font (2000) identifica dos posiciones básicas enfrentadas: el representacionalismo y el no-representacionalismo.

Por otra parte, al igual que Kieran (1994), entendemos que los cambios producidos en la investigación durante los últimos años muestran una forma distinta de pensar sobre

la comprensión del conocimiento matemático. Asimismo, existe el convencimiento de una estrecha vinculación entre la investigación sobre comprensión y la metodología utilizada en Educación Matemática.

4.5.2.2 *Una clasificación general*

RS₅) *En líneas generales, los trabajos revisados referentes a la comprensión del conocimiento matemático pueden incluirse en algunos de los siguientes tipos:*

(i) *Estudios curriculares, de carácter reformista, con sugerencias acerca de cómo enseñar y aprender matemáticas con comprensión.* Son propuestas de autores preocupados por defender y aportar argumentos y datos a favor de una enseñanza para la comprensión de la matemática, pero que no suelen ir acompañadas de reflexiones serias sobre otros aspectos previos acerca del fenómeno de la comprensión, necesarios para poder fundamentar la enseñanza que proponen. Sierpinska (2000) llega incluso a catalogar alguna de estas propuestas como de “retórica persuasiva”, recordando de este modo la diferencia que ha de existir entre el investigador y el reformador. Tal como señala, “[...] los investigadores deberían ser conscientes de la confusión entre la retórica persuasiva y el argumento científico. La distinción no es fácil en el dominio de la educación matemática donde la línea entre ser un investigador y ser un reformador es extremadamente fina...” (p. 49).

(ii) *Estudios que elaboran modelos de categorías o niveles de comprensión* (en el apartado 4.5.2.3 se discute este enfoque).

(iii) *Trabajos que aportan definiciones o caracterizaciones justificadas para la comprensión pero sin abordar la problemática en profundidad.* En su mayoría son caracterizaciones que evidencian la perspectiva representacionista (Skemp, 1993, Gusev y Safuanov, 2000).

(iv) *Aproximaciones específicas centradas en el fenómeno de la comprensión, ampliamente desarrolladas y elaboradas aunque necesariamente incompletas, que contemplan el problema desde una perspectiva amplia y profunda y reconocen las limitaciones existentes* (Hiebert y Carpenter, 1992; Sierpinska, 1994; Pirie y Kieren, 1994; Duffin y Simpson, 1997).

(v) *Información sobre la comprensión del conocimiento matemático vinculada a la idea de modelo mental.* Por lo general, son planteamientos que transcurren a un nivel interno de reflexión tratando aspectos que no pueden ser observados directamente con facilidad. Tampoco suelen aportarse datos objetivos de origen observable que justifiquen y respalden las afirmaciones hechas sobre la naturaleza de los modelos mentales propuestos. Esta circunstancia provoca en la mayoría de los casos que el discurso se desarrolle a un nivel superficial. Se defiende la comprensión del conocimiento matemático y se proporcionan sugerencias para su promoción y desarrollo mediante la construcción de relaciones o la adquisición de modelos mentales de relaciones, aunque sin argumentos demasiado sólidos y profundos que sustenten las sugerencias realizadas. Un ejemplo lo encontramos en English y Halford (1995).

RS₆) *A pesar de la diversidad de trabajos desarrollados y de los esfuerzos de investigación realizados en Didáctica de la Matemática, consideramos que las cuestiones planteadas por Vergnaud (1997) (párrafos siguientes) a modo de agenda de investigación continúan conservando su vigencia y actualidad dado que los logros conseguidos hasta la fecha no parecen ser definitivos.*

En concreto, pensamos que aún permanecen sin respuesta cuestiones como las siguientes:

“ -¿Qué categorías de situaciones ofrecen ocasiones a los niños y estudiantes para formar conceptos matemáticos, en la escuela y fuera de la escuela? ¿Cómo podemos analizar la complejidad jerárquica de estas situaciones y clasificarlas?

- ¿Qué procedimientos son usados por los estudiantes al enfrentarse a estas situaciones? ¿Cuáles son acertados, o equivocados? ¿Bajo qué condiciones?...

- ¿Qué procedimientos son enseñados? ¿Cuáles desarrolla uno espontáneamente?...

-¿Qué palabras, sentencias y expresiones simbólicas son usadas por los sujetos para comunicar y comentar lo que hacen o lo que comprenden, para acompañar, generar y controlar sus operaciones de pensamiento y procedimientos, y para representar los objetos y relaciones involucrados?

- ¿Qué tipos de situaciones, nunca encontradas fuera de la escuela, deberíamos introducir en clase para hacer ciertos conceptos matemáticos significativos?” (p. 9)

4.5.2.3 Discusión y crítica de los principales modelos

I. Modelos de categorías y niveles:

De la reflexión acerca de los modelos que proponen tipologías y categorizaciones en base a niveles o tipos de comprensión extraemos los siguientes resultados:

(a) En primer lugar:

RS₇) *La mayoría de los trabajos sobre comprensión realizados en Educación Matemática han tenido como propósito la identificación de diferentes tipos de comprensión, si bien los modelos de categorías que se han propuesto resultan elementales, fomentan una visión distorsionada de la adquisición de la comprensión matemática, como algo simple y no como un proceso complejo, y son inadecuados para establecer diferencias entre las realizaciones de los alumnos que exhiben una comprensión matemática determinada.*

Por este motivo, al igual que Pirie y Kieren (1989):

RS₈) *Consideramos más apropiada la búsqueda de formas incisivas y menos simples de contemplar el proceso **completo** de crecimiento en la comprensión.*

Aunque también entendemos que los modelos contemporáneos elaborados para describir esos procesos dinámicos (los modelos de proceso) suelen ser bastantes categóricos por expresarse en términos de niveles o componentes definidos de forma concluyente.

(b) En segundo lugar:

RS₉) *Las jerarquías sugeridas al establecer categorías o niveles de comprensión no suelen estar suficientemente justificadas.*

Así por ejemplo, es criticable la escala mencionada en los niveles de comprensión de Koyama (1993), pues si bien se admite una cierta tendencia ascendente, una evolución positiva de la comprensión, no creemos que ésta sea tan categórica, clara y definitiva como para poder hablar, en este caso, de niveles y de jerarquización. Así lo ponen de manifiesto Ainley y Lowe (1999), al considerar que sus categorías de comprensión no constituyen una jerarquía, puesto que, tal como afirman, es posible poseer una comprensión conceptual sin necesidad de que ésta sea procedimental.

(c) Por otra parte, la descripción de niveles en los modelos provoca el planteamiento del problema de la existencia de un límite superior, de un último nivel, para la comprensión de un conocimiento matemático. Se trata de una cuestión abierta sobre la que no se han encontrado reflexiones fundamentadas en ninguno de los dos sentidos.

RS₁₀) *Se encuentra aún abierta la cuestión de la existencia de un límite superior, de un nivel máximo para la comprensión de un conocimiento matemático.*

(d) Los modelos de categorías suelen presentar además la limitación de su incompletitud:

RS₁₁) *Algunas tipologías no constituyen una partición o, lo que es lo mismo, no incluyen todo el rango de posibilidades en cuanto a la comprensión de los sujetos.*

En Ainley y Lowe (1999), por ejemplo, aparecen casos de alumnos en los que resulta difícil clasificar su comprensión dentro de una categoría determinada.

(e) Las categorías de comprensión no siempre se definen en función del conocimiento matemático que se pretende evaluar. Parece lógico pensar que tópicos matemáticos distintos van a proporcionar categorías de comprensión diferentes, por lo que no queda claro hasta qué punto resultan útiles, en el sentido de su aplicabilidad práctica, propuestas como las presentadas por Koyama (1993), Pirie y Kieren (1994) o Nakahara (1994). La consideración de la especificidad del conocimiento matemático nos permite establecer en este punto una clara diferencia entre modelos de niveles *generales* y modelos *específicos*. En consecuencia:

RS₁₂) *Resultan poco útiles las propuestas genéricas sobre comprensión del conocimiento matemático, es decir, las propuestas que no contemplan la especificidad de los conocimientos matemáticos particulares.*

(f) La elaboración de modelos de comprensión con tipologías diferentes parece resultar admisible. En los estudios revisados no se encuentran argumentos que justifiquen la unicidad de un sistema propuesto de niveles de comprensión. En DeMarois y Tall (1996), por ejemplo, se puede hallar una clasificación para el concepto de función con tipologías (representacionales) diferentes a la reflejadas por Nakahara (1994).

(g) Finalmente, son numerosas las cuestiones que surgen en torno a las características particulares de las categorías, niveles o tipos de comprensión. Por ejemplo: ¿de dónde surgen las categorías o cuáles han de ser las fuentes para determinar los tipos de comprensión asociados a un conocimiento matemático? ¿Cómo son las fronteras entre niveles? ¿Qué naturaleza manifiestan? ¿A qué nivel de análisis se establecen las categorías? ¿Para un modelo de niveles dado, cabe la posibilidad de establecer subcategorías o subniveles de comprensión si se decide desarrollar el estudio con mayor profundidad de análisis? ¿Para un mismo conocimiento matemático, realmente es posible proponer modelos con categorías distintas pero igualmente válidas con las que poder extraer información relevante sobre la comprensión de los sujetos? ¿Al final estos modelos proporcionarían la misma información sobre la comprensión, aún con categorías diferentes?

Las consideraciones anteriores se pueden sintetizar en el siguiente resultado secundario:

RS₁₃) *Quedan aún numerosas cuestiones sin respuestas en torno a las categorías, niveles o tipos de comprensión así como a la unicidad y equivalencia de las clasificaciones basadas en ellas.*

II. Modelos cognitivos:

A tenor de lo expuesto en el apartado 2.4.3.1 del capítulo II, podemos considerar que en el ámbito de la Educación Matemática existe un punto de vista psicologista para el estudio de la comprensión que trasciende al resto de aproximaciones. Ahora bien, consideramos que:

RS₁₄) *La concepción fundamental o la visión representacionista de la comprensión, donde las representaciones mentales del conocimiento adquieren un protagonismo especial, constituye un modelo explicativo restringido.*

En primer lugar, se trata de una aproximación que teoriza sobre aspectos cognitivos, destacando la faceta psicológica de la comprensión como proceso mental, cuando en realidad:

RS₁₅) *Creemos que la comprensión es un fenómeno más complejo en el que también intervienen aspectos sociales y culturales así como la naturaleza particular del contenido matemático a comprender.*

En segundo lugar, sus planteamientos suelen transcurrir en el ámbito de la suposición, con argumentos y explicaciones “a priori” de difícil confirmación empírica.

En tercer lugar, la importancia de la representación para los fenómenos de la comprensión y construcción de significado, reconocida por Castro et al. (1997), no llega a establecerse o determinarse con total claridad. De hecho, nos resulta difícil admitir que en la actualidad exista evidencia suficiente para pensar que la relación representación-comprensión sea precisamente la que dejan entrever estos autores a través de la caracterización que asumen para la comprensión:

“Siguiendo a Wittrock (1990), consideramos que la comprensión es <<una representación estructural o conceptualmente ordenada de las relaciones entre las partes de la información que se debe aprender, y entre esa información y esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencia>>. Los distintos sujetos presentan comprensiones diferentes sobre un mismo concepto o estructura matemática debido a que sus representaciones mentales tienen contenidos diferentes. La relación entre las representaciones internas y externas es clave en el estudio de los fenómenos de comprensión.” (pp. 363-364).

Básicamente, lo que dan a entender Castro et al. (1997) con sus planteamientos es que del uso que hacen los sujetos de las representaciones externas se puede extraer la información necesaria para determinar las representaciones internas que poseen, así como las relaciones entre ellas, obteniéndose de este modo conocimiento sobre su comprensión. En este argumento básico, que puede considerarse específico de la posición representacionalista, encontramos sin embargo:

RS₁₆) *Existe una triple limitación o dificultad operativa en la posición representacionalista a la que todavía no se le ha dado una solución definitiva:*

(1) No queda claro el vínculo que existe en realidad entre la comprensión, por un lado, y las conexiones entre diferentes representaciones internas, por otro. Por ejemplo, la idea de que un mayor número de representaciones mentales y conexiones entre ellas suponga una mayor comprensión requiere matizaciones más precisas.

(2) La transición entre los ámbitos externo e interno tampoco está clara y no es sencilla de establecer. Aún permanece abierta la cuestión de precisar cuál es la naturaleza real de la influencia mutua entre representaciones externas e internas. El representacionalismo clásico, por ejemplo, admite una relación homeomórfica entre objetos de mundos diferentes a nivel interno y externo, y sin embargo, también existen trabajos posicionados en el representacionalismo en los que la relación entre ambos tipos de representación no es de equivalencia. Las investigaciones de Duval sobre la representación es uno de los casos citados por Font (2000):

“Si bien hay investigadores posicionados en el representacionalismo que postulan una equivalencia entre representaciones externas e internas (Castro y Castro, 1997), Duval se muestra crítico con la suposición que cada representación externa tiene un equivalente en forma de representación interna, ya que considera que esta relación es bastante más compleja” (p. 19).

Por ello, al desconocerse las características precisas de la relación entre representaciones y conexiones internas y externas nos resulta atrevida la idea de extraer conclusiones acerca de cómo los individuos representan y conectan internamente el conocimiento a partir de las representaciones y conexiones externas que establecen al resolver distintas tareas seleccionadas de forma intencionada.

(3) La posición representacionalista depende y está condicionada por unas ideas preconcebidas muy concretas sobre la naturaleza y el funcionamiento del fenómeno de la comprensión, que son admitidas como características mentales propias del sujeto cognoscente. Estos supuestos se toman de referencia para constituir el representacionalismo como modelo de comprensión, que a su vez es empleado como soporte teórico para llevar a cabo a posteriori estudios empíricos que precisamente tienen entre sus objetivos proporcionar datos en favor del propio modelo. A nuestro entender, este acercamiento a la realidad se produce en una fase ya avanzada del procedimiento, una vez desarrollados todos los elementos teóricos necesarios. Éstos, si bien sirven de guía, influyen desde el inicio en el modo de proceder. El proceso descrito podría ajustarse al esquema metodológico recogido en la figura 4.3.

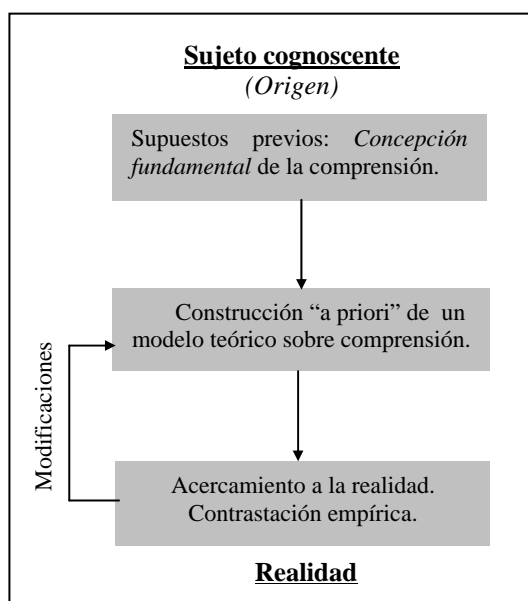


Figura 4.3.- Esquema de acción en la propuesta representacionalista.

Finalmente, hemos de mencionar que a pesar de todas las limitaciones subrayadas:

RS₁₇) *Consideramos la aproximación representacionalista válida como interpretación teórica que proporciona ideas de carácter general relacionadas con la comprensión.*

Así por ejemplo, este modelo llama la atención sobre la complejidad que supone valorar la comprensión y apuesta por la elaboración de perfiles de comprensión empleando tareas de diferente naturaleza. Asimismo, hemos de reconocer que desde el marco sugerido por Hiebert y Carpenter (1992) se le da un tratamiento más acertado a la valoración de la comprensión si lo comparamos, por ejemplo, con la tendencia psicométrica de medir la comprensión asignando puntuaciones simples obtenidas de tests con ítems de similares características.

4.6 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: discusión y resultados

En lo que respecta a la valoración de la comprensión del conocimiento matemático presentamos distintas reflexiones que tienen su origen en los planteamientos recogidos en el apartado 2.5 del capítulo II. La discusión se centra en cuestiones relacionadas con la observación y recogida de datos, la interpretación y valoración de acciones y la fundamentación del diagnóstico.

4.6.1 Observación y recogida de datos

El problema de la observación y recogida de información para determinar la comprensión que poseen los sujetos se encuentra en el mismo corazón de la problemática general de la evaluación en matemáticas. En la actualidad, constituye además una de las cuestiones más polémicas y que más nos interesa para la investigación que presentamos. Las cuestiones clave que van a ocupar parte de los párrafos que siguen son las relacionadas con el papel que desempeñan las manifestaciones externas o la relación existente entre la acción y la explicación en la valoración, entre otras consideraciones.

4.6.1.1 Manifestaciones externas

Los estudios analizados nos llevan a concluir que:

RS₁₈) *Las manifestaciones observables de los sujetos (acciones externas, producción escrita, afirmaciones y explicaciones) se erigen como un medio adecuado, e incluso diríamos que único, del cual el observador puede extraer información relevante y objetiva sobre el estado de comprensión de los sujetos.*

Así lo reconoce Bender (1996) en referencia al profesor, aunque la misma idea se hace extensible al propio alumno:

“[...] De las palabras, diagramas, etc., que ella o él utiliza, de su rechazo o aceptación de las respuestas de los estudiantes, etc., el observador puede mostrar con frecuencia las propias imágenes y comprensiones del profesor sobre el concepto matemático en cuestión” (p. 59).

Ahora bien, manifestaciones externas como las que mencionan Duffin y Simpson (1997) (movimiento de ojos, parpadeo, ¡aja!) nos parecen poco fiables puesto que se centran en comportamientos y aspectos físicos intrínsecos alejados del conocimiento. A diferencia de éstos:

RS₁₉) *Consideramos más adecuada la referencia del desempeño intelectual para diagnosticar la comprensión en los sujetos.*

4.6.1.2 Complementariedad actuar – expresar

La relación entre acción y explicación constituye un tema de interés en el ámbito del diagnóstico y evaluación de la comprensión. Sobre este aspecto podemos concluir que:

RS₂₀) *Las producciones escritas y las explicaciones dadas por los alumnos ante situaciones-problemáticas son criterios interpretados por el investigador como indicios de la presencia de comprensión. Existe, sin embargo, una cierta controversia en torno a la relación entre acción y explicación en el proceso de evaluación de los sujetos.*

Por ejemplo, Vergnaud (1988) pone de manifiesto que el par acción-explicación no debiera entenderse como una dualidad que contrapone aspectos incompatibles, sino más bien complementarios. Según él,

RP₁₂) conviene considerar conjuntamente tanto las acciones realizadas por los sujetos (producción escrita) como las explicaciones (verbales o escritas) que puedan proporcionar en su intento por resolver las tareas y situaciones propuestas.

Cualquier información extraída del comportamiento observable de los sujetos puede ser de ayuda para configurar un perfil de comprensión lo más completo y ajustado posible a la realidad.

Por su parte, Pirie y Kieren (1994) también defienden una complementariedad entre el actuar y el expresar si bien dejan entrever que la capacidad para explicar correctamente sitúa al sujeto en un nivel de comprensión más avanzado que el que pudiera demostrar con sus acciones.

Básicamente, acerca de esta cuestión consideramos que:

RS₂₁) *La capacidad de los alumnos para expresar y explicar los procedimientos empleados en un problema es un criterio importante para evaluar su comprensión, aunque no necesariamente es el más relevante y tampoco debe ser el único a tener en cuenta.*

Asimismo, aunque puedan existir desajustes entre acciones y explicaciones también nos parece coherente la idea de que la mayoría de las acciones vengán acompañadas de explicaciones más o menos acertadas y viceversa.

Por otro lado, contemplar conjuntamente la producción escrita y la explicación verbal reduce la posibilidad de coincidencias no deseadas para la valoración de la comprensión como, por ejemplo, la de que dos sujetos enfrentados a una misma

situación-problema empleen en su discusión el mismo vocabulario en distintos sentidos o la presencia de producciones escritas idénticas en sujetos que en realidad poseen una comprensión muy diferente. En cualquier caso, este hecho habrá que aceptarlo como una dificultad más en cualquier propuesta de evaluación basada en las manifestaciones observables de los sujetos.

4.6.2 Interpretación y valoración de acciones

La valoración de la comprensión lleva asociada una serie de consideraciones sobre las que conviene prestar especial atención. En este apartado, se exponen las referentes a las limitaciones que afectan a todo proceso de interpretación de acciones, a la relatividad del mismo o al vínculo entre la valoración y la representación o el desarrollo, entre otros aspectos.

4.6.2.1 Limitaciones

Una de las principales conclusiones que extraemos de los estudios revisados en filosofía y epistemología tiene que ver con la interpretación de las acciones del otro. En concreto, llegamos a la conclusión de que:

RS₂₂) *La valoración, entendida como interpretación de acciones observables realizadas por otros sujetos, ha de ser necesariamente abierta e incompleta.*

Abierta porque ninguna cantidad de evidencia podría aportar la certeza suficiente para admitir que no existe otra interpretación distinta e igualmente correcta (Dancy, 1993). *Incompleta* porque resultaría imposible alcanzar una empatía completa con el otro, según se desprende de la concepción de comprensión de Schank (1988) o de Abel (1964) sobre la operación de la *Verstehen*.

A estas limitaciones hay que añadir el reconocimiento de Morin (1994) sobre la insuficiencia de la comprensión para comprenderse a sí misma. El argumento que sustenta esta condición es el siguiente: si lo que pretendemos es extraer información sobre lo que los sujetos comprenden con el propósito de ir conformando una idea cada vez más precisa de los diversos aspectos relacionados con el fenómeno de la comprensión y, a su vez, admitimos que el proceso a seguir se puede identificar en cierto modo con el de la comprensión (en el segundo sentido dado por Morin), entonces llegamos a la conclusión de que tal propuesta de acercamiento a la comprensión debería ser necesariamente indeterminada puesto que estaríamos intentando aclarar el fenómeno de la comprensión empleando para ello la misma comprensión (en su segundo sentido).

Hemos de subrayar, a pesar de todo, que estas limitaciones tan sólo son fruto de unas posiciones teóricas concretas no definitivas y criticables.

4.6.2.2 Relatividad de la valoración

Entre los autores estudiados identificamos el reconocimiento mayoritario de que:

RS₂₃) *El conocimiento matemático que posee un sujeto sólo puede ser exhibido mediante las acciones que realiza al tratar con tareas problemáticas.*

No obstante, a diferencia de Pirie y Kieren (1989), no vemos la necesidad de catalogar las acciones en efectivas puesto que, en nuestra opinión, cualquier acción observable realizada siempre resulta positiva por el hecho de proporcionar alguna información sobre el conocimiento matemático empleado por el sujeto, aunque sea mínima. En cambio, una cuestión distinta es la de valorar la idoneidad o efectividad de esas acciones. En tal caso, un conocimiento mostrado mediante acciones podrá ser más o menos acertado o correcto dependiendo de los criterios del observador. Las apreciaciones son relativas y las valoraciones resultan diferentes si las hacen distintos observadores (Sierpiska, 1994; Morgan, 1996), idea que enlaza con la relatividad institucional planteada por Díaz-Godino (2000).

En el mismo orden de reflexión y tal como mencionan White y Gunstone (1992):

RP₁₃) La valoración depende además del propósito del investigador, del modelo de comprensión adoptado como referencia teórica y de la metodología empleada en las fases empíricas de las investigaciones. Las tareas utilizadas es otro condicionante de la valoración que justifica su carácter relativo.

Por último, en el mismo sentido que Webb (1992), estimamos la especificación del contenido matemático como elemento fundamental en la valoración. En este caso, el modo de especificar el contenido en el diseño de los métodos de valoración resulta otro condicionante más de los resultados en la investigación.

4.6.2.3 Valoración y representación

Como venimos señalando, el método para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión adoptado por la aproximación representacionista centra su atención en el estudio de las representaciones mentales de los sujetos, es decir, en examinar la construcción de nuevas representaciones, en el uso dado a las ya existentes y en las características de las relaciones entre ellas. Sin embargo:

RS₂₄) *El enfoque representacionista plantea el problema fundamental de la viabilidad a la hora de evaluar representaciones privadas que los sujetos construyen en su mente.*

En efecto, consideramos que a través de diferentes instrumentos metodológicos podemos obtener información detallada sobre lo que realizan o hacen los sujetos a nivel externo pero no de lo que sucede en sus mentes. Es imposible introducirse en la mente del individuo y tampoco podemos conocer de forma directa las representaciones mentales que elabora. Por todo ello, entendemos que:

RS₂₅) *Es más factible y apropiado limitar la evaluación a las manifestaciones externas de la comprensión, dejando a un lado las afirmaciones de carácter interno y las conclusiones referentes a características internas.*

El inconveniente se halla en traspasar la frontera de lo observable para describir aspectos cognitivos internos a partir de observaciones hechas sobre representaciones externas. En todo caso, de la interpretación realizada a una conducta podríamos inferir, si se desea, supuestos o conjeturas acerca de lo que verdaderamente acontece en la mente de un alumno, pero siempre que se reconozca al mismo tiempo que no vamos a poder estar seguros de que tales resultados sean ciertos.

Así por ejemplo, los cinco tipos de actividad mental que según Carpenter y Lehrer (1999) desarrollan la comprensión matemática no pueden interpretarse como consecuencias observables de la propia comprensión que posee el sujeto. Y esto es así porque no existe garantía suficiente para conocer con certeza la naturaleza de unas reflexiones que suceden en la esfera de lo privado. Resulta imposible observar desde una posición externa al individuo la construcción de las relaciones internas que tiene lugar en su mente. Además, pensamos que:

RS₂₆) *Permanece abierta la cuestión de la adecuación del modelo representacionalista cuando se selecciona un conocimiento matemático que sólo admite una única representación externa, como es el caso de algoritmos estándar escritos para las operaciones aritméticas elementales.*

Por otra parte, con vistas a establecer relaciones entre planteamientos, se podría pensar que los actos de comprensión de los que habla Sierpinska (1990) son interpretables como indicadores internos de la comprensión de un sujeto, puesto que, según la autora, es a través de sucesivos actos de comprensión como el alumno llega a captar el significado de un concepto matemático, o lo que es lo mismo para ella, llega a comprenderlo. En este sentido, resultarían interesantes los estudios encaminados a determinar de forma concreta cuáles son, si es que realmente existen, los indicadores externos de comprensión correspondientes a los supuestamente internos. Estos indicadores externos sí que podrían servir de enlace entre el observador que pretende diagnosticar la comprensión del individuo y los actos de comprensión que se suceden en su mente. En cualquier caso, consideramos ésta como una propuesta abierta.

4.6.2.4 Valoración y desarrollo

Con su modelo de proceso, Koyama (1993) intenta solucionar al mismo tiempo dos problemas, (a) el de diagnosticar o describir la comprensión de los sujetos y (b) el de desarrollar en ellos esta comprensión. Entendemos que ambas tareas no son simultáneas, sino que (a) es anterior a (b). Así, las conclusiones extraídas de (a) nos van a permitir construir una base sólida de criterios con los que actuar sobre (b) de un modo fundamentado en posteriores etapas. Por otro lado, aunque el diagnóstico y el desarrollo no sean los únicos aspectos particulares relacionados con la comprensión (ver figura 4.2b), nos sirven en este caso para mostrar que algunos de los autores revisados también reconocen el carácter multidimensional de la comprensión, al menos de forma implícita.

4.6.3 Fundamentación del diagnóstico

Las tareas, problemas, situaciones y fenómenos en los que el conocimiento matemático cobra sentido constituyen uno de los aspectos que intervienen en el

diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En este apartado se exponen las conclusiones relacionadas con este tema derivadas de los planteamientos expuestos en los capítulos precedentes.

4.6.3.1 La elección de situaciones-problema

Uno de los aspectos que ponemos de manifiesto con el Análisis Didáctico tiene que ver con las limitaciones que muestran algunas investigaciones a la hora de justificar la elección y diseño de las tareas utilizadas en sus fases empíricas. De hecho:

RP₁₄) La mayoría de los trabajos revisados no justifican adecuadamente la selección de los problemas y tareas a los que se enfrentan los alumnos.

Por ejemplo, DeMarois y Tall (1996) llegan a establecer perfiles de comprensión para el concepto de función mediante respuestas dadas a tareas únicas por cada faceta considerada. En este caso particular, no llega a analizarse la representatividad de las situaciones empleadas.

En el mismo orden de reflexión, al reconocer que la comprensión mostrada por los sujetos estará condicionada por las tareas y cuestiones a las que se enfrentan, la elección del formato adecuado para una tarea no será una cuestión sencilla de resolver y, por lo tanto, convendrá prestarle una especial atención. Estas situaciones se podrán diseñar de múltiples formas en función de lo que pretendamos evaluar (capacidad memorística, dominio de algoritmos, comprensión de conceptos). También Vergnaud (1997) considera que la variedad de tareas para proponer a los alumnos es extensa, máxime cuando el investigador tiene en cuenta además el formato de las mismas.

4.6.3.2 Necesidad de la fundamentación epistemológica y fenomenológica

Observamos una cierta diversidad entre las propuestas examinadas para alcanzar la objetividad en el diagnóstico y evaluación de la comprensión de los sujetos. Entre ellas situamos la referencia de Sierpiska (1994) a los sistemas lógicos, los análisis semántico y estructural de Niemi (1996) o la propia teoría de Díaz-Godino y Batanero (1994) sobre los objetos matemáticos y sus significados. Estas propuestas, aunque relevantes, adolecen del respaldo empírico necesario para garantizar la operatividad deseada en estos casos. Asimismo, entendemos que en Educación Matemática:

RS₂₇) *Se echa en falta un mayor número de estudios que establezcan y muestren con detalle las pautas a seguir para la elaboración precisa de análisis de corte epistemológico y fenomenológico como vía de acceso adecuada con la que afrontar la valoración objetiva de la comprensión del conocimiento matemático.*

Por ejemplo, la exploración que propone Sierpiska (1990) para los conceptos matemáticos bien podría ser útil para identificar obstáculos epistemológicos y actos de comprensión en los sujetos. Sin embargo, en este caso concreto no se llega a precisar de qué forma hemos de emplear en la práctica las recomendaciones teóricas expuestas para evaluar la comprensión de los estudiantes, tanto en un sentido positivo como negativo.

En otro orden de cosas, como dejan entrever English y Halford (1995), el conocimiento matemático no está aislado y para estudiarlo desde una perspectiva epistemológica se necesita contemplarlo en relación con otros conocimientos. Ahora bien, de este supuesto surge el problema de constituir, para un conocimiento matemático dado, la frontera epistemológica de relaciones con otros conocimientos y de delimitar un campo de acción operativo que reúna a aquellos conocimientos próximos o estrechamente vinculados con el elegido. De otro modo, como las relaciones pueden llegar a ser altamente complejas y sofisticadas, pues de ellas dependen la unidad y consistencia del edificio matemático, en principio resultaría poco práctico y manipulable establecer vínculos entre conocimientos distanciados y a priori inconexos. Es decir, si admitimos que es posible instaurar una relación entre cualquier par de conocimientos matemáticos, todo análisis epistemológico dejará de ser operativo a menos que restrinjamos los vínculos a sólo aquellos que conecten el conocimiento matemático en estudio con el grupo reducido de conocimientos correspondiente a los más próximos de su entorno, esto es, a los que están enlazados con vínculos directos al conocimiento seleccionado.

Por otra parte:

RS₂₈) *La determinación del campo de acción del análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático, en sus distintas acepciones, constituye una cuestión abierta no resuelta en investigaciones precedentes.*

Entre otros temas de reflexión se halla el de decidir si todo conocimiento matemático admite un análisis fenómeno-epistemológico o por el contrario se trata de un tipo de estudio restringido a determinados constructos matemáticos. En nuestra opinión y como primera aproximación, en cualquier análisis epistemológico que se plantee quizá se debiera admitir diferencias en términos de relevancia y adecuación respecto a su aplicación si entendemos que estos estudios son más propios para conceptos o procedimientos matemáticos que para definiciones, demostraciones particulares o transformaciones sintácticas, entre otras. En cualquier caso, toda propuesta para el estudio de la comprensión apoyada en el conocimiento matemático debería proporcionar una respuesta a esta cuestión o al menos adoptar una posición al respecto.

Asimismo, sin salirnos del ámbito fenómeno-epistemológico, nos parece acertada la opinión de Castro et al. (1997) de que los conceptos matemáticos vienen establecidos por sus distintos significados y usos, siendo éstos últimos los que determinan su campo semántico. No obstante, estamos en desacuerdo con la afirmación de que cada modo significativamente distinto de entender un concepto necesite de un sistema de representación propio, tal como se indica. Y la prueba de ello la podríamos tener en un algoritmo como los estándar escritos para las operaciones aritméticas básicas. Estos son conocimientos matemáticos que permaneciendo bajo un mismo sistema de representación podrán contemplarse de formas muy diferentes en niveles de comprensión sustancialmente distintos, tal como se verá en el caso de la multiplicación.

4.7 Comprensión y cálculo aritmético elemental

En este apartado exponemos los principales resultados extraídos al relacionar la información recopilada en el capítulo III sobre los algoritmos y el cálculo aritmético elementales con el estudio realizado en el capítulo II en torno al fenómeno de la comprensión en matemáticas:

- En primer lugar, al igual que otros autores (Gavilán y Barroso, 1996; Gairín y Sancho, 2002):

RS₂₉) *Consideramos necesario utilizar otros grupos de tareas complementarias a las mencionadas para desarrollar la comprensión que poseen los estudiantes de los algoritmos numéricos, con vistas a evitar, como señala Rico (1997b), el aprendizaje deficiente y la comprensión limitada.*

Y como venimos señalando, la valoración también resultaría más fiable y válida¹ si se contemplara un conjunto más amplio de tipos de situaciones a los que enfrentar a los alumnos.

- En segundo lugar, en el ámbito particular del Cálculo Aritmético Elemental podemos observar la tendencia generalizada de centrar la atención en la enseñanza de conocimientos matemáticos concretos sin antes haber profundizado previamente en cuestiones relacionadas con la comprensión de los mismos. Esto es:

RS₃₀) *Percibimos que la mayoría de los trabajos revisados se han preocupado básicamente por la cuestión de cómo fomentar y desarrollar la comprensión, pero sin antes haber reflexionado lo suficiente sobre otros aspectos importantes de la misma que creemos son previos al diseño de propuestas metodológicas.*

Entre otras consecuencias, consideramos que éste puede ser el principal motivo por el cual los estudios analizados relacionados con la enseñanza de los algoritmos aritméticos elementales, a pesar de su interés por alcanzar el propósito común de favorecer la comprensión de los estudiantes, sólo llegan a ofrecer prescripciones e ideas no definitivas y de carácter general.

- En tercer lugar, identificamos indicios de que:

RS₃₁) *La aproximación representacionista de la comprensión se muestra como referencia conceptual en algunas de las propuestas de enseñanza analizadas en el cálculo aritmético elemental.*

En concreto, además de la aritmética cognitiva (Ashcraft, 1995), las propuestas de enseñanza de métodos de cálculo basadas en la comparación de diferentes algoritmos, entre ellos el estándar escrito para cada operación, están adoptando implícitamente este

¹ Validez y fiabilidad son presentadas por Webb (1992) como dos características esenciales de cualquier forma de valoración.

modelo de comprensión (Phillip, 1996; Mason, 1998). En efecto, somos de la opinión de que los autores que defienden estas propuestas entienden la comprensión en términos de conocimiento representado y conectado. El argumento básico sería el siguiente: en principio, entre los numerosos tipos de relaciones internas que pueden construir los sujetos se encuentran aquellas basadas en las similitudes y diferencias que establecen al advertir ciertas correspondencias entre diferentes formas de representación externa o dentro de un mismo sistema de representación externa. Ahora bien, en el caso de los distintos procedimientos para las cuatro operaciones aritméticas básicas, que transcurren en un mismo sistema de representación externa, las posibles semejanzas y diferencias identificadas por los estudiantes a nivel externo podrían dar lugar a la construcción de algunas relaciones internas que ubicaran y conectarán de cierta forma esos métodos de cálculo. Por tanto, fomentar la identificación de semejanzas y diferencias entre algoritmos sería la vía para conseguir que los individuos instauren y estructuren una red de relaciones entre las correspondientes representaciones internas asociadas a esos algoritmos, posibilitando de este modo la comprensión de los mismos.

- Asimismo, en función de los trabajos revisados llegamos a concluir que:

RS₃₂) *Las críticas y discusiones que se han venido desarrollando en las últimas décadas en el ámbito del cálculo aritmético elemental, y que han dado como resultado una serie de propuestas diversas de enseñanza y aprendizaje para esta parte de la matemática, han estado centralizadas en un principio en (a) la cuestión de la presencia de los algoritmos estándar escritos en los currículos oficiales y en (b) el problema de hallar un método de enseñanza adecuado para ellos u otros alternativos. Estas dos problemáticas iniciales han llegado a extenderse con el tiempo a una tercera más general y compleja: (c) la relación existente entre el cálculo escrito, el cálculo mental y la calculadora en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética elemental.*

Profundizando un poco más en la cuestión, el origen del problema se sitúa en una situación inicial no deseada y el propósito fundamental consiste en mejorarla mediante el análisis de los puntos (a), (b) y (c). La situación de inicio a superar no es otra que la existencia de unos métodos de cálculo concretos cuyo aprendizaje es impuesto (los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas básicas) y un modo de proceder particular para la enseñanza de estos métodos (la aproximación clásica a la aritmética escrita). Se reconoce, asimismo, que los resultados obtenidos en el aprendizaje de los sujetos no son los deseados.

- Finalmente, desde un punto de vista general, entendemos que el problema actual de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo aritmético elemental está estrechamente relacionado con las dificultades que surgen en los estudios centrados en el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático. La Educación Aritmética Elemental está inmersa en un cuestionamiento permanente acerca de lo que debe y cómo debe enseñarse y aprenderse, lo que provoca el desarrollo continuo de sugerencias, propuestas y ensayos metodológicos a fin de resolver el problema. En nuestra opinión, esta situación perdurará sin cambios significativos mientras no madure la investigación en Educación Matemática en el campo de la comprensión. En otros términos:

RS₃₃) *Identificamos una clara conexión entre la situación actual en la que se encuentra la investigación sobre la comprensión en Educación Matemática y los estudios sobre enseñanza y aprendizaje del Cálculo Aritmético Elemental.*

La situación descrita en el capítulo II, en la que no existen resultados definitivos sino tan sólo prescripciones y sugerencias extraídas de estudios particulares, en general inconexas y a veces contrapuestas, no es más que una consecuencia de los escasos resultados concluyentes que se poseen en la actualidad en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático.

4.8 Consecuencias para la investigación

De todo lo expuesto en los apartados anteriores extraemos algunas consecuencias a tener en cuenta de cara a la elaboración de una aproximación propia al fenómeno de la comprensión. Las consecuencias giran en torno a tres temas: la comprensión en general y la comprensión del conocimiento matemático en particular; el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático; y, con vistas a una primera aplicación práctica, la comprensión y su valoración en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Dichas conclusiones habrá que entenderlas como unos primeros supuestos e ideas emergentes, reconocidos pero también necesitados de un mayor desarrollo y vertebración para la consolidación de una propuesta teórica consistente. Las interpretamos pues como preliminares de la propuesta desarrollada en el capítulo V de la presente memoria.

4.8.1 Comprensión del conocimiento matemático

- En virtud de la situación descrita en el apartado 4.5.2 en relación con las características de los estudios desarrollados en Educación Matemática sobre la comprensión del conocimiento matemático, llegamos a la conclusión de que:

[C₁] Los procesos de comprensión se pueden estudiar desde puntos de vista diferentes, aunque las diferencias que surgen entre las distintas aproximaciones a la comprensión no implican necesariamente que algunas de ellas deban ser falsas. Los desacuerdos puntuales los entendemos más bien como necesarios para ir progresando en la línea de lograr un mayor entendimiento, el mayor posible, sobre el fenómeno de la comprensión.

Ahora bien, al mismo tiempo:

[C₂] Somos partidarios de realizar esfuerzos en busca de alguna teoría unificadora que reúna, vertebre y articule los distintos planteamientos existentes en torno a la comprensión del conocimiento matemático. De hecho, admitimos tal posibilidad, de modo que apostamos por una aproximación integradora a la comprensión.

- En la actualidad, es tanta la complejidad que encierra el fenómeno de la comprensión que nos parece poco realista construir modelos válidos para todo conocimiento y que al mismo tiempo reflejen con precisión y rigurosidad la comprensión de los sujetos. En consecuencia:

[C₃] *En el ámbito concreto de la Educación Matemática, tal vez resulte más apropiado desarrollar marcos teóricos de carácter general sobre la comprensión que sirvan de referencia y guía para el posterior diseño de modelos locales más específicos y operativos desde los que afrontar problemas puntuales de investigación centrados en tópicos matemáticos concretos.*

En este punto nos sentimos respaldados por Kieran (1998) cuando subraya el éxito que está teniendo la comunidad investigadora en el desarrollo de modelos teóricos, no triviales, localmente aplicables y relacionados con el trabajo empírico realizado.

- Asimismo, las deficiencias e interrogantes planteados por los modelos basados en categorías y niveles de comprensión nos hacen pensar que quizá no sean suficientemente significativos como para ser empleados en fases avanzadas de investigación sobre comprensión de conocimientos matemáticos concretos. Por el contrario, los percibimos como instrumentos adecuados para llevar a cabo aproximaciones iniciales al diagnóstico y evaluación de la comprensión en los sujetos.

- Por otro lado, convendría proponer una alternativa seria al modelo representacionista de la comprensión. De hecho, no consideramos oportuna la estrategia de desarrollar a nivel teórico una propuesta explicativa sobre la organización del conocimiento en la mente de los sujetos. En nuestra opinión, resulta una cuestión demasiado compleja para abordarse de manera directa y a priori, sin suficiente respaldo empírico previo, tal como pensamos se hace desde el representacionismo.

Más bien:

[C₄] *Las afirmaciones en torno a la comprensión de un sujeto debieran realizarse exclusivamente a partir de, y en base a, los distintos usos observables dados por el individuo al conocimiento matemático considerado.*

[C₅] *Asimismo, conviene que estos usos sean establecidos y catalogados de antemano a partir de análisis sobre el conocimiento matemático tratado y sirvan de referencia para la posterior interpretación de acciones y respuestas.*

[C₆] *Conviene resaltar que en el estudio del conocimiento matemático se incluiría como aspecto particular analizable las distintas representaciones externas que pudiera adoptar dicho conocimiento, por lo que la utilización de una representación externa concreta sería vista como un aspecto más de un uso determinado dado al conocimiento matemático en una situación particular.*

- También llegamos a la conclusión de que la comprensión no es un fenómeno que pueda aislarse para su estudio de la realidad en la que está inmersa la persona. En la medida en que hay múltiples factores que afectan al individuo, indirectamente también influirán en su comprensión. Por este motivo:

[C₇] *Creemos necesario que toda aproximación al fenómeno de la comprensión preste atención a los posibles condicionantes externos de la comprensión y los tenga en cuenta de cara a la valoración de la misma. Entre todos ellos, cobra especial importancia las experiencias vividas por el sujeto, constituyéndose de este modo en el principal condicionante de la comprensión.*

En realidad, continuamente nos estamos enfrentando a nuevas situaciones que hemos de intentar comprender y de esos enfrentamientos vamos adquiriendo una experiencia que empleamos posteriormente para abordar otras nuevas situaciones. Por ello, entendemos que los objetivos, expectativas, acciones, comportamientos, creencias y estilos de vida de los sujetos son fruto de las diversas experiencias que han ido acumulando a lo largo del tiempo.

- En el mismo orden de reflexión, aceptamos el hecho de que:

[C₈] *La comprensión que un sujeto puede tener de un conocimiento matemático siempre va a estar ligada desde el inicio a las situaciones en las que ese conocimiento interviene.*

Esto es, no concebimos una comprensión de un tópico matemático concreto aislada por completo de toda situación vinculada a él, de modo que, con vistas a la valoración, al menos alguna situación deberá presentarse al sujeto para que se pueda afirmar algo de su comprensión.

- Por otro lado, resulta acertado reconocer en la comprensión el carácter de constructo inobservable, al menos de manera directa. No obstante:

[C₉] *Somos partidarios de que la comprensión de un individuo sobre un conocimiento matemático puede ser inferida indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo en su intento por resolver tareas problemáticas que requieren el uso de ese conocimiento particular.*

En consecuencia, sólo se podrá constatar la comprensión de un sujeto de forma indirecta, a partir de acciones observables, o como indican Duffin y Simpson (1997), a partir de las manifestaciones externas producidas. Sólo a través de evidencias, de manifestaciones externas podremos acercarnos paulatinamente a la verdadera comprensión de los sujetos. Y como venimos señalado, este acercamiento nunca podrá ser definitivo.

En este punto, somos partidarios al igual que otros autores (Pirie y Kieren, 1994; Duffin y Simpson, 1997; Díaz-Godino, 2000) de la búsqueda de situaciones problemáticas desde donde inferir esta comprensión a partir de las acciones realizadas en ellas. Como Webb (1992), consideramos que la interpretación de acciones observables resulta fundamental para validar un proceso de valoración y, en tal sentido, contemplamos la determinación del desempeño de los sujetos ante una serie de situaciones problemáticas como la vía de actuación más acertada.

- Por último, aunque no por ello menos importante, la falta de rigor en el empleo de términos relacionados con la comprensión, señalada en el apartado 4.5.1, nos lleva a insistir en la necesidad de prestar atención a la cuestión terminológica en toda aquella aproximación que se pretenda desarrollar, sobre todo con objeto de aportar una mayor claridad y solidez a los planteamientos. Por nuestra parte, salvando la limitación natural de la traducción, iremos explicando a lo largo de sucesivos capítulos, en el contexto donde corresponda, el sentido particular dado a aquellos términos considerados más significativos y relevantes dentro de la investigación.

4.8.2 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático

Por la situación actual en la que se encuentran los estudios sobre comprensión en Educación Matemática consideramos que:

[C₁₀] *Todavía resulta preciso continuar con la labor de elaborar y proponer métodos de diagnóstico y evaluación cada vez más adecuados, que garanticen, siempre a partir de datos reales obtenidos mediante instrumentos concretos, una información útil, válida y fiable y una valoración de la comprensión ajustada a la realidad cognitiva de los sujetos.*

Por ejemplo, las dos conexiones (α y β en la figura 4.4) claves en el modelo representacionalista de la comprensión permanecen aún sin aclarar precisamente por la dificultad que supone tratar con aspectos no observables de la cognición. Asimismo, entendemos que la realización de afirmaciones sobre la comprensión de un sujeto en base a las representaciones externas que emplea no obliga necesariamente a considerar β y α .

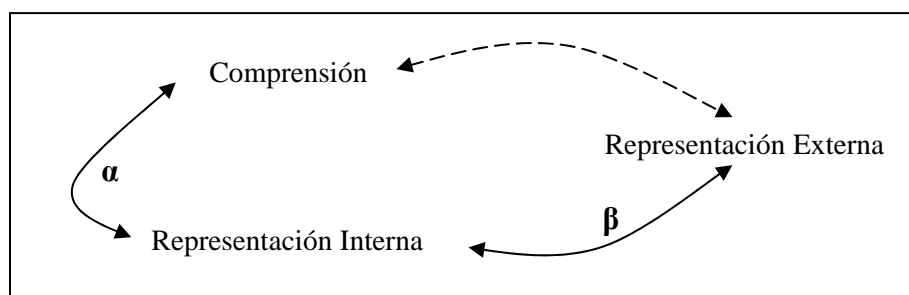


Figura 4.4.- Elementos y relaciones intervinientes en la relación comprensión-representación según la visión representacionalista.

En consecuencia:

[C₁₁] *El diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático se presenta en la propuesta representacionalista como una cuestión especialmente crítica y débil que puede ser superada con enfoques operativos basados, entre otros aspectos, en las características del conocimiento matemático y en el acercamiento permanente a la realidad.*

Tomando en consideración algunos de los supuestos y sugerencias recogidos en trabajos previos, nos decantamos como modo de proceder por una propuesta de

valoración de la comprensión del conocimiento matemático que contemple entre sus directrices las siguientes observaciones:

- En primer lugar:

[C₁₂] *Interesa una aproximación que dirija la atención fundamentalmente hacia la observación, diagnóstico y posterior valoración de la comprensión del conocimiento matemático. En cambio, no consideramos oportuno entrar en posibles comparaciones entre la comprensión del alumno en un nivel dado y la supuesta comprensión deseable que debiera tener en ese mismo nivel, que generalmente estaría fijada por la institución escolar de acuerdo a unos criterios poco claros.*

- Para poder afirmar que un sujeto comprende de algún modo o en cierto grado un determinado conocimiento matemático, se requiere de su parte un uso consciente e intencionado de ese conocimiento. Este uso podrá ser diferente y en cada caso dependerá de la situación problemática a la que se esté enfrentando por lo que la determinación de campos situacionales cobra en este punto especial importancia, siendo la referencia a tomar las estructuras epistemológicas y fenomenológicas asociadas al conocimiento matemático. Si bien estas estructuras quedan determinadas en parte gracias al conocimiento de algunos expertos, se completan también con otras fuentes.

En definitiva:

[C₁₃] *Nos parece acertado tomar al propio conocimiento matemático como punto de partida desde el que desarrollar el proceso de valoración. Los análisis epistemológicos y fenomenológicos que defendemos nos van a proporcionar una cierta garantía de objetividad, suficiente en nuestra opinión, para las interpretaciones de lo observado en los sujetos. A su vez, el grado de objetividad de estas interpretaciones será la base para sustentar la validez de las conclusiones obtenidas y, en general, de la aproximación.*

Al mismo tiempo:

[C₁₄] *Reconocemos que el desarrollo de análisis epistemológicos y fenomenológicos asociados a conocimientos matemáticos específicos, como opción metodológica, no garantiza, como tampoco lo hacen las demás, la plena objetividad o absolutividad en la valoración.*

Aceptada la limitación, la preocupación ha de centrarse en el problema del establecimiento de tipologías de tareas y situaciones vinculadas al conocimiento matemático con las que determinar, en una etapa posterior, categorías de respuestas caracterizadoras de la comprensión de los sujetos. Sin entrar en justificaciones detalladas, consideramos que este modo de proceder, con origen en las características y

propiedades del conocimiento matemático, nos permitirá operativizar algunos planteamientos teóricos².

- La construcción de instrumentos adecuados para la recogida de información es un requisito indispensable para lograr interpretaciones acertadas. Estos instrumentos surgirán, y por tanto dependerán, de los resultados obtenidos en los análisis mencionados sobre el conocimiento matemático. Al mismo tiempo, estos análisis van a sustentar la validez de constructo y el carácter exclusivo del instrumento en cuestión.

- Como investigadores:

[C₁₅] Consideramos apropiado adoptar una estrategia de valoración multifacética, en la que se haga indispensable el empleo de distintas tareas con diversos formatos para llegar a valorar la comprensión de los diferentes aspectos inherentes al conocimiento.

Cada una de estas tareas ha de diseñarse con la intención de obtener a través de ella indicios sobre la comprensión de aspectos específicos particulares del conocimiento matemático elegido. En la obtención de resultados, la valoración que se desprende de estas tareas resultará exclusiva y dependerá de las características (formato, tipo, rango de respuestas, entre otras) de cada una de ellas.

- Por otra parte, entendemos que lo que realmente se hace al valorar aquello que los sujetos comprenden, mediante la observación y análisis de acciones externas realizadas en intentos por resolver distintas situaciones problemáticas, es un ejercicio de comprensión de una serie de acciones humanas impregnadas de subjetividad. En consecuencia:

[C₁₆] Lo que realmente se persigue con el diagnóstico y evaluación del conocimiento matemático es comprender lo que los sujetos comprenden acerca de ese conocimiento matemático, circunstancia que provoca que la valoración se muestre necesariamente limitada. Esta última frontera impuesta habría que entenderla como una consecuencia relevante a considerar en cualquier propuesta de valoración.

De igual manera, conviene subrayar que una valoración limitada no debe interpretarse necesariamente como inadecuada y por ello no hemos de desistir del empeño de ir describiendo una situación de comprensión en los sujetos cada vez más ajustada a una realidad por ahora desconocida.

- Somos partidarios de emplear distintos tipos de instrumento de recogida de información al objeto de completar lo más posible el perfil de comprensión en los sujetos. No obstante, la justificación del empleo conjunto de diferentes métodos e instrumentos de valoración no proviene de la simple complejidad de la comprensión. La

² En el capítulo V expondremos con detenimiento el sentido dado al análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático, junto con los detalles de la opción metodológica comentada aquí.

decisión dependerá más bien de las peculiaridades de las tareas que se consideren apropiadas para presentar a los alumnos. Esto es, en nuestra opinión, se deben emplear distintos métodos de diagnóstico cuando las situaciones que dan sentido al conocimiento así lo exijan. Los estilos de las pruebas y los tipos de tareas también provienen y están condicionados por la epistemología y fenomenología del conocimiento a evaluar.

En resumen:

[C₁₇] *La distinción en el ámbito de la comprensión entre lo observable y lo inobservable; la conveniencia de reflexionar sobre la correspondencia existente entre las manifestaciones empíricas mostradas por el sujeto y lo que realmente sucede en el interior de su mente; la importancia del conocimiento matemático y de su uso por parte del individuo en la evaluación³; y la consideración del análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático como elemento que posibilita la elección de situaciones para la elaboración de instrumentos de observación adecuados, son algunos de los puntos con los que nos sentimos plenamente identificados.*

4.8.3 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales

- Toda aproximación al fenómeno de la comprensión en Educación Matemática debería respaldar sus planteamientos teóricos con resultados empíricos extraídos de conocimientos matemáticos concretos. Por otra parte, en los estudios analizados sobre comprensión, de un lado, y en torno al cálculo aritmético elemental, de otro, no se encuentran ejemplos que traten en profundidad la comprensión del algoritmo estándar escrito del producto. Estas consideraciones justifican:

[C₁₈] *La conveniencia de elaborar una aproximación a la comprensión del conocimiento matemático concretada en el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, por cuanto nos garantizaría la operatividad de la propuesta y el aporte de nueva información sobre aspectos de la comprensión del método de cálculo hasta ahora no examinados.*

- En la comprensión de un conocimiento matemático intervienen numerosos factores, siendo uno de ellos la institución escolar en la que participa el sujeto (Díaz-Godino, 2000). Otros son las experiencias no escolares del sujeto con el objeto de comprensión, las capacidades cognitivas de éste o la propia naturaleza del conocimiento matemático, tal como venimos señalando. En el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, hemos de admitir que su comprensión estará condicionada por la decisión de incluir dicho método de cálculo como contenido del currículum de matemáticas para Primaria, por la forma en la que aparece en los libros de texto y por cómo se enseña a los alumnos. Todos ellos son factores externos al propio

³ Los usos no serán meras aplicaciones independientes del conocimiento, sino constituyentes de su propia existencia e indicadores de su presencia en los sujetos.

proceso mental que tiene lugar en el individuo por lo que convendrá tenerlos presentes como condicionantes que influyen en la comprensión del algoritmo.

- Por otro lado, la condición de tópico escolar del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, plantea la duda de si el campo de problemas desde donde observar la comprensión se reduce únicamente a las tareas que aparecen en los libros de texto o que son sugeridas por el profesor. Sobre esta cuestión, somos de la opinión de que:

[C₁₉] No debemos restringir la observación de la comprensión del algoritmo al reconocimiento por parte del sujeto de las situaciones de uso que sólo se consideran en la escuela, sino que también hemos de tener en cuenta otras que siendo adecuadas no se contemplan suficientemente en esta institución.

La resolución de multiplicaciones con cifras desconocidas o la justificación de algoritmos alternativos son claros ejemplos de ello, tal como se ha expuesto en el capítulo III.

De forma general, considerar la comprensión de un sujeto en relación con una institución de referencia puede dar lugar al establecimiento de criterios artificiales con los que dictar lo que debiera ser comprendido y cómo debiera serlo en un nivel concreto. En este caso, se corre el riesgo de entrar a valorar la bondad de la comprensión de un sujeto a partir de criterios difícilmente justificables establecidos por instituciones diversas.

CAPÍTULO V

UNA APROXIMACIÓN OPERATIVA AL DIAGNÓSTICO Y LA EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO¹

5.1 Introducción

Según se ha puesto de manifiesto en el capítulo anterior, aunque la comprensión sea objeto de interés creciente en Educación Matemática, los avances producidos hasta el momento no se corresponden con los esfuerzos dedicados a su estudio. Como se ha señalado, la elevada complejidad de este fenómeno pone al descubierto la insuficiencia y las limitaciones de las aproximaciones más recientes y reclama la necesidad de adoptar enfoques más operativos y menos preocupados por explicaciones “a priori” acerca de su naturaleza y funcionamiento interno. En tal sentido se presentan aquí las líneas generales de una aproximación centrada en los efectos observables de la comprensión, que tiene en cuenta los diferentes aspectos vinculados a ella, que utiliza el análisis de comportamientos y respuestas adaptadas a situaciones expresamente planificadas para ello y que trata de integrar los distintos puntos de vista existentes.

El punto de partida que hemos adoptado es la revisión de antecedentes que se expone en los capítulos II y III y el análisis didáctico que se presenta en el capítulo IV. De una primera reflexión sobre los trabajos mencionados nos surge la siguiente cuestión epistemológica: ¿admite solución el problema de la comprensión del conocimiento? En términos similares, ¿es posible elaborar una teoría coherente y plausible que explique y regule todos los aspectos vinculados a la comprensión? Hoy por hoy, parece ser que no existe tal teoría, pero, ¿llegará a elaborarse en un futuro?; es decir, ¿todos los esfuerzos realizados hasta el momento, sin duda valiosos, obtendrán una recompensa futura en forma de explicación completa del fenómeno de la comprensión?

La situación en el campo de la Educación Matemática no es diferente a la de otras áreas, es decir, no existe una posición consolidada, aceptada por la mayoría de investigadores sobre el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, lo que explica que se encuentren pocas argumentaciones sólidas sobre la idoneidad de los distintos enfoques existentes. Por otra parte, hay desacuerdo en cuanto al sentido de las respuestas a las preguntas formuladas arriba. De un lado, debido a la cantidad de

¹ Utilizaremos preferentemente la expresión *objeto o conocimiento matemático* en lugar de *concepto matemático* (Vergnaud, 1997). Es nuestra intención abarcar el máximo de entidades matemáticas para las que también es posible estudiar la comprensión que de ellas poseen los sujetos, pero sin caer en ambigüedades terminológicas. Así, entre los conocimientos matemáticos tienen cabida los conceptos, procedimientos, teoremas, definiciones, propiedades, demostraciones, aplicaciones y razonamientos.

estudios desarrollados sobre el fenómeno de la comprensión, podríamos concluir que en un futuro no muy lejano se llegará a elaborar una teoría de la comprensión ajustada a la realidad. De otro lado, son diversas las posiciones que surgen desde la historia y epistemología de la ciencia en contra de tal posibilidad, como es el caso de Feyerabend (1991), cuando afirma:

“[...] no puede existir ninguna teoría de la razón, del conocimiento ni de entidades similares y ¿por qué? Porque la razón está formada por acciones imposibles de prever, a menos que se encuentren limitadas por medidas totalitarias” (p. 120).

Sea como fuere, lo cierto es que la filosofía de la ciencia nos muestra a través de autores como Kuhn, Lakatos o el propio Feyerabend, que las teorías científicas no son absolutas ni definitivas. En ellas suelen producirse sucesivas y, a veces, profundas modificaciones y reestructuraciones causadas por los continuos debates a los que son sometidas y que, a la postre, las hacen evolucionar. Esta circunstancia, trasladada al ámbito de la comprensión, nos hace pensar que quizás nunca se llegue a desarrollar una teoría que resuelva de modo concluyente el problema de conocer el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático y, por tanto, el de orientar adecuadamente en tal sentido y de forma fundamentada, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Si ello fuera así, a lo más que podría aspirar un investigador es a proporcionar aproximaciones teóricas que admitan alguna contrastación empírica; lo cual, por otra parte, es lo que ha venido sucediendo hasta ahora. Esta es la razón fundamental por la que nuestro trabajo debe ser entendido como una aproximación más; como tal, presentará deficiencias y limitaciones que deberán ser superadas mediante sucesivas reelaboraciones cada vez más cuidadas y completas en un proceso continuo cuyo final no nos aventuramos a pronosticar.

En este capítulo se desarrollan las bases y supuestos teóricos y metodológicos que configuran la aproximación que proponemos para abordar el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En concreto, en el apartado 5.2 se exponen los fundamentos y principios generales sobre cognición, matemáticas, comprensión y diagnóstico y evaluación que sustentan la propuesta. A continuación, en el apartado 5.3, se detallan las bases teóricas y las características específicas del modelo para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En el apartado 5.4, por su parte, se desarrollan las bases metodológicas que caracterizan a la propuesta. Por último, en el apartado 5.5, se recopilan a modo de síntesis las ideas fundamentales de la aproximación presentada.

5.2 Fundamentos y principios

La propuesta que se presenta en este capítulo para tratar el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático se sustenta en unos principios generales sobre la cognición, el conocimiento matemático, la comprensión en general y su diagnóstico y evaluación que condicionan y justifican parcialmente el desarrollo teórico posterior expuesto en los siguientes apartados.

5.2.1 Cognición

La aproximación que se presenta parte de las ideas constructivistas de Piaget sobre la génesis del conocimiento así como de los principios que caracterizan el denominado constructivismo radical (Von Glasersfeld, 1987; Ernest, 1994), es decir:

(1) El sujeto no recibe el conocimiento de un modo pasivo sino que participa activamente en su construcción. Desde esta perspectiva epistemológica, el conocimiento no se contempla como un producto transferible ni la comunicación como un vehículo para transportarlo. Más bien, conocimiento y competencia son vistos como productos de la organización conceptual del sujeto y de la experiencia individual.

(2) La función de la cognición no es la de describir una realidad ontológica externa al sujeto, puesto que no es posible afirmar nada acerca de la existencia de un mundo más allá de la propia experiencia del individuo. Más bien, su función consiste en construir estructuras cognitivas o conceptuales con las que resolver los problemas que surgen de la propia experiencia del sujeto en su constante interacción con el medio.

“Lo que determina el valor de las estructuras conceptuales es su adecuación experiencial, su bondad para encajar con la experiencia, su viabilidad como medio para la resolución de problemas, entre los cuales está, por supuesto, el problema interminable de organización consistente que llamamos comprensión” (von Glasersfeld, 1987, p. 5).

De este segundo principio se extrae como consecuencia el hecho de que, al estar el conocimiento limitado por las experiencias, no es posible lograr un último conocimiento verdadero sobre las cosas del mundo o sobre dominios como las matemáticas.

No obstante, el ajuste a estos principios “radicales” no es total. Así, entendemos que la construcción de conocimientos no sólo es resultado de procesos cognitivos internos y privados que tienen lugar al margen del entorno, sino que también se explica, en parte, por la existencia de una componente sociocultural, un factor “externo” ligado a la faceta convencional y al carácter compartido del conocimiento matemático, que impregna la fenomenología y condiciona las experiencias correspondientes. Siguiendo a Ernest (1994), *“el constructivismo tiene necesidad de acomodar la complementariedad entre la construcción individual y la interacción social”* (p. 11).

En nuestra aproximación a la comprensión la componente social y cultural aparece reflejada al hablar del medio como uno de los elementos condicionantes de la experiencia, se muestra a la hora de analizar los distintos fenómenos y situaciones que dan sentido al conocimiento matemático y está presente en la idea compartida de que el conocimiento matemático expuesto en el aula es un conocimiento social-convencional surgido de la cultura en la que estamos inmersos.

Ahora bien, tampoco aceptamos en su totalidad los principios del constructivismo social tal y como lo entiende Ernest (1994), por una cuestión de énfasis. De hecho, nuestro enfoque no insiste tanto, frente a la actividad cognitiva del sujeto aislado, en la interacción social y en la naturaleza esencial del lenguaje (en su faceta de medio de comunicación interpersonal) como constitutivos del aprendizaje. Por el contrario,

preferimos situarnos en una perspectiva integradora concediendo importancia a todas las interacciones posibles del sujeto con el medio que le rodea.

Por otra parte, la construcción de conocimientos no es una labor que siempre pueda realizar el individuo por sí mismo, con plena autonomía y sin necesidad de ayuda alguna. Antes bien, se necesita con frecuencia de ciertos apoyos externos como los que proporcionan, por ejemplo, el profesor o los libros de texto en el medio escolar, lo que nos lleva a considerar también en nuestros planteamientos los principios y supuestos de la perspectiva constructivista propuesta por Arcavi (1995).

5.2.2 Matemáticas

La aproximación adoptada también parte de una concepción particular sobre el conocimiento matemático, por lo que creemos necesario señalar en lo que sigue los supuestos básicos correspondientes a las matemáticas que sostienen dicha propuesta.

Nuestras ideas en torno al conocimiento matemático se identifican con algunas de las posiciones epistemológicas consolidadas en los últimos tiempos (De Lorenzo, 2000). Sin entrar en detalles, reconocemos la triple faceta de la matemática como actividad (individual y social) de resolución de problemas, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado (Díaz-Godino y Batanero, 1994). Asimismo, compartimos la tesis de Cañón (1993) acerca de la naturaleza de los resultados matemáticos:

“Los resultados de la Matemática son producción cultural, en tanto que son resultado del quehacer humano, y en ese mismo sentido, son relativos a un contexto socio-histórico. Pero este tipo de producción cultural es siempre susceptible de ser expresado en un lenguaje regido por leyes independientes de las culturas o contextos donde se generó” (p. 402)

En la misma línea, consideramos al conocimiento matemático como un conocimiento incompleto, parcialmente construido, perfectible, dinámico, en continua evolución, cuya creación/descubrimiento se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la hacen posible: las características comunes de la mente humana, del medio y de la interacción entre ambos (González, Pascual y Flores, 1994).

Conviene subrayar, sin embargo, que el conocimiento matemático es empleado en la aproximación como una entidad ya establecida, estática y de referencia, sobre la que se pretende estudiar la comprensión que de ella manifiestan los individuos. Esto es, nos interesa contemplar el conocimiento matemático desde la perspectiva del sujeto cognoscente con aspiraciones de comprensión. De hecho, partimos de una situación en la que existe, por un lado, un conocimiento matemático delimitado y definido de antemano, producto de una actividad humana histórica, y por otro, un individuo concreto cuya comprensión sobre ese conocimiento matemático queremos valorar. Tal disposición da lugar a que consideremos la posibilidad de establecer para cada conocimiento matemático (concepto, procedimiento, teorema, propiedad, definición, etc.) dos estructuras fundamentales asociadas que determinan su naturaleza y existencia:

(a) Una *Estructura Epistemológica*, que parte del análisis sobre la propia naturaleza interna del conocimiento matemático seleccionado.

(b) Una *Estructura Fenomenológica*, que surge de considerar el conocimiento matemático en relación con las distintas situaciones en las que participa, tiene sentido o se hace legítimo su empleo de algún modo como medio que contribuye a la obtención de las posibles soluciones.

Ambas estructuras determinan de forma única cada conocimiento matemático, permitiendo establecer a su vez diferencias entre ellos. Como bien puede observarse, surgen de una labor de búsqueda y análisis de información sobre el conocimiento matemático y quedan constituidas al margen de cualquier sujeto con pretensiones de comprensión. Asimismo, van a proporcionar el soporte necesario para operativizar la propuesta teórica de acercamiento al fenómeno de la comprensión.

La consideración conjunta de las Estructuras Epistemológica y Fenomenológica, en concreto de las relaciones entre conocimientos matemáticos y situaciones que le dan sentido, nos permite elaborar a modo de mapa fenómeno-epistemológico una red tridimensional de nodos conectados entre sí, donde cada nodo representa un conocimiento matemático o una situación asociada. Dicha red estará centrada en el conocimiento matemático seleccionado para su estudio, que ocupará una posición privilegiada en cuanto a conexiones con el resto de nodos. El esquema de la figura 5.1 representa el caso concreto del conocimiento C_0 conectado a nivel fenómeno-epistemológico con conocimientos C_i próximos y situaciones S_i asociadas. La complejidad de la red dependerá del conocimiento al que se dirige la atención.

Tanto las situaciones asociadas como los conocimientos matemáticos vinculados directamente pueden servir como intermediarios entre el conocimiento en estudio y otros conocimientos matemáticos más alejados en la red, facilitando de este modo la conexión indirecta y el acceso a posibles relaciones entre ellos.

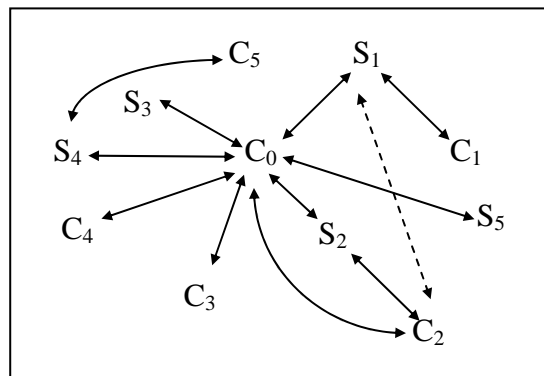


Figura 5.1.- Posición relativa de conocimientos matemáticos C_i en relación con situaciones S_j que les da sentido.

5.2.3 Comprensión

5.2.3.1 Aproximación general

Como se expone con más detalle en los apartados que siguen y en el resto del capítulo y dentro del amplio marco que venimos describiendo, concebimos la comprensión como un mecanismo básico de respuesta relacionado con una capacidad esencial de la mente humana para gestionar su interacción con el medio y regular el

propio equilibrio cognitivo. Dicho mecanismo tiene que ver con los procesos de adaptación y, consecuentemente, con los efectos del aprendizaje y las experiencias sobre la cognición y, en nuestro caso particular, sobre la manera de ver e interpretar el conocimiento matemático como parte de la realidad.

A pesar de la concreción de las manifestaciones anteriores, creemos que una aproximación completa al fenómeno de la comprensión debe tener en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos: naturaleza, origen, funcionamiento, fuentes, evolución, efectos, diagnóstico y evaluación. En este sentido, creemos que otros modelos conocidos son aproximaciones parciales; estudian con cierto detenimiento algún aspecto relevante pero prestan poca atención, o dejan al margen, a otros igualmente importantes. Veamos a continuación las ideas que manejamos sobre dichos aspectos, en el bien entendido que sólo se trata de referencias provisionales para guiar el estudio empírico y no de conjeturas a contrastar directamente.

5.2.3.2 Origen y fuentes

Situamos el origen de la comprensión en las situaciones de desequilibrio cognitivo en las que se ve implicado el sujeto en su interacción con el medio. Las fuentes se encuentran en las experiencias que dichas situaciones generan y que obligan al sujeto a elaborar respuestas² adaptadas³ a cada situación particular. En dicha elaboración intervienen tanto las nuevas informaciones proporcionadas por la propia situación como el bagaje de capacidades y conocimientos previamente adquiridos por el sujeto.

De forma más concreta, en toda experiencia vivida por el sujeto existen elementos que le plantean, directa o indirectamente, determinadas exigencias o desequilibrios que ha de satisfacer o estabilizar. Estas experiencias, generalmente buscadas o provocadas por el propio sujeto motivado por unos fines concretos que pretende alcanzar, le exigen elaborar respuestas ajustadas a la situación que está viviendo para de este modo poder regresar a su situación natural de equilibrio inicial. Es en este espacio de experiencias, desequilibrios cognitivos, respuestas adaptativas y búsqueda de estabilidad donde germina la comprensión.

Las experiencias pueden ser externas o internas. En el primer caso, distinguimos dos tipos:

- Experiencia externa del sujeto con otros sujetos (comunicación verbal o escrita en tiempo real, intercambio directo de información a través del lenguaje).
- Experiencia externa del sujeto con algún objeto físico (acciones manipulativas, empleo de utensilios).

En cuanto a las experiencias internas, éstas tienen lugar en la mente del sujeto cuando trabaja con representaciones mentales, la mayoría de ellas construidas a partir de experiencias externas vividas previamente (reflexión mental interna). La comprensión adquirida por un individuo a través de sus experiencias externas puede ser objetivamente percibida y constatada por un observador. En cambio, la información

² Responder no se considera sólo en el sentido de hacer algo, sino también en el de adoptar una posición, iniciar o concluir un razonamiento, relacionar, reflexionar, configurar una actitud, etc.

³ En el mismo sentido que emplean Piaget et al. (1981) el término “adaptación”, básicamente como proceso destinado a compensar perturbaciones exteriores con el fin de completarlas o mejorarlas, dando lugar a la construcción de nuevos posibles y la ampliación del medio.

obtenida de las experiencias internas no se puede estimar puesto que proviene exclusivamente de la mente del sujeto.

Las experiencias pueden ser clasificadas también en conscientes e inconscientes; provocadas y fortuitas.

Entre todas las experiencias y situaciones en las que se ve involucrado el sujeto y a las que, en mayor o menor medida, necesita dar una respuesta adaptada y “estabilizadora relativa”, se encuentran las que se producen en el medio escolar y, en particular, las que tienen que ver con los conocimientos disciplinares o con materias escolares como las matemáticas.

5.2.3.3 *Naturaleza y funcionamiento*

La cuestión de cómo se produce la comprensión (funcionamiento) está estrechamente relacionada con el problema de su naturaleza. En principio, creemos que la concepción fundamental de la comprensión como conexión entre representaciones generadas en procesos mentales aislados es bastante restringida y no refleja adecuadamente el hecho incuestionable de que también intervienen aspectos sociales y culturales (Díaz-Godino, 2000) así como la naturaleza del conocimiento. Aún así, la consideramos provisionalmente válida como interpretación teórica que proporciona ideas de carácter general para comenzar a trabajar.

Por otra parte, coincidimos con Duffin y Simpson (1997) en señalar que la comprensión se puede manifestar en forma de *acto* (respuesta puntual que conduce a una modificación cualitativa en la situación cognitiva), de *proceso* (sucesivas experiencias relacionadas con un mismo problema a lo largo de un período de tiempo, proceso de maduración o de elaboración de respuestas provisionales cada vez más adaptadas)⁴ o de *estado* (conjunto de respuestas potenciales a una situación o fuente de respuestas adaptadas a experiencias o situación cognitiva resultado de actos y procesos de comprensión previos).

En cuanto al funcionamiento, la comprensión depende de las experiencias y los tipos de respuestas adaptadas⁵ en torno al objeto de comprensión. Parece lógico pensar que a mayor cantidad y variedad de experiencias adaptativas, mayores serán las posibilidades de una mejor y más completa comprensión.

5.2.3.4 *Factores*

De las ideas expuestas sobre el origen y las fuentes de la comprensión se deduce fácilmente que ésta dependerá una vez más de las experiencias que tenga el sujeto que comprende con el objeto de comprensión. Si estas experiencias son limitadas, la comprensión es limitada; si son condicionadas, la comprensión es condicionada; si son variadas y ricas, la comprensión es rica y más completa que si son repetitivas y sesgadas o pobres. En este sentido, con vistas a desarrollar la comprensión de un determinado

⁴ Se puede afirmar, en términos similares a los empleados por Sierpinska (1990), que la comprensión es un proceso plagado de etapas caracterizadas por múltiples actos de comprensión. Los diferentes actos y procesos de comprensión en un individuo devienen, a su vez, en estados o situaciones puntuales de comprensión.

⁵ Caracterizadas por la existencia de desequilibrios cognitivos y la participación activa del sujeto para superarlos.

conocimiento conviene que los sujetos tengan el mayor número y variedad posible de experiencias externas e internas relacionadas con ese conocimiento.

Las experiencias van a estar condicionadas, a su vez, por tres elementos:

- *El objeto de comprensión* implicado en las experiencias determina la naturaleza y características de éstas. Así, entendemos que las experiencias de un individuo con un conocimiento matemático difieren notablemente de las que puede tener con un conocimiento de tipo social-convencional. La especificidad del objeto a comprender constituye en este punto un factor clave en la comprensión del sujeto.

Además, las experiencias relacionadas con un conocimiento dependen de la utilidad de ese conocimiento para el individuo que lo emplea. Al final, si una destreza, una información o una relación no se utiliza o se utiliza poco la comprensión puede quedar relegada a un segundo plano o incluso llegar a desaparecer.

- *El sujeto que comprende*: La valoración personal que hace el sujeto del objeto de comprensión determina su importancia y necesidad, siendo un factor que influye en la búsqueda y producción de experiencias y situaciones vinculadas al objeto en cuestión. De este modo, un conocimiento que sea de vital importancia para el individuo garantizará un número y variedad de situaciones y experiencias muy superior al que podría proporcionar un conocimiento de interés limitado.

Tomando de referencia a Sierpiska (1994), también consideramos que la *intención* del individuo por comprender y la *atención* prestada constituyen condiciones necesarias para la comprensión, aunque no suficientes.

Las capacidades cognitivas generales del sujeto es otro aspecto que condiciona la aparición de experiencias y el desempeño ante las mismas. No obstante, el grado de influencia que estas capacidades generales ejercen sobre la comprensión específica de un conocimiento (matemático) es una cuestión abierta todavía pendiente de estudio. Webb (1992), por ejemplo, es consciente de tal influencia pero no aporta ninguna información sobre el tipo de relación concreta que se establece entre comprensión y destrezas cognitivas generales.

- *El medio de interacción sujeto-objeto*: Las circunstancias, recursos, tareas, instituciones y entornos (social, natural, cultural), provocan las experiencias y ponen en contacto los dos elementos anteriores, facilitando o impidiendo que el sujeto acceda, reconstruya, descubra o, en definitiva, comprenda el conocimiento. Una experiencia del mismo tipo o incluso una misma experiencia no producirá la misma comprensión en el mismo sujeto si se desarrolla en una sociedad hostil o en un entorno familiar conocido y más cercano.

De entre todos los medios, el escolar ocupa una posición destacada en lo que respecta a la transmisión del conocimiento matemático; por este motivo, le prestamos una atención especial.

5.2.3.5 Evolución

Los conocimientos no se adquieren de forma inmediata e instantánea sino que se van desarrollando en el sujeto a lo largo del tiempo. La comprensión no es un fenómeno estático, sino que emerge, se desarrolla y evoluciona (Carpenter y Lehrer, 1999). Admitimos, además, una tendencia ascendente en el desarrollo de la comprensión por lo

que nos identificamos en este punto concreto con modelos como el trifásico propuesto por Sfard (1991) o el secuencial de Resnick (1992).

En el caso de los conocimientos matemáticos, al igual que Pirie y Kieren (1994) defendemos la idea de una evolución no unidireccional con sucesivos avances y retrocesos en un proceso dinámico, continuo y, a priori, sin límites. En principio, si se desea y se dan las circunstancias apropiadas para ello, siempre quedará la posibilidad de poder ampliar y profundizar la comprensión sobre un determinado conocimiento matemático. La complejidad de esta evolución, con tendencia final global positiva, dificulta la tarea de construir modelos válidos para cualquier conocimiento matemático. Una vez más, las experiencias con el objeto de conocimiento son condición necesaria, aunque no suficiente, para que se produzca la evolución en la comprensión.

5.2.3.6 Efectos y resultados

Se puede decir que los mecanismos asociados a los fenómenos de comprensión producen en el individuo efectos tanto observables como no observables. Entre los primeros podemos citar: comportamientos adaptados, aplicación de conocimientos, facilidad para los aprendizajes o ser buen resolutor de problemas. La explicación⁶ (en su formato verbal y escrito) también la interpretamos como efecto observable de la comprensión, que depende del lenguaje. Es considerada como una evidencia o manifestación externa de la comprensión que suele llevar consigo numerosas conexiones (explícitas e implícitas) entre el conocimiento que posee el sujeto y la situación problemática a la que se enfrenta.

Entre los efectos no observables podemos mencionar: nuevos conocimientos y redes de conocimientos, nuevas estructuras cognitivas, nuevas capacidades, nuevas destrezas, nuevas formas de “ver” las situaciones, nuevas estructuras semánticas; la mayoría de ellos sólo se pueden constatar mediante inferencia a partir de los datos que proporcionan los efectos observables.

Hemos de subrayar en este punto que cualquier caracterización que se proponga para determinar cuándo comprende un sujeto un determinado conocimiento, debe incluir términos propios del conocimiento que se esté considerando. En Pirie y Kieren (1994) encontramos un ejemplo desde el ámbito de la Educación Matemática donde ha sido imposible una caracterización de este tipo al haber presentado como válida para cualquier tópico matemático una teoría sobre la evolución de la comprensión. Estos autores no dejan claro cuándo poder afirmar que un individuo comprende un conocimiento matemático. Sólo se limitan a describir la evolución de la comprensión a través de los niveles que ellos mismos fijan⁷.

5.2.4 Diagnóstico y evaluación de la comprensión

Poder diagnosticar y valorar de una manera precisa y correcta el conocimiento matemático que posee un sujeto en un momento determinado es un problema ampliamente reconocido en Educación Matemática.

⁶ Aceptamos la posibilidad de una comprensión sin explicación, aunque no a la inversa. De hecho, la adecuada explicación dada en una situación pone de manifiesto una comprensión por lo general elevada al requerir del sujeto un grado considerable de conciencia y explicitación.

⁷ Ver apartado 2.4.3.3 del capítulo II para una información más amplia sobre el trabajo de estos autores.

Sin embargo, como adelantábamos en el apartado 4.6.2.3 del capítulo IV, propuestas como la que defiende una valoración de la comprensión basada en el análisis de representaciones mentales plantea problemas. Así, resulta difícil evaluar las representaciones internas de los conocimientos matemáticos; se podrá, en todo caso, obtener información detallada de lo que realizan o manifiestan los sujetos, pero no de lo que sucede en sus mentes. Por este motivo, entendemos que es más factible y apropiado limitar la evaluación a las manifestaciones externas, en términos de “registros objetivos”, y considerar las interpretaciones sobre las características internas como conjeturas provisionales y siempre aproximadas a la situación real.

Desde nuestra perspectiva, admitimos que para observar el estado de la comprensión de un individuo sobre un objeto, es necesario ponerlo en disposición de emplear todas las herramientas, capacidades y conocimientos a su alcance sobre dicho objeto para responder a situaciones especialmente preparadas para ello. En concreto, deben ser situaciones y tareas para cuya resolución se necesite emplear, precisamente, el conocimiento cuya comprensión queremos observar. Asimismo, es fundamental que consigan implicar al sujeto (que éste “haga suya la actividad”)⁸ y que demanden respuestas con las que podamos asegurar que se comprende de algún modo el conocimiento en cuestión. Para ello, es necesario que la tarea o situación propuesta sea específica, sencilla de entender, sin distractores, de respuesta controlada, atractiva para el resolutor, a ser posible lúdica, preferiblemente un verdadero problema y de una dificultad media dentro de las de su misma especie.

Además de esto, se ha de evitar la posibilidad de que los sujetos puedan responder adecuadamente por casualidad y sin que realmente dominen o comprendan lo que se pone en juego. Para ello sugerimos emplear dos estrategias: (a) diseñar las situaciones, tanto en número como en forma, procurando evitar en lo posible la posibilidad mencionada; (b) complementar los estudios cuantitativos con estudios cualitativos como medio para comprobar que las respuestas dadas se ajustan a la situación real de comprensión que poseen los sujetos, es decir, se verifica empíricamente que no ha sucedido un desfase significativo en la comprensión.

5.3 Responder adecuadamente es un síntoma de comprensión: un modelo para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático

5.3.1 Descripción general

A diferencia de los modelos elaborados para explicar los aspectos estáticos y directos de la comprensión (naturaleza, características, estructura, tipos), consideramos que los centrados en los aspectos dinámicos e indirectos (origen, funcionamiento, evolución, efectos) son más adecuados para la observación y contrastación empírica. De entre ellos, centraremos la atención en los efectos sobre la capacidad de respuesta adaptativa específica de los sujetos así como en los medios e instrumentos necesarios para observar dichas respuestas. En consecuencia:

⁸ Requisito que busca tanto la efectividad de los instrumentos de diagnóstico como la autenticidad de los comportamientos.

Decimos que un sujeto manifiesta una cierta comprensión en relación con un objeto concreto (conocimiento) cuando elabora y emite a su satisfacción una respuesta adaptada, centrada en dicho objeto, ante una situación de desequilibrio cognitivo que decide voluntariamente abordar.

Para ello, el sujeto tendrá que analizar la situación, valorar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia fabricando una respuesta, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de la misma a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o continuarla retomando algunos pasos del proceso. Es, en este sentido, en el que decimos que:

Comprender es sinónimo de responder o de elaborar y emitir una respuesta adaptada. Si un sujeto emite una respuesta adaptada, podemos decir que comprende en los términos de la situación o del problema propuesto. Alternativamente, si el individuo no responde o lo hace incorrectamente o la respuesta no es adaptada, no podremos afirmar nada sobre la situación de su comprensión por desconocer los verdaderos motivos de ese proceder⁹.

Por otra parte, suele haber una variedad de respuestas adaptadas, más o menos completas o evolucionadas, a una situación. En otras palabras:

“Lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende”.

Según sea dicha utilización, en cuanto a alcance, diversidad, complejidad, seguridad, efectividad o disponibilidad, así será el nivel o grado de comprensión que el sujeto maneja o dispone en el momento de responder.

El término “utilizar” lo estamos empleando en esta caracterización con la misma amplitud que Duffin y Simpson (1997) atribuyen al término “hacer”, es decir, no para referirse a la realización de tareas rutinarias sino para mencionar cualquier forma de acción que pueda ser interpretada por el observador, ya sea profesor o investigador. Tampoco vemos la necesidad, en contra de lo que consideran Díaz-Godino y Batanero (1994), de introducir el apelativo de “significativo” para las acciones o prácticas. De hecho, entendemos que cualquier uso personal resultará significativo desde el momento en que el sujeto lo lleve a cabo de un modo libre y consciente.

Probablemente el individuo comprende más de lo que manifiesta mediante su comportamiento, pero nunca menos si la implicación es importante y voluntariamente decidida y el rendimiento es alto en la elaboración y valoración de la respuesta, es decir, si la utilización reúne unas condiciones determinadas, que son las que habrá que fijar claramente para alcanzar un grado de fiabilidad apreciable en el diagnóstico y la valoración de los comportamientos.

⁹ Entre otras posibilidades, un individuo que comprende puede negarse a afrontar una situación o puede actuar en privado y no manifestar la respuesta. Es por ello que resulta fundamental conseguir la implicación del sujeto en un proceso de diagnóstico de la comprensión.

Además, la comprensión de un conocimiento matemático exige del sujeto el reconocimiento de una finalidad en este conocimiento para resolver una clase de situaciones-problema. En tal sentido, entendemos que este reconocimiento de la faceta teleológica del objeto matemático se pondría de manifiesto mediante el uso consciente, libre e intencionado de ese objeto por parte del sujeto.

En este contexto, nuestra propuesta de diagnóstico y evaluación podría considerarse como un método de valoración con facetas comunes a algunos de los descritos por Webb (1992), aunque no necesariamente la incluimos en uno de los grupos establecidos. De hecho, la entendemos más bien como una propuesta híbrida, combinación de varios de los métodos descritos por el autor. Así, podríamos afirmar, siguiendo a Giménez (1997), que el modelo de evaluación que utilizamos manifiesta una cierta similitud con los *modelos conceptuales* de evaluación por cuanto reconocemos que la comprensión matemática de los individuos es de carácter local; éstos muestran comportamientos distintos dependiendo del dominio conceptual tratado. Asimismo, la propuesta comparte con los *modelos de cambio* el supuesto de que las acciones dan cuenta de la comprensión de los sujetos y que los procesos mentales de éstos se determinan a través de sus propias realizaciones.

5.3.2 Configuración de la estrategia

Dado que en la comprensión intervienen ideas y constructos inobservables, es necesario emplear una estrategia de acercamiento indirecto (estrategia empírica). Asimismo, por tratarse de un fenómeno cognitivo y educativo complejo, es conveniente contar con un cierto apoyo del análisis didáctico (González, 1998b) y, en particular, del análisis de la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático y de sus múltiples relaciones (estrategia teórica). El medio general que se emplea en el modelo coincide con el que proponen Duffin y Simpson (1997), es decir, la interpretación de comportamientos provocados ante situaciones problemáticas. La finalidad inmediata es encontrar respuestas a las siguientes preguntas: ¿es posible asegurar que un sujeto tiene una cierta comprensión de un conocimiento matemático concreto?; ¿hasta dónde comprende un individuo?; ¿de qué tipo y cuál es la calidad de dicha comprensión?; ¿cuándo (en qué condiciones) y cómo se puede averiguar esto con ciertas garantías? La finalidad a largo plazo es la de clarificar la cognición matemática para orientar adecuadamente los procesos de enseñanza-aprendizaje. No se hacen postulaciones sobre aspectos no observables sino sólo sobre relaciones entre comportamientos concretos, conocimientos concretos y fenómenos que les dan sentido, entendiendo estos fenómenos como medios privilegiados en los que interactúan el sujeto y el objeto de conocimiento.

El método específico, a diferencia de los que proponen los autores mencionados, sigue el siguiente proceso: **a)** Análisis Didáctico del conocimiento en cuestión¹⁰; **b)** delimitación lo más precisa posible de las estructuras epistemológica y fenomenológica de dicho conocimiento; **c)** elaboración a partir de ellas de una clasificación para las situaciones vinculadas al conocimiento matemático; **d)** conversión operativa de dicha clasificación: análisis sistemático y definición clara y precisa de las acciones interpretables de los sujetos; delimitación, categorización y enumeración de las

¹⁰ No exhaustivo, sino orientado a la epistemología y fenomenología en el sentido más amplio.

respuestas posibles y de los criterios de valoración¹¹; construcción de un modelo centrado en las referencias y categorías que ha de utilizar el observador para interpretar los comportamientos; **e)** construcción de los instrumentos de observación (tareas, pruebas, situaciones y protocolos); **f)** obtención de datos, categorización y valoración de respuestas y conformación de perfiles de comprensión; **g)** análisis de resultados en función del problema específico (estudio muestral, comparación, estudio causal, longitudinal, etc.). Con ello creemos que se conseguirá reducir notablemente los defectos de los instrumentos de observación y aumentar la consistencia de los estudios y la validez y fiabilidad de los resultados.

5.3.3 El papel del error

Subrayamos, en primer lugar, que el estudio del error no es la vía de acceso natural desde la que afrontamos el diagnóstico y valoración de la comprensión del conocimiento matemático. Desde la perspectiva propuesta nos preocupamos exclusivamente por las acciones externas que resultan positivas para extraer, mediante la correspondiente interpretación, resultados sobre distintos aspectos de la comprensión.

En segundo lugar, el error no lo consideramos como una fuente de información para negar la comprensión de los sujetos, tal como sucede en algunas otras investigaciones (consúltese Hiebert y Carpenter, 1992). Por tal motivo, en nuestra aproximación no desarrollamos el análisis de errores como vía negativa de acceso a la comprensión.

Ahora bien, como los errores constituyen manifestaciones observables del desempeño de los sujetos, también los hacemos participar en la determinación del tipo de comprensión que poseen, aunque esta participación bien podría entenderse como indirecta y positiva. Así, no entramos a analizar la naturaleza del error cometido ni a justificar las razones por las cuales se ha manifestado ni a valorar su presencia como algo negativo que supone ausencia de comprensión. Por el contrario, la contribución que realizan los errores y las respuestas incorrectas al diagnóstico de la comprensión la consideramos más bien positiva puesto que siempre llevan asociados un modo particular de empleo del conocimiento matemático, el cual será considerado como indicador de un tipo concreto de comprensión. De las respuestas incorrectas, o mejor dicho, de los intentos fallidos de resolución de las situaciones, también vamos a poder extraer información acerca del uso que hacen los sujetos del conocimiento matemático, en la medida en que también son manifestaciones observables. La diferencia importante entre esta perspectiva y otras aproximaciones centradas en el estudio de errores está en que el uso del conocimiento, si está catalogado como un tipo específico, siempre va a ser interpretado como una muestra positiva de comprensión del sujeto, con independencia de que ese uso lleve a una solución correcta o no.

Las respuestas incorrectas a situaciones específicamente diseñadas dejan de ser relevantes cuando se identifica un uso del conocimiento matemático que ha sido previamente catalogado e identificado como aspecto caracterizador de un tipo específico de comprensión.

5.3.4 Principales características

¹¹ En este trabajo empleamos los términos *valoración* y *evaluación* sin distinción aparente, aún siendo conscientes de que autores como Webb (1992) se preocupan por diferenciarlos, para referirnos básicamente al proceso que tiene como propósito la obtención de información, a través de la interpretación de lo observable, sobre la comprensión que poseen los sujetos de conocimientos matemáticos concretos. Quedan al margen las recomendaciones y sugerencias para una mejor enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Nuestra aproximación al estudio del fenómeno de la comprensión presenta las siguientes características:

- *Es operativa:* Las afirmaciones vendrán respaldadas por datos y resultados empíricos. No tiene sentido construir modelos descriptivos sobre algo inobservable y cuya bondad no puede ser comprobada empíricamente. En nuestra opinión, todavía no poseemos respuestas con las que satisfacer cuestiones como las siguientes: ¿cómo se puede llegar a comprobar, incluso de forma general, que la mente está organizada de tal o cual manera y que dicha estructura se configura de esta o de aquella forma? ¿Cómo se puede constatar cómo piensa efectivamente un sujeto, qué relaciones establece en cada momento y qué le lleva a tomar determinadas decisiones? ¿Cómo son en realidad las representaciones internas que construye el sujeto en su mente? ¿Existe algún esquema gráfico o simbólico fiable que muestre con claridad y precisión la organización mental interna de un sujeto respecto a un determinado conocimiento matemático?

En su lugar, es más fácil profundizar en aquellos aspectos que pueden ser observados por medio de tareas y situaciones que obliguen al sujeto a responder. Como ya hemos mencionado, a diferencia de los modelos elaborados para explicar los aspectos estáticos de la comprensión (naturaleza, características, estructura, tipos), consideramos que los centrados en los procesos dinámicos (origen y génesis, funcionamiento, evolución, efectos) son más adecuados y se prestan más a la observación y contrastación empírica de sus supuestos. Además, tal como señala Kieran (1998), “*la separación entre el trabajo empírico y teórico en investigación en educación matemática es falsa, especialmente con respecto a los modelos. En estos últimos, la línea divisoria entre los dos [tipos de trabajo] es borrosa*” (p. 213).

Se busca expresamente la facilidad para realizar valoraciones objetivas y realizar comparaciones.

- *Es indirecta:* Al igual que otros autores (Koyama, 1993; Pirie y Kieren, 1994; Duffin y Simpson, 1997; Díaz-Godino, 2000), reconocemos las limitaciones del investigador para observar de manera directa la comprensión que tiene, emplea o manifiesta un sujeto acerca de un conocimiento matemático. No obstante, ésta puede ser inferida o abordada indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas que requieren el uso de ese conocimiento matemático.

Dada la complejidad que encierra el fenómeno de la comprensión y el estado actual en el que se encuentran los conocimientos relacionados con él, consideramos más factible y adecuado afrontar la cuestión alternativa e indirecta de determinar cuándo podemos decir que un sujeto manifiesta una cierta comprensión de un conocimiento matemático concreto, extendiendo y matizando las ideas apuntadas por Duffin y Simpson (1997) sobre las manifestaciones externas de la comprensión. El estudio de este problema aportaría datos objetivos sobre comportamientos observables que se pueden analizar, categorizar y comparar en un proceso de acercamiento empírico paulatino a algunos aspectos de la naturaleza y el funcionamiento interno de la comprensión.

- *Es epistemológica y fenomenológica:* El carácter indirecto de la aproximación remite a los fenómenos, tareas y situaciones que dan sentido al conocimiento matemático en juego. Es decir, para averiguar el alcance de la comprensión hemos de

observar el comportamiento del sujeto ante situaciones que requieran o que den sentido a la aplicación concreta de ese conocimiento. Para ello, resulta necesario analizar previamente cuáles son estas situaciones y fundamentar todos los estudios de esta clase en el análisis epistemológico y fenomenológico¹² (Puig, 1997) del conocimiento matemático. Las tareas y situaciones en las que interviene el conocimiento matemático adquieren una importancia especial en nuestra aproximación a la comprensión.

Por otra parte, entendemos, al igual que Vergnaud (1990), que en ámbitos como la Psicología de la Educación Matemática resulta fundamental considerar la relación del conocimiento matemático con los problemas y situaciones que lo hacen significativo, siendo a su vez necesaria la epistemología para clarificar dicha relación¹³.

- *Es positiva*: El estudio de la comprensión en nuestro trabajo de investigación se desarrolla desde una perspectiva positiva. Por ahora, sólo proporcionamos información de lo que los sujetos comprenden y no lo que no comprenden o por qué lo comprenden o no, analizando para ello las acciones que llevan a cabo en su intento por resolver tareas problemáticas. Por tanto, el interés por la identificación de obstáculos epistemológicos, por ejemplo, queda relegado en esta aproximación a un segundo plano. Siguiendo a Sierpiska (1990), superar un obstáculo epistemológico y comprender son sólo dos formas de hablar sobre lo mismo. Así, los obstáculos epistemológicos centran su atención en las maneras insuficientes o incorrectas de conocer (punto de vista “negativo”); por el contrario, la comprensión, tal como la entendemos, dirige su atención hacia los nuevos modos de conocimiento (punto de vista “positivo”).

- *Es provisional, limitada y abierta*: Las conclusiones serán siempre consideradas provisionales. Como ya hemos señalado, el carácter de constructo inobservable, al menos de un modo directo, que posee la comprensión impide que las explicaciones y planteamientos dados sean definitivos. El diagnóstico y la evaluación deben abordarse en términos de aproximaciones sucesivas a una situación cognitiva real que nunca vamos a poder determinar con precisión. Además, no es posible completar al cien por cien el campo de situaciones donde tiene sentido el conocimiento matemático cuya comprensión nos interesa estudiar.

Por otra parte, la valoración que se haga sobre la comprensión de un conocimiento matemático concreto necesariamente habrá que considerarla abierta puesto que el conocimiento matemático en general suele sustentarse en otros conocimientos matemáticos (aspecto epistemológico) cuya comprensión no nos detenemos a estudiar de un modo directo. La propia comprensión del conocimiento seleccionado dependerá pues de la de esos otros conocimientos previos, existiendo una relación de dependencia en cuanto a la comprensión que queda a expensas de futuros estudios.

En el instante en que reconocemos que los conocimientos matemáticos no están aislados, sino relacionados unos con otros, debemos admitir que su comprensión estará condicionada por la comprensión que se tenga de esos otros conocimientos con los que se vincula, en especial con los que lo sustentan.

-*Es integradora y objetiva*: Entendemos que nuestra aproximación proporciona la doble oportunidad de:

¹² Empleado aquí con un propósito diferente al de Freudenthal (1983) o Assude (1996); como señalaremos más adelante, el objetivo principal no es la organización de la enseñanza de las matemáticas, sino el diagnóstico y la evaluación de la comprensión de un conocimiento matemático.

¹³ El problema radica precisamente en que no se suele precisar de qué forma es necesaria ni cómo hay que emplearla.

(1) situar a cada perspectiva en una posición concreta respecto a las demás, gracias al estudio de sus diferencias relativas y puntos comunes. Es decir, la aproximación que presentamos pretende servir de marco clasificador y unificador de posiciones dispares aparentemente inconexas. Pensamos que resulta necesario ordenar el campo de estudio de la comprensión del conocimiento matemático en el área de la Didáctica de la Matemática, puesto que de este esfuerzo se pueden extraer resultados no contemplados hasta ahora con los que seguir profundizando en la comprensión desde una posición más ventajosa;

(2) establecer una línea de actuación común de cara al estudio de la comprensión del conocimiento matemático que puede ser adoptada y utilizada por diferentes investigadores para distintos conocimientos matemáticos. Es una aproximación que en un principio evita apoyarse en cualquier tipo de afirmación sobre aspectos internos de la mente del sujeto, aunque éstos no son rebatidos ni descartados. En este sentido, se puede decir que es una aproximación objetiva. Asimismo, necesita de esfuerzos comunes en un trabajo que a medio y a largo plazo podría proporcionar resultados válidos sobre cada uno de los aspectos (externos e internos) relacionados con la comprensión del conocimiento matemático en general.

Los resultados y conclusiones de otras investigaciones teóricamente dispares son interpretables desde nuestra aproximación y, al integrarse en ella, aportan información adicional sobre la comprensión que también resultará útil y necesaria en alguna medida para el propósito común ya mencionado. Este es el segundo sentido en el que empleamos el calificativo de integradora para la aproximación. Pretende ser una aproximación flexible, con capacidad para asimilar y adoptar información sobre la comprensión externa a la producida por ella misma (compatibilidad).

5.4 El problema de la determinación y clasificación de situaciones

De acuerdo con la Aproximación propuesta y con la caracterización de la comprensión del conocimiento matemático en términos de utilización en respuestas adaptadas a situaciones problemáticas, el diagnóstico y la valoración requieren de un análisis situacional que se inicia con una búsqueda de todas aquellas situaciones susceptibles de poderse resolver con el conocimiento matemático en cuestión o en las que tiene sentido su utilización. Pero esta tarea no es fácil; hemos de reconocer que el universo de situaciones a describir suele ser demasiado amplio para elaborar un listado completo de las mismas, lo que aconseja y justifica plenamente la realización de una labor de análisis, categorización y selección de situaciones que organice, simplifique y haga más manejable el universo mencionado.

El análisis de situaciones que proponemos debe ser abordado, por tanto, desde una perspectiva algo diferente a la adoptada por Vergnaud (1988, 1990, 1997), quien con la introducción de la noción de campo conceptual, evidente y oportuna para otros propósitos, traslada el problema de la determinación y selección de situaciones a un ámbito de generalidad reconocido como poco operativo para la investigación¹⁴. Estamos de acuerdo con Vergnaud en que el conocimiento matemático no está aislado y que para estudiarlo no conviene obviar sus conexiones con el resto de conocimientos. Pero esto no significa necesariamente que debamos contemplar de forma global campos tan amplios como el de la estructura multiplicativa o el álgebra elemental como

¹⁴ Tómese como referencia la discusión suscitada en el Seminario de la SEIEM-1998 sobre el problema de la clasificación de las tareas de un campo conceptual.

condición necesaria para llevar a cabo cualquier labor de clasificación de situaciones. Por el contrario, consideramos factible y, sobre todo, más adecuado, focalizar la atención en el conocimiento matemático particular, aún reconociendo que en dichas situaciones también pueden estar presentes otros conocimientos matemáticos. De este modo, al realizar un seguimiento más controlado del conocimiento seleccionado a través de las distintas situaciones que le dan sentido, pensamos que se reducirá en parte el efecto de generalidad causado por la teoría de los campos conceptuales a la vez que se garantizará un mayor grado de precisión y profundidad en la valoración de la comprensión de los sujetos. Aún así, queda abierta la cuestión de determinar cual sería, si es que existe, la posición intermedia desde la que poder conjugar de forma adecuada la generalidad mencionada con las posibles restricciones surgidas de nuestra perspectiva, todo ello con el fin de afrontar con éxito la tarea de análisis y categorización de situaciones.

5.4.1 Una posible solución

La influencia de la naturaleza del conocimiento matemático en su comprensión por parte de los sujetos es una de las características fundamentales admitida por la aproximación que se presenta. De hecho, la propuesta que hacemos toma como punto de partida la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático, por lo que resulta acertada la selección de conocimientos matemáticos particulares a la hora de diagnosticar y evaluar su comprensión. Sólo a partir de los avances que se produzcan en la investigación sobre la comprensión de conocimientos matemáticos concretos pensamos que se podrán extraer en un futuro resultados y conclusiones acerca del fenómeno de la comprensión, en cierta medida válidos y generalizables a cualquier conocimiento matemático.

Bien es cierto que el hecho de que los conocimientos matemáticos no estén aislados, sino relacionados entre sí de múltiples formas, dificulta cualquier intento de clasificación de situaciones. Pero, a pesar de ello, entendemos que la decisión de centrar la atención sobre un conocimiento matemático concreto facilita el acercamiento a su campo situacional, y, sobre todo, que la consideración de las estructuras epistemológica y fenomenológica constitutivas del conocimiento seleccionado nos permite establecer unas dimensiones o categorías de situaciones utilizables desde un punto de vista práctico para el diagnóstico y evaluación de la comprensión. Así pues, la comprensión de los sujetos se valorará en términos de capacidad de enfrentar con éxito situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica.

Por otra parte, el progreso en la comprensión de un determinado conocimiento matemático supondrá avanzar por los ejes epistemológico y fenomenológico asociados a ese conocimiento. Dado que todo conocimiento matemático presenta una estructura epistemológica y fenomenológica exclusiva, la comprensión del mismo pasará por el dominio de ambas estructuras (figura 5.2).

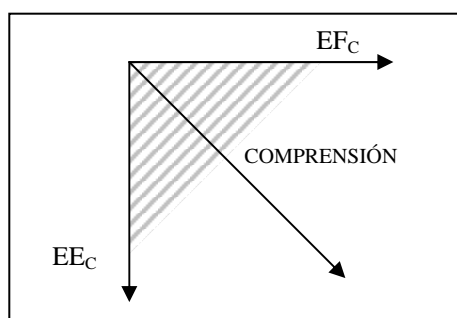


Figura 5.2.- Representación plausible del progreso en la comprensión de un conocimiento matemático C en términos de Estructuras Epistemológica (EE) y Fenomenológica (EF)

Debemos subrayar que una clasificación como la pretendida no ha de ser interpretada como un sistema exhaustivo donde tiene cabida la totalidad de situaciones posibles, puesto que siempre aparecerán "*posibilidades y singularidades impensadas o no describibles sin salirse del sistema de catalogación*" (Puig, 1998; p.108). De lo que se trata es de seleccionar las mejores situaciones para los propósitos del estudio y garantizar un cierto grado de suficiencia y representatividad en la muestra de tareas, lo que se consigue, por otro lado, mediante las fuentes consultadas para el análisis epistemológico y fenomenológico referido al conocimiento matemático elegido.

5.4.2 Análisis epistemológico

De cara al diagnóstico y evaluación de la comprensión de un conocimiento matemático particular nos interesará analizar los conocimientos que lo conforman o sustentan pues su comprensión dependerá en gran medida de ellos. Asimismo, convendrá relacionar el conocimiento matemático en estudio con aquellos otros más cercanos, en cuanto a su epistemología se refiere. En definitiva, como paso previo resultará adecuado estudiar la naturaleza del conocimiento matemático seleccionado.

Interesa subrayar que el análisis epistemológico que proponemos ha de ser actual en cuanto a la consideración del conocimiento matemático. Se entiende, por tanto, que para un mismo conocimiento matemático dicho análisis no tiene porqué coincidir con el que pudiera haberse realizado en el pasado ni con el que se llevará a cabo en el futuro. Tal aclaración la justificamos con el supuesto de que la naturaleza de los conocimientos matemáticos no es estática sino que manifiesta una continua evolución en el tiempo.

Por otra parte, consideramos especialmente relevante la cuestión referente al paso de lo epistemológico a lo cognitivo. El problema en concreto se puede resumir en los siguientes términos: ¿qué características o aspectos epistemológicos de un conocimiento matemático son realmente significativos de cara al diagnóstico y valoración de la comprensión, por ser apropiados para establecer diferencias cognitivas entre los sujetos?

Es decir, suelen existir aspectos de la naturaleza de un conocimiento matemático que no resultan interesantes desde el punto de vista de la cognición de los sujetos, puesto que no se reflejan en ellos de forma sustancialmente diferente y por tanto no son útiles para establecer diferencias en cuanto a comprensión. Otros aspectos, en cambio, sí que afectan o "dejan su huella" en los sujetos, permitiéndonos de este modo establecer diferencias cognitivas entre ellos.

En consecuencia, en el análisis epistemológico que proponemos habrá que discriminar y considerar los elementos cognitivamente influyentes de los que no lo son.

En términos generales, podemos identificar para cada conocimiento matemático las siguientes componentes:

Una sintaxis: Las diferentes representaciones externas que admite el conocimiento matemático en cuestión.

Unos conocimientos previos, constitutivos o referentes: necesarios para conformar el conocimiento matemático dado. Todo conocimiento matemático se sustenta en unos conocimientos previos, matemáticos y no matemáticos.

Unas relaciones o conexiones: internas, entre los componentes, elementos básicos o conocimientos previos constituyentes/integrantes del conocimiento matemático particular.

Los conocimientos matemáticos están relacionados entre sí a través de un vínculo epistemológico fundamental: el de participación en la construcción de otro conocimiento matemático. Así, un determinado conocimiento matemático puede intervenir en la formación de otro conocimiento más complejo, es decir, ser un elemento constitutivo de éste, y al mismo tiempo, estar constituido por conocimientos previos a los que debe su existencia (figura 5.3). Por tanto, entendemos que la mayoría de conocimientos matemáticos son constituyentes de y están constituidos por otros conocimientos matemáticos. Este vínculo nos permite contemplar a los conocimientos matemáticos como entes no aislados, sino relacionados entre sí mediante una conexión directa.

La naturaleza de la relación existente entre conocimiento constituyente y constituido dependerá de las particularidades de ambos conocimientos, de forma que aunque se considere en principio un vínculo epistemológico básico, éste presentará unas características determinadas, específicas y dependientes de los conocimientos implicados en cada caso.

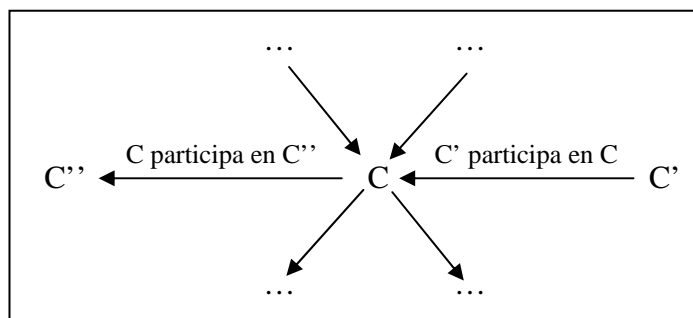


Figura 5.3.- Vínculos epistemológicos entre conocimientos matemáticos.

5.4.3 Análisis fenomenológico

Para la fase del estudio que nos proponemos abordar a continuación conviene precisar, antes de nada, el sentido y el propósito con los que vamos a emplear los términos fenomenología y análisis fenomenológico del conocimiento matemático. Para tal fin, tomaremos como referencia las ideas de Freudenthal (1983) y Puig (1997) sobre estas nociones e intentaremos a partir de ellas hacer explícitas las nuestras.

5.4.3.1 Posicionamiento respecto a Freudenthal (1983)

En principio, utilizamos el término fenomenología en el sentido de Freudenthal, como método de análisis de los contenidos matemáticos:

“Fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlos en su relación con los fenómenos para los que fueron creados y a los que han sido extendidos en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, es fenomenología didáctica,...” (p. ix)

Hemos de señalar, no obstante, que la intención del autor al realizar la descripción mencionada difiere notablemente de la nuestra. El análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. En efecto, introduce la fenomenología didáctica como alternativa al método de enseñanza basado en la exposición directa de conceptos matemáticos. Dicho método se apoya en el supuesto implícito de que el aprendizaje de los alumnos estará garantizado siempre que el profesor muestre los conceptos en el aula tal como son, a través de caracterizaciones o definiciones. En esta labor, el profesor puede ayudarse de concretizaciones o ejemplificaciones del concepto en cuestión, aunque ésta es una opción secundaria y siempre posterior a la presentación ostensiva. La propuesta de Freudenthal, por el contrario, consiste en comenzar por los fenómenos que solicitan ser organizados y desde aquí enseñar al alumno a manipular los correspondientes medios de organización. Esto es, defiende la constitución de objetos mentales basada en la fenomenología frente al logro de conceptos a través de personificaciones concretas. Entiende que la manipulación de objetos mentales precede a la construcción de conceptos, sugiriendo por ello que se establezcan en cada caso criterios con los que determinar si un objeto puede considerarse mentalmente constituido. El enfoque adoptado por el autor se fundamenta en su concepción sobre la naturaleza de las matemáticas: *“nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas han sido inventados como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental”* (p. ix). La matemática es entendida, pues, como creación del hombre y no como descubrimiento de algo que existe en un mundo separado independiente del sujeto cognoscente (concepción platónica).

En nuestro trabajo empleamos la fenomenología con un propósito diferente al de Freudenthal. El objetivo no es diseñar un plan concreto de enseñanza-aprendizaje para que los sujetos constituyan buenos objetos mentales de los conceptos matemáticos que se les presentan en clase, objetos mentales con los que poder organizar los fenómenos asociados a ellos. Por ejemplo, para el caso de los algoritmos en \mathbb{N} la fenomenología didáctica que desarrolla el autor se reduce a un conjunto de sugerencias didácticas para enseñar estos procedimientos de cálculo. Más bien nos interesan los fenómenos a efectos de observación, como medios a través de los cuales poder diagnosticar y valorar la comprensión que manifiestan los alumnos acerca de un determinado conocimiento matemático.

Además, a diferencia de Freudenthal, no sentimos la necesidad de establecer distinción alguna entre tipos de fenomenología (didáctica, genética, histórica) sino que las reunimos todas bajo el concepto común de análisis fenomenológico del conocimiento matemático. En referencia a esto, el propio autor reconoce la dificultad de situar unos límites precisos entre las distintas fenomenologías. Así pues, en la aproximación adoptada el análisis de fenómenos asociados a un conocimiento matemático irá dirigido a determinar la totalidad de situaciones en las que tiene sentido emplear hoy en día ese conocimiento. Entre todas estas situaciones, se incluyen tanto las surgidas de la propia disciplina matemática como las propuestas en las secuencias didácticas escolares o las que aparecen en contextos extraescolares. No nos interesará contemplar la fenomenología histórica del conocimiento ya que el interés está puesto en la observación de la comprensión que poseen los sujetos sobre conocimientos matemáticos actuales.

Un último comentario está relacionado con lo que Freudenthal denomina fenomenología de las estructuras matemáticas (pura). El análisis que esta

fenomenología sugiere se centra en la propia naturaleza del conocimiento matemático por lo que podría considerarse más bien como un examen epistemológico o fenomenológico con el énfasis puesto en el objeto. En el caso del algoritmo estándar escrito de la multiplicación sucede que la fenomenología matemática que elabora el autor no es más que un estudio centrado en el algoritmo como objeto de conocimiento (análisis de los principios fundamentales en los que se sustenta, de los conocimientos previos necesarios, etc.). Un examen similar nos proporcionará, tal como veremos en el próximo capítulo, unas dimensiones o categorías en cuanto a modos de utilización del algoritmo que nos permitirán clasificar de manera concreta las situaciones en las que aparece este método de cálculo.

En resumen nuestra preocupación es la del diagnóstico y valoración del conocimiento matemático. Para desempeñar esta labor acudimos al estudio del conjunto de situaciones asociado al conocimiento elegido con objeto de obtener un control sobre él, aunque en un sentido diferente al mencionado por Assude (1996). No nos interesa la coherencia de las posibles secuencias didácticas sino el orden en el propio conjunto de situaciones-problema, que conseguiremos a través del establecimiento de unas categorías situacionales que abarquen en la medida de lo posible la complejidad epistemológica y fenomenológica del conocimiento matemático en cuestión.

5.4.3.2 Posicionamiento respecto a Puig (1997)

Para precisar aún más el sentido que le asignamos en la investigación a la expresión análisis fenomenológico, tomaremos también como referente las ideas expuestas por Puig (1997) sobre este tema. Para el autor:

“El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de la relación con los fenómenos en cuestión ha de mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos” (p. 63).

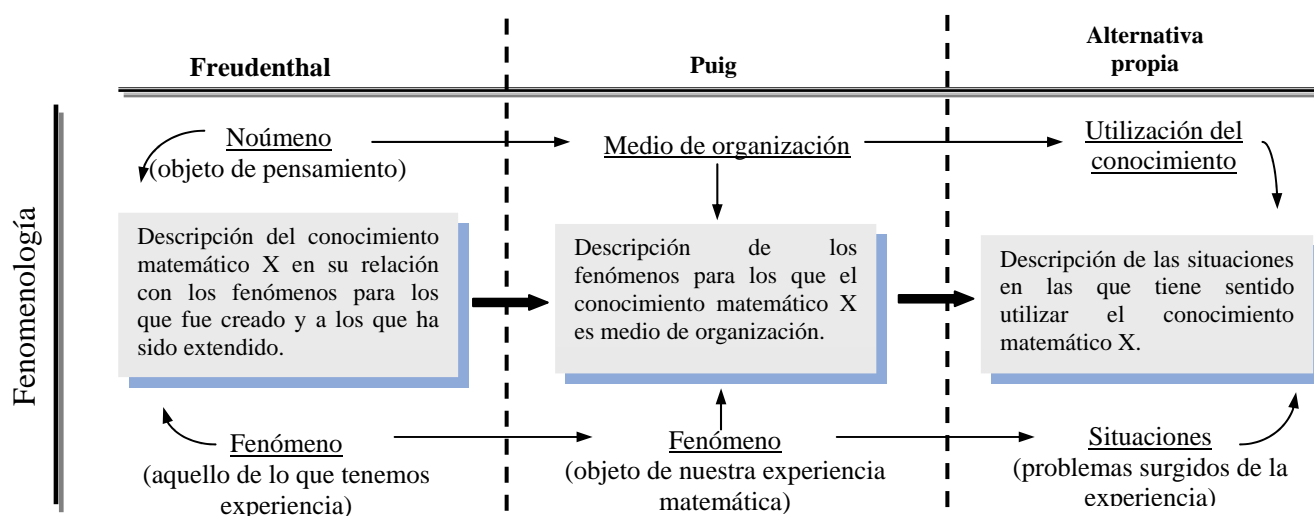
Sobre esta caracterización conviene hacer algunas observaciones relacionadas con la terminología empleada por el autor. Puig, tras revisar los términos que originan el sentido de ‘fenomenología’ adoptado por Freudenthal, ‘noumeno’ y ‘fenómeno’, decide sustituirlos respectivamente por los de ‘medio de organización’ y ‘fenómeno’, este último con un significado asociado diferente al original filosófico de apariencia. Así, medio de organización es entendido como *“la función de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos”* (p. 64), mientras que fenómeno es ahora el objeto de nuestra experiencia matemática.

A pesar del empeño puesto por Puig en aclarar los significados de los nuevos términos introducidos, éstos no resultan sencillos de interpretar. Por ejemplo, ¿qué significa actuar sobre los fenómenos como medio de organización? ¿Cuál es esa “función” de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos? En este contexto, ¿qué es en realidad un fenómeno? ¿Podría identificarse con una situación

en la que tiene sentido usar el concepto matemático asociado? Estas y otras cuestiones similares justifican la decisión de introducir una terminología alternativa, sobre todo porque la caracterización enunciada por Puig no refleja de modo apropiado la idea que intentamos transmitir con la expresión ‘análisis fenomenológico’. Por nuestra parte, entenderemos por *análisis fenomenológico* de un conocimiento matemático a la descripción de todas aquellas situaciones susceptibles de poder resolverse con, o en las que tiene sentido utilizar, ese conocimiento matemático. En tal sentido, el análisis fenomenológico es considerado como sinónimo de análisis de situaciones o situacional, puesto que identificamos, o más bien sustituimos, el término fenómeno por el de situación. Las *situaciones* serán las tareas problemáticas surgidas de la experiencia a las que continuamente se está enfrentando el sujeto en contextos diversos¹⁵.

En algunas de ellas cabe la posibilidad de la intervención de determinados conocimientos matemáticos que facilitan en parte o totalmente la resolución. Fijado un conocimiento matemático, el análisis situacional correspondiente consistirá precisamente en determinar esas situaciones en las que el empleo de este conocimiento se hace legítimo y contribuye de algún modo a la obtención de las diferentes soluciones. Los vínculos que se establecen entre el conocimiento matemático y sus situaciones asociadas no tienen por qué ser de la misma naturaleza.

En el siguiente esquema se muestra de forma resumida el proceso de reinterpretación de términos y sentidos que acabamos de exponer.



5.4.4 Fuentes del análisis

Para llevar a cabo el análisis de situaciones correspondiente a un conocimiento matemático particular conviene primeramente tomar en consideración los comentarios de Freudenthal (1983) acerca de dónde buscar el material necesario para una fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas:

¹⁵ Coincidimos con Sierpiska (1994) en la amplitud dada a la noción de situación. No obstante, imponemos a la situación un carácter problemático y el hecho de que en ella se pueda emplear el conocimiento matemático cuya comprensión se pretende estudiar en cada caso.

“¿Dónde he buscado el material requerido para mi fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas? Apenas podría apoyarme en el trabajo de otros. He aprovechado mi conocimiento de las matemáticas, sus aplicaciones y su historia. Conozco cómo las ideas matemáticas han o podrían haber nacido/surgido. Del análisis de libros de texto conozco cómo los didactas consideran/calculan lo que puede apoyar el desarrollo de estas ideas en las mentes de los sujetos. Finalmente, al observar los procesos de aprendizaje he conseguido comprender un poco los procesos actuales de constitución de las estructuras matemáticas y el logro de conceptos matemáticos” (p. 29).

Las recomendaciones de Freudenthal, si bien no las vamos a seguir al pie de la letra porque nuestro análisis no se corresponde exactamente con el que propone el autor, nos sugieren tres fuentes principales desde las que poder obtener una información completa sobre la naturaleza del conocimiento matemático en estudio así como una muestra representativa de situaciones donde tiene sentido su utilización como medio de resolución. En concreto, las fuentes que contemplamos para el análisis epistemológico y fenomenológico son¹⁶:

1. Los trabajos e investigaciones publicados en Educación Matemática en torno al conocimiento matemático en estudio.
2. Los libros de texto de matemáticas propuestos para diferentes niveles educativos. También las obras de divulgación y entretenimiento matemático donde esté presente el conocimiento matemático seleccionado.
3. El conocimiento de los especialistas del área de la Didáctica de la Matemática.

5.4.5 La noción de conjunto situacional, genérico y personal

Necesitamos un marco teórico que nos permita conducir e interpretar las acciones dirigidas a establecer las relaciones entre el conocimiento matemático y las situaciones que le dan sentido.

Si aceptamos el hecho de que resulta imposible conocer todas las situaciones donde tiene sentido emplear un conocimiento matemático concreto, llegamos a la conclusión de que el campo situacional más completo que podríamos determinar sería el constituido por las situaciones obtenidas de las fuentes consultadas para el análisis epistemológico y fenomenológico. A todo este campo de situaciones lo llamaremos *campo o conjunto situacional genérico* (CSG) del conocimiento matemático, siendo conscientes de que con él sólo se cubre una parte extensa del que sería el verdadero e inaccesible campo de situaciones asociado al mismo conocimiento matemático. En términos de Díaz-Godino y Batanero (1994), nos estamos refiriendo a un único “campo de problemas C”, potencialmente infinito, que es el que le da sentido al conocimiento matemático.

¹⁶ También podría considerarse que todas las fuentes a consultar para el análisis epistemológico y fenomenológico tienen un origen común en el experto, entendido éste en un sentido epistémico y no individual. Su legado intelectual y profesional podría interpretarse entonces como la fuente, única y real, de la cual elaborar el perfil fenómeno-epistemológico asociado a cada conocimiento matemático.

El análisis que pretendemos realizar nos lleva también a considerar para cada sujeto la existencia de diferentes campos fenomenológicos o situacionales vinculados con el conocimiento matemático. Esto es así porque en principio cada individuo será capaz de emplear dicho conocimiento para resolver un determinado conjunto de situaciones. Así pues, definimos el *conjunto situacional personal* de un sujeto concreto asociado a un conocimiento matemático particular como el conjunto de todas las situaciones que son identificadas por el sujeto como susceptibles de poder ser resueltas con ese conocimiento matemático. En términos similares, respecto a un sujeto particular diremos que una situación concreta pertenece a su conjunto de situaciones asociado a un determinado conocimiento matemático cuando la identifica como apta para ser resuelta con ese conocimiento. Aunque no sea consciente de ello, se podría pensar que cada individuo particular posee un grupo de situaciones de extensión variable en disposición de ser asociadas con conocimientos matemáticos cada vez que surja la oportunidad. Sujetos diferentes llevarán asociados conjuntos situacionales personales distintos respecto al mismo conocimiento matemático y todos ellos estarán próximos en mayor o menor medida al genérico establecido como referencia por el investigador que, como ya hemos señalado, sería el más completo de todos. Estamos, en realidad, ante una fenomenología subjetiva del conocimiento matemático en la que el sujeto juega un papel esencial como elemento condicionante de su propia experiencia y, por tanto, de su comprensión. Desde el punto de vista del desarrollo de la comprensión del conocimiento matemático, lo ideal sería que el conjunto situacional personal del individuo se fuese completando cada vez más, a través de la resolución con éxito de las diversas situaciones, hasta conseguir que se asemeje al genérico.

La figura 5.4 recoge en clave topológica la relación natural que se establece entre ambos conjuntos situacionales, el personal del sujeto y el genérico. Tal como puede observarse, el primero de ellos está incluido en el segundo como parte integrante del mismo. Por otro lado, las fronteras discontinuas del campo situacional personal (CSP) y genérico (CSG) representan su incompletitud y la posibilidad de poder integrar en ellos nuevas situaciones no contempladas previamente.

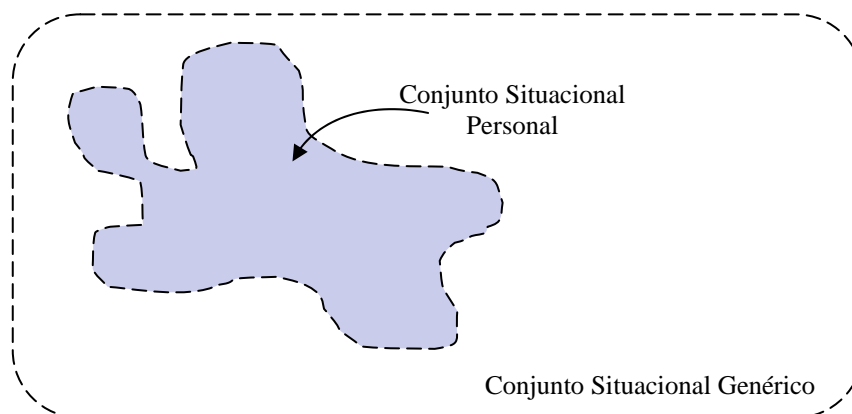


Figura 5.4.- Representación topológica de los conjuntos situacionales personal y genérico asociados a un conocimiento matemático determinado.

La representación topológica de los conjuntos situacionales nos permite además poner de manifiesto una serie de posibilidades interesantes que describimos

exclusivamente a nivel teórico, por lo que quedan pendientes de contrastación empírica para futuras investigaciones:

(a) El CSP de un sujeto concreto asociado a un determinado conocimiento matemático puede ser nulo o vacío. Este caso se corresponde principalmente con el del sujeto que nunca ha entrado en contacto o no ha tenido experiencia alguna con ese conocimiento matemático. Por ejemplo, los alumnos de Primaria a los que jamás se les ha enseñado un algoritmo como el estándar escrito para multiplicar números naturales poseen un CSP nulo asociado a este método de cálculo.

(b) Una misma situación podría introducirse en un momento determinado en el conjunto de situaciones que el sujeto asocia a un conocimiento matemático, permanecer en él durante un periodo de tiempo concreto y después dejar de pertenecer a ese campo. Las posibles causas de esta inclusión así como de la posterior salida de la situación pueden estar motivadas por distintos condicionantes por ahora indeterminados.

(c) Podría suceder que una situación S perteneciera al CSP de un sujeto pero no al genérico tomado de referencia. Piénsese por ejemplo en el CSP de un experto al que no hayamos consultado y en el que existe una situación no contemplada hasta ahora. De hecho, el CSG no es más que un CSP, el más completo de cuantos hemos podido elaborar como investigadores.

No obstante, esta posibilidad resulta remota cuando se consideran alumnos de un nivel educativo no universitario. En tales casos, lo normal será una relación de inclusión: si $S \in \text{CSP}_i \Rightarrow S \in \text{CSG}$. Precisamente por este motivo hemos contemplado desde el inicio la situación relativa de los CSP's incluidos en el CSG.

(d) Una consecuencia obvia derivada del punto anterior es que una situación propia del CSG en principio no tiene por qué pertenecer al CSP del sujeto cuya comprensión estemos analizando. A decir verdad, lo normal será que existan $S \in \text{CSG}$ con $S \notin \text{CSP}_i$.

(e) Los conjuntos situacionales personales de dos individuos diferentes asociados a un mismo conocimiento matemático, CSP_1 y CSP_2 , no tienen por qué ser iguales ya que una situación puede pertenecer al campo situacional personal de uno de ellos pero no al del otro (figura 5.5A). Alternativamente, los CSP_1 y CSP_2 podrían coincidir si por ejemplo ambos sujetos hubieran tenido la misma experiencia en las mismas situaciones (figura 5.5B). Esta última posibilidad parece más lejana cuando los dos han tenido la oportunidad de enfrentarse en numerosas ocasiones a situaciones de todo tipo vinculadas al conocimiento matemático en cuestión. En general, para dos individuos de un mismo nivel educativo y con un pasado didáctico similar lo normal sería que sus dos campos CSP_1 y CSP_2 compartieran un núcleo común formado por las mismas situaciones y tuvieran una parte diferente modelada por situaciones distintas.

(f) Si dos campos situacionales personales CSP_1 y CSP_2 correspondientes al mismo conocimiento matemático poseen intersección vacía, entonces es de suponer que al menos uno de estos campos es vacío (figura 5.5C). Resulta difícil imaginar otra alternativa puesto que si ambos sujetos han tenido alguna experiencia con el conocimiento matemático, por escasa que sea, al menos identificarán alguna situación común como susceptible de poder resolverse con ese conocimiento matemático. Para el ejemplo del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales esta situación podría ser del tipo: “Calcula 25×6 ”.

(g) Continuando con las posibilidades, también sería posible la relación de inclusión entre dos conjuntos situacionales personales CSP_1 y CSP_2 (figura 5.5D). Correspondería, por ejemplo, al caso de dos sujetos de diferente nivel educativo, uno de ellos abordando las primeras situaciones asociadas a un conocimiento matemático (por ejemplo, las primeras multiplicaciones con el algoritmo estándar escrito o la resolución de los primeros PAEV de estructura multiplicativa) y el otro con una experiencia más consolidada en la resolución de un mayor número de situaciones diferentes.

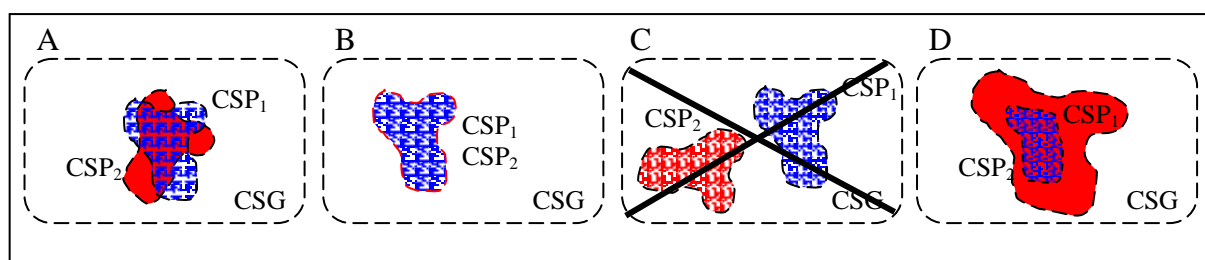


Figura 5.5.- Posibles relaciones entre dos conjuntos situacionales personales CSP_1 y CSP_2 asociados a un mismo conocimiento matemático.

En un intento por establecer alguna correspondencia entre las ideas anteriores y las expuestas por Freudenthal (1983) y Puig (1997), podríamos decir que la relación de los diversos conjuntos situacionales personales con el conjunto situacional genérico recuerda de algún modo a la de Freudenthal de los objetos mentales con el concepto o, en la terminología de Puig, a la de los campos semánticos personales con el campo semántico del concepto.

Para evitar errores de interpretación en la terminología introducida, conviene hacer explícitas las diferencias entre la noción de conjunto situacional (personal y genérico) utilizada en esta aproximación y la de campo conceptual adoptada por Vergnaud, en apariencia muy similares. La noción de campo conceptual tal como la usa Vergnaud así como su teoría asociada de los campos conceptuales parecen estar relacionadas únicamente con conceptos y estructuras matemáticas. Así, este autor habla de los dos principales campos conceptuales de la aritmética elemental, el de las estructuras aditiva y multiplicativa, y dentro de ellos de las diferentes clases de problemas existentes (Vergnaud, 1997). Sin embargo, no suele considerarse el campo conceptual de un teorema como el de Pitágoras o de un procedimiento de cálculo como el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Con la expresión conjunto situacional queremos hacer notar que también tiene sentido y está justificado contemplar las situaciones donde es posible emplear conocimientos matemáticos como los que acabamos de mencionar y llevar a cabo descripciones y análisis de estas situaciones. La extensión del conjunto situacional resultante de un análisis de este tipo dependerá de la naturaleza del conocimiento matemático que se esté examinando. En este sentido, cabe esperar que el análisis de los problemas pertenecientes a un campo conceptual como el multiplicativo presentará más dificultad y, por ello podría suceder que fuese más general, que el correspondiente a un simple método de cálculo. Con vistas a valorar la comprensión de los sujetos de acuerdo con las situaciones que identifican y resuelven, interesa que los análisis situacionales sean de lo más exhaustivos. Mientras más amplias sean las estructuras matemáticas

elegidas menos garantías habrá de conseguir la exhaustividad deseada en el análisis de sus campos conceptuales.

Por otra parte, hemos de subrayar que el conjunto situacional asociado a un conocimiento matemático, tanto personal como genérico, ha sido definido en términos de posibilidad: está constituido por aquellas situaciones susceptibles de poderse resolver con dicho conocimiento matemático, lo que significa que no se necesita disponer de él de forma imperativa para poder llegar a la solución. En cambio, el campo conceptual de Vergnaud parece ser que lleva asociado este carácter de obligatoriedad. Refiriéndose a este autor para el caso del campo multiplicativo, Castro, Rico y Castro (1995) afirman lo siguiente:

“Caracteriza el campo conceptual de la estructura multiplicativa como un conjunto de situaciones problema cuya resolución requiere la multiplicación o la división” (p. 54).

A modo de conclusión, conviene aclarar también que los análisis semántico y estructural propuestos por Niemi (1996) difieren notablemente de los presentados en este apartado y en el anterior. Si bien es cierto que podría identificarse el análisis semántico con el epistemológico, el estructural tiene poco que ver con el fenomenológico. Asimismo, en la teoría de Díaz-Godino y Batanero (1994) sobre los objetos matemáticos y sus significados pensamos que se está sugiriendo una reflexión epistemológica y fenomenológica con un propósito que no coincide exactamente con el que proponemos. En nuestro caso, dicha reflexión no va dirigida a determinar la génesis institucional y personal del conocimiento matemático ni su mutua interdependencia. Tampoco es nuestro problema *“el estudio de las condiciones socioculturales e históricas que determinan la formación y los distintos modos de existencia de los significados institucionales y de sus mutuas interdependencias”* (p. 351). Como venimos señalando, de cara a una evaluación de la comprensión de los sujetos, partimos más bien de un conocimiento matemático actual ya establecido sobre el cual exigimos un análisis epistemológico y fenomenológico para determinar conjuntos de situaciones adecuadas de evaluación.

5.4.6 Dificultades del análisis epistemológico y fenomenológico

De acuerdo con la aproximación operativa propuesta y con la caracterización de comprensión enunciada en términos de utilización en su sentido más amplio y de respuestas adaptadas a situaciones problemáticas, para diagnosticar y valorar la comprensión que manifiestan los sujetos acerca de un conocimiento matemático debemos realizar, como primera etapa del proceso, un análisis epistemológico y fenomenológico de ese conocimiento. Tal como señalamos en los apartados precedentes, esto supone hacer una búsqueda, lo más exhaustiva posible, de todas aquellas situaciones en las que tiene sentido emplear dicho conocimiento, de todas aquellas tareas o problemas susceptibles de poder resolverse con él.

Hemos de señalar que un análisis de este tipo plantea serias dificultades, pudiéndose considerar éstas como limitaciones de la aproximación adoptada. En primer lugar, con casi total seguridad el conjunto situacional que nos proponemos describir se tornará inmenso y no será posible hacer una lista exhaustiva de todas las situaciones que lo componen. En referencia a esta cuestión, Puig (1998) reconoce que no es posible ni

tampoco deseable elaborar una caracterización exhaustiva y minuciosa de las tareas de un campo conceptual (en términos de Vergnaud). Según él, la explosión combinatoria nos lo impediría. Entendemos que esto también sucedería incluso en aquellos contenidos de fenomenología supuestamente más limitada, como algoritmos, fórmulas o procedimientos en general. Por tanto, debemos aceptar el hecho de que es imposible mostrar la totalidad de situaciones en las que tiene sentido emplear un conocimiento matemático, aún en el caso de ser éste un procedimiento tan particular como el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales (no es un campo conceptual, ni tan siquiera un concepto). No obstante, el mismo autor asegura que “*no se trata de abandonar todo empeño analítico –que siempre conlleva clasificar–, sino por el contrario de subrayar que el análisis de las tareas es crucial tanto para la organización de la enseñanza... como para la organización de la investigación*” (p. 108).

Para los propósitos de la investigación, una vez admitida la incompletitud del conjunto situacional que pretendemos obtener, se trata ahora de garantizar mediante las fuentes consultadas para el análisis epistemológico y fenomenológico un cierto grado de suficiencia y representatividad en la muestra de situaciones que obtengamos.

La limitación podría salvarse si logramos establecer unas dimensiones o categorías con las que clasificar las situaciones de modo que en esa clasificación estén recogidas la mayoría de ellas. La idea es garantizar que cada una de las posibles situaciones, aún no conociéndolas explícitamente, se puedan incluir en alguno de los grupos surgidos de la clasificación en caso de que aparezcan como novedad. A efectos de operatividad en cuanto a la evaluación de la comprensión de los sujetos se elegirían de cada uno de los grupos situacionales algunos representantes (uno o varios), que serían los que los alumnos resuelvan.

La consideración conjunta de las estructuras epistemológica y fenomenológica del conocimiento matemático, cuyo estudio conducirá a la propuesta de unos criterios clasificatorios pendientes de contrastación empírica, va a permitir, por una parte, el establecimiento de unas categorías que agrupen las distintas situaciones en función del uso que se hace en ellas del conocimiento matemático elegido, y por otra, la selección en cada una de las categorías de un subconjunto de situaciones adecuadas con las siguientes características:

(a) Que sean representativas del resto. Esto significa que en caso de seleccionar otra situación distinta dentro de la misma categoría, no se obtendría de ella una información sobre la comprensión de los sujetos sustancialmente diferente a la facilitada por la/s elegida/s como representante/s.

(b) Que constituyan un grupo reducido para que puedan emplearse con comodidad como instrumento para la recogida de información.

A través de este proceso de categorización y selección aspiramos a restringir, en la medida de lo posible, el conjunto situacional asociado al conocimiento matemático a sólo unas pocas situaciones, sin tener por ello que renunciar a la representatividad respecto del total. De conseguir este propósito, podríamos afirmar que la aproximación adoptada al estudio de la comprensión garantizaría un alto grado de operatividad.

Una segunda dificultad surge del hecho de que los conocimientos matemáticos no estén aislados, sino que se relacionan entre sí de múltiples formas; esta circunstancia también dificulta la labor de clasificación de las situaciones donde tiene sentido emplear el conocimiento matemático cuya comprensión queremos valorar. Nos obliga, entre

otras cosas, a considerar las situaciones en función del vínculo establecido con el conocimiento en estudio y con otros conocimientos.

Por último, hemos de admitir además que, a pesar de todo, no llegamos a poseer los medios y mecanismos suficientes para garantizar por completo que nuestra propuesta de valoración a través del análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático sea la más adecuada entre las posibles. No obstante, este reconocimiento es consistente con la opinión de Webb (1992) al respecto:

“Lo que no conocemos aún bien es cómo seleccionar la mejor forma de análisis para una situación específica de valoración y cómo interpretar y comprender la interacción entre las distintas formas de análisis, propósitos de la valoración y otros aspectos” (p. 673)

5.5 Resumen

Para finalizar, exponemos una síntesis de las principales características que manifiesta la propuesta presentada sobre el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático:

(a) En primer lugar, se trata de una aproximación, por tanto provisional, limitada y mejorable, que está sustentada en principios y supuestos generales sobre:

- la cognición, coherentes con un constructivismo integrador;
- el conocimiento matemático, considerado desde la perspectiva del sujeto con pretensiones de comprensión;
- la comprensión, como fenómeno multifacético al que se accede a través de su diagnóstico y evaluación.

(b) En términos generales, se acepta que comprender un conocimiento matemático es sinónimo de responder intencionadamente y resolver con éxito aquellas situaciones problemáticas en las que se manifiesta y cobra sentido ese conocimiento matemático.

(c) La valoración de la comprensión en los sujetos se ha de llevar cabo a partir de la información que proporcionan las acciones observables realizadas por ellos y las respuestas dadas a las situaciones problema mencionadas. Éstas constituyen el único medio observable del que dispone el investigador para hacer afirmaciones y llegar a conclusiones relacionadas con la comprensión del conocimiento matemático.

(d) El error no es interpretado desde esta perspectiva como indicio de una falta de comprensión o comprensión incorrecta sino como elemento caracterizador de un uso específico del conocimiento y, en consecuencia, de un tipo de comprensión concreto. Esta consideración se deriva en parte al considerar inapropiada la referencia a instituciones como la educativa para establecer prototipos de comprensión adecuada.

(e) Se trata de una aproximación al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático donde resulta esencial la consideración de la especificidad del conocimiento matemático. Destaca entre sus características la de ser operativa, indirecta, fenómeno-epistemológica, positiva, abierta, integradora y objetiva.

(f) El método propuesto para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático exige como punto de partida un análisis epistemológico y fenomenológico del mismo. Dicho análisis proporciona criterios que posibilitan ejercer un cierto control sobre el total de situaciones que dan sentido al conocimiento matemático, permitiendo de este modo aportar una solución parcial al problema de la determinación y clasificación de situaciones. Este control se manifiesta en forma de categorías situacionales y situaciones representativas útiles para la elaboración de instrumentos de observación con los que extraer información sobre la comprensión en los sujetos.

CAPÍTULO VI

COMPRENSIÓN DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES: ESTUDIO TEÓRICO

6.1 Introducción

Los planteamientos teóricos expuestos en el capítulo precedente reclaman una primera concreción en forma de aplicación a un conocimiento matemático particular con idea de ir mostrando la verdadera potencialidad operativa de la aproximación adoptada.

En este capítulo se exponen los aspectos teóricos del proceso de aplicación del modelo de comprensión desarrollado en el capítulo V al caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Posteriormente, en los capítulos VII y VIII, se exponen los estudios empíricos que se han realizado para comprobar la plausibilidad de las conjeturas enunciadas y confirmar la validez y eficacia del modelo teórico mencionado y del proceso metodológico adoptado para diagnosticar y evaluar la comprensión de este conocimiento matemático.

En los apartados que siguen se describen, por este orden, los motivos que justifican la elección de este conocimiento, el desarrollo de los análisis epistemológico y fenomenológico asociados a la parte teórica del proceso de aplicación del modelo, la estructura epistemológica y fenomenológica resultante de ese proceso así como la clasificación provisional obtenida para el conjunto situacional asociado al algoritmo estándar escrito de la multiplicación. Asimismo, incluimos en la parte final del capítulo una reflexión en torno a las principales limitaciones e incidencias surgidas durante el proceso de operativización¹ llevado a cabo. El último apartado, que cierra la parte teórica del trabajo, resume los pasos seguidos en la categorización y selección de situaciones y presenta las principales cuestiones que quedan pendientes de desarrollo en la fase empírica de la investigación y cuyos resultados se exponen en los capítulos siguientes.

6.2 Justificación de la elección del algoritmo

Hemos seleccionado como conocimiento matemático particular el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Los principales motivos que nos han llevado a tal elección deben responder a las siguientes cuestiones:

¹ Recordamos que con este término nos referimos al proceso de acciones secuenciadas necesarias para convertir el modelo teórico en un modelo práctico útil para la investigación.

- (i) ¿Por qué se ha elegido un procedimiento matemático y no otro tipo de conocimiento matemático como un concepto o una propiedad?
- (ii) Entre todos los procedimientos matemáticos, ¿por qué se ha elegido un procedimiento numérico de cálculo propio del campo de la Aritmética Elemental?
- (iii) Entre todos los procedimientos de cálculo aritmético elemental, ¿por qué se ha elegido el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales?

En respuesta a la cuestión (i), hemos de mencionar que un procedimiento matemático como el algoritmo estándar escrito para el producto, en apariencia elemental y evidente en cuanto a su comprensión (en numerosas ocasiones suele considerarse como un simple procedimiento aritmético en el que su comprensión se identifica con su dominio), refleja, sin embargo, buena parte de la problemática existente en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, permitiéndonos mostrar con claridad la dificultad y limitaciones que hay que aceptar a la hora de afrontar su diagnóstico y evaluación. De hecho, tal como se pondrá de manifiesto en el capítulo VIII, los sujetos suelen manifestar diferencias sustanciales y matices importantes respecto a la comprensión de este método de cálculo que van más allá de la clásica dicotomía entre lo procedimental y lo conceptual, de modo que lo consideramos con la suficiente entidad matemática como para abordar el estudio de su campo situacional y emplearlo con posterioridad como medio con el que valorar su comprensión.

Además, la aparente simplicidad de las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al algoritmo nos va a permitir garantizar en cierto modo que el estudio sobre la comprensión se desarrolle en un nivel destacable de rigurosidad y profundidad a lo largo de un proceso controlado.

Otra de las razones por las que hemos seleccionado este procedimiento matemático ha sido para ir detectando limitaciones en la aproximación desde el primer momento y al mismo tiempo favoreciendo su desarrollo mediante la identificación de aspectos ocultos sobre la comprensión que de inmediato pasarían a formar parte de la propia aproximación, haciéndola más robusta, estable y consistente. Entendemos que en fases iniciales de elaboración de un modelo teórico sobre comprensión interesa trabajar con conocimientos matemáticos no excesivamente complejos en cuanto a su epistemología y fenomenología. En la mayoría de las ocasiones estos conocimientos suelen coincidir con los considerados tradicionalmente como no centrales o poco relevantes en el ámbito de la Didáctica de la Matemática. Creemos que este es el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. El hecho de ser un conocimiento matemático simple respecto a otros, sobre todo desde un punto de vista epistemológico (por ejemplo, es un procedimiento y no un concepto, que tan sólo admite una representación externa, entre otras particularidades), facilita el proceso de operativización de la propuesta cuya primera aplicación se está llevando a cabo en la presente investigación.

En esta ocasión se decide comprobar la operatividad de la aproximación presentada en el capítulo V con un tipo de conocimiento específico (procedimental aritmético elemental). En sucesivos trabajos, se pretende ir adaptando y mejorando el modelo teórico de comprensión y la propuesta metodológica de diagnóstico y evaluación con otros conocimientos del mismo tipo que el algoritmo (procedimientos matemáticos) y también de otro tipo (conceptos, propiedades, demostraciones, definiciones matemáticas, entre otros ejemplos).

En relación a la cuestión (ii), reconocemos que la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales es un campo de investigación en el que

las numerosas propuestas elaboradas para garantizar una instrucción efectiva, la mayoría de ellas basadas en estudios de carácter cognitivo, contrastan con las escasas mejoras obtenidas en la consecución de una buena comprensión en aritmética y en matemáticas en general (Burns, 1994; Lindquist, 1997). En este contexto, al centrar el estudio en un método de cálculo como el elegido, con una amplia presencia en el currículo de Primaria, pretendemos aportar algunos resultados y conclusiones sobre la comprensión que poseen los estudiantes, con ánimo de que éstos puedan ser de ayuda para mejorar la actual situación del proceso usual de enseñanza-aprendizaje. Entendemos que la exposición sobre el cálculo aritmético elemental presentada en el capítulo III del presente informe respalda en parte esta decisión.

Finalmente, en cuanto a la cuestión (iii), para realizar el estudio hemos elegido el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales por ser un procedimiento ampliamente difundido entre los escolares, lo cual garantiza un mínimo de experiencias previas con este conocimiento y por tanto, de cara a la valoración, la posibilidad de enfrentar con éxito al menos alguna situación vinculada a él. Además, se trata de un procedimiento que suele plantear serias dificultades de comprensión entre los estudiantes por cuanto son numerosos los errores que se continúan cometiendo cada vez que utilizan este método de cálculo a pesar de la instrucción recibida.

Por otra parte, en relación con los algoritmos estándar escritos correspondientes a las otras tres operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción y división), justificamos la elección por entender que el asociado a la multiplicación ya incluye al de la suma y es más simple que el algoritmo semiautomático de la división, que también incluye al de la sustracción. En cualquier caso, a pesar de la decisión tomada podríamos haber elegido igualmente cualquier otro conocimiento entre los elementales apropiados por su simplicidad fenómeno-epistemológica para mostrar en una primera ocasión la operatividad de la aproximación desarrollada en el capítulo V.

6.3 Análisis Epistemológico y Fenomenológico: proceso, fuentes y resultados

Como se explica en el apartado 5.4.1 del capítulo V, es necesario llevar a cabo un estudio teórico sobre las características epistemológicas y fenomenológicas del conocimiento matemático como requisito previo al diagnóstico y evaluación de la comprensión correspondiente. El estudio se centra en el análisis epistemológico y fenomenológico del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, que nos va a permitir profundizar en la naturaleza y existencia de este conocimiento e identificar distintas dimensiones con las que ordenar el conjunto de situaciones asociado a él.

En los apartados que siguen se exponen los diferentes aspectos que delimitan el estudio efectuado. Así, en los apartados 6.3.1 y 6.3.2 se explica el proceso seguido para completar el estudio y las fuentes que se han utilizado para el mismo. En el apartado 6.3.3 se exponen los principales resultados obtenidos en las distintas etapas de dicho proceso.

6.3.1 Proceso seguido

Para llegar a establecer una clasificación, categorización o tipología teórica, provisional y pendiente de contrastación empírica para las situaciones asociadas al

algoritmo, y de este modo ordenar y hacer más manejable el campo situacional correspondiente, hemos seguido un proceso con las siguientes etapas:

1ª Etapa. En la que hemos llevado a cabo las siguientes tareas:

- (1) La revisión de una muestra de libros de texto de matemáticas.
- (2) Una consulta específica en los antecedentes revisados sobre enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental, centrada exclusivamente en aquellos aspectos relacionados con el algoritmo estándar escrito del producto.
- (3) Una revisión de algunas obras dirigidas a la formación didáctica de los profesores de matemáticas de Primaria y Secundaria (Gómez, 1988; Puig y Cerdán, 1988; Maza, 1989, 1991; Fernández y Rodríguez, 1989; Roa, 2001; Gairín y Sancho, 2002).

De este primer acercamiento al campo situacional de algoritmo, extraemos (a) una batería inicial de situaciones y (b) unos primeros elementos caracterizadores de la epistemología y fenomenología del algoritmo. Con ellos llevamos a cabo un primer intento de ordenación del campo de situaciones con una propuesta inicial de clasificación que es puesta a prueba en la segunda etapa del proceso.

2ª Etapa. Consulta a expertos sobre la idoneidad de la primera tipología situacional surgida de la reflexión personal realizada sobre el material recopilado en la etapa anterior. De la consulta nos interesa considerar sobre todo las sugerencias de modificación y las posibilidades de ampliación tanto del campo de situaciones como de las propias categorías.

Por último, con objeto de establecer las consecuencias directas para el estudio empírico, las dos etapas anteriores se completan con la siguiente:

3ª Etapa. Caracterización de las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al algoritmo estándar escrito de la multiplicación a partir de los resultados obtenidos en las etapas previas. Con estas estructuras de referencia, se definen los criterios clasificatorios fenómeno-epistemológicos que permiten establecer una clasificación teórica depurada con distintas categorías situacionales y con posibles situaciones pertinentes para ser empleadas en labores de diagnóstico y evaluación de la comprensión.

6.3.2 Fuentes consultadas

1. Libros de texto y obras de divulgación y entretenimiento matemático

Por ser el algoritmo un contenido matemático propio de la Educación Primaria, los libros de texto que se usan en la actualidad para la enseñanza en este nivel educativo constituyen la primera de las fuentes consultadas. Ante la variedad de editoriales y manuales existentes en el mercado optamos por elegir para su análisis las series de libros de texto de matemáticas que ofrecen dos de los grupos editoriales españoles más representativos: Santillana (1992-1995) y Guadiel-Grupo Edebé (1993-1995).

En las dos editoriales revisadas hemos localizado para los cursos de 2º a 6º de Primaria las distintas situaciones en las que aparece o se utiliza el algoritmo estándar escrito de la multiplicación para números naturales. Además de estos grupos, hemos revisado también las series de libros correspondientes a Anaya, Bruño y SM desde 3º de

Primaria hasta 2º de ESO y Vicens- Vives desde 3º hasta 6º de Primaria, con la atención puesta en el tratamiento dado a las multiplicaciones con cifras desconocidas (MCCD's). Un análisis detallado de la presencia de estas tareas particulares en los libros de texto mencionados puede encontrarse en Gallardo y González (2002).

En la revisión tan sólo nos interesa considerar las situaciones en sí y no nos preocupamos por examinar las posibles diferencias y semejanzas que puedan existir entre los distintos enfoques y secuencias didácticas adoptadas por cada editorial.

La información recopilada de los libros escolares se complementa con la obtenida de otros volúmenes dirigidos a destacar y difundir el aspecto lúdico de la matemática mediante curiosidades, juegos y pasatiempos matemáticos (Fernández y Rodríguez, 1989). Los criptogramas aritméticos y las multiplicaciones con cifras desconocidas son un tipo de situaciones que suelen aparecer en estas obras.

2. Estudios, trabajos, investigaciones y obras divulgativas en Educación Matemática y en Didáctica de la Matemática relacionados con la enseñanza-aprendizaje de algoritmos de cálculo para las cuatro operaciones aritméticas básicas

A diferencia de lo que opina Freudenthal (1983), consideramos valioso el trabajo que se viene realizando en los últimos años en el ámbito de la didáctica de la aritmética. La revisión de antecedentes llevada a cabo sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental, como parte del Análisis Didáctico requerido en la investigación, constituye la segunda fuente desde la que también se obtiene información sobre posibles situaciones susceptibles de poder resolverse con el algoritmo estándar escrito de la multiplicación. Resulta obvio mencionar que de todas ellas sólo nos van a interesar las situaciones no contempladas en el análisis de los libros de texto. Básicamente, estas nuevas situaciones se extraen de los instrumentos de observación utilizados por los investigadores en trabajos centrados en evaluar las competencias de los alumnos y de las secuencias de enseñanza alternativas diseñadas y experimentadas para mejorar la comprensión del cálculo aritmético elemental (ésta constituye otra fuente importante para localizar situaciones). La identificación y corrección de errores propios cometidos por los estudiantes en sesiones previas de aprendizaje, o por compañeros de clase, al multiplicar números naturales de varias cifras con el algoritmo estándar escrito es un ejemplo de situación obtenida a través de esta fuente.

3. Conocimiento de los especialistas

La tercera fuente de información valiosa para el análisis situacional del conocimiento matemático elegido la proporcionan las opiniones y sugerencias de los especialistas en Didáctica de la Matemática. En tal sentido, el 21 de junio de 2001 realizamos una consulta a expertos en la que se les solicitaba su opinión acerca de una clasificación inicial con siete tipos de situaciones elaborada a partir de los primeros resultados obtenidos en la investigación sobre la comprensión del algoritmo estándar escrito de la multiplicación (Gallardo, 2001). Dicha consulta se hizo enviando un documento con la tipología de situaciones asociadas al algoritmo a las direcciones electrónicas de una muestra formada por (a) 42 doctores, profesores de universidad en el área de Didáctica de la Matemática, y (b) 2 estudiantes de doctorado en Didáctica de la Matemática; todos ellos pertenecientes a un total de 13 universidades públicas españolas. Se recibió contestación de 11 profesores y 1 estudiante de doctorado. El documento enviado, la información recopilada y el análisis de las observaciones recibidas se recogen en el anexo I del presente informe.

6.3.3 Resultados

En líneas generales, de las distintas etapas del proceso seguido en el análisis epistemológico y fenomenológico obtenemos (a) una batería extensa de situaciones vinculadas al algoritmo estándar escrito del producto y (b) un conjunto de criterios y aspectos a considerar, tanto personales como externos, para establecer el orden buscado en el conjunto situacional.

6.3.3.1 Muestra inicial de situaciones

En el siguiente cuadro se presentan los tipos de situaciones identificados tras las dos primeras fuentes consultadas. El proceso de búsqueda e identificación consistió en un registro exhaustivo de las tareas donde es posible la aplicación del algoritmo estándar escrito de la multiplicación y el posterior agrupamiento de las mismas en función de su enunciado y propósito, dando como resultado una relación de diferentes tipos de situaciones que quedan pendientes de una ordenación más funcional de acuerdo con criterios de carácter epistemológico y fenomenológico.

Tipos de situaciones pertenecientes al Campo Situacional del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales

- Ejercicios con el algoritmo, en disposición vertical y horizontal: “*Multiplícala doce por trece*”
- Análisis de errores (Ej.: ver situación T8 en el apartado 7.3.2.3 del capítulo VII).
- Reproducción mental del algoritmo
- “*Completa $34_x 10 = 3400$; $21_x 6 = 1266$; $23_1 x 2 = 4602$ ”.*
- Criptogramas (Ej.: SI x NO = DUDA)
- MCCD versión problema. (Ej.: ver situación T9 en el apartado 7.3.2.3 del capítulo VII).
- MCCD versión ejercicio (MCCD con multiplicando y multiplicador conocidos)
- Tareas con calculadora.
- Comparación del algoritmo estándar con otros alternativos (celosía,...) para determinar los principios justificativos de su funcionamiento.
- Desarrollo horizontal y comparación con el vertical.
- Realizar con ayuda de la calculadora multiplicaciones con números grandes (Ej.: 123456789×25 ó $123456789 \times 987654321$).
- Modelización con material manipulativo u otros modelos.
- Ensayar variantes del algoritmo.
- Comprobación numérica de propiedades algebraicas (Ej.: “*suma por diferencia, diferencia de cuadrados*”).
- Comprobación de regularidades en los resultados de algunos productos (Ejs.: cuadrados de números cuyas cifras son todas 1; multiplicar por la unidad seguida de ceros).
- Comprobación de las propiedades de la multiplicación (conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro; multiplicar por la unidad seguida de ceros).
- Operaciones combinadas sin y con paréntesis (disposición horizontal).
- Unidades de medida (longitud, superficie, tiempo, capacidad, masa, medidas angulares, monetarias):
- Composición y descomposición en múltiplos y submúltiplos
- Multiplicación por un número natural (medidas monetarias, medidas angulares, manos y dedos, sistema sexagesimal).
- Prueba de la división: $\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Cociente} + \text{Resto}$
- Multiplicación como subprocedimiento del algoritmo estándar escrito de la división.

- Cálculo escrito aproximado. (Ej.: calcular 250×50 con el algoritmo estándar escrito para aproximar el resultado de 251×49).
- Fracciones:
 - Obtención de fracciones equivalentes
 - Fracción como operador: “Calcula $5/8$ de 72”
 - Producto y división de fracciones
 - Cálculo de porcentajes
- Aplicación de fórmulas:
 - Cálculo del área de una figura plana dada la fórmula (cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, triángulo, hexágono regular, círculo,...).
 - Cálculo del área de cuerpos geométricos (poliedros regulares, prisma, cilindro).
 - Cálculo de la longitud de una circunferencia.
 - Cálculo del perímetro de un polígono con lados iguales.
 - Cálculo de la media aritmética cuando hay varios datos iguales.
- Operaciones con potencias. Cálculo aproximado de raíces
- Cambios de Escala.
- Descomposición de un número en factores primos (Ej.: el nº 143)
- Completar tablas de proporcionalidad.
- Resolución de ecuaciones de 2º grado con la fórmula (nivel de Secundaria)
- Uso del algoritmo estándar para justificar otros métodos de cálculo alternativos (Ej.: “ayúdate de lo que conoces sobre el algoritmo estándar para justificar el método del enrejado”).
- Uso del proceso general del algoritmo estándar para elaborar un programa informático (Ej.: en C++).
- Sumas reiteradas con un número elevado de sumandos. (Ej.: ver situación T3 en el apartado 7.3.5.1 del capítulo VII).
- Problemas aritméticos de enunciado icónico-verbal y verbal (una operación (la multiplicación); varias operaciones (una de ellas la multiplicación); elegir una operación entre varias).
- PAEIV/PAEV susceptibles de ser propuestos como si fueran situaciones reales no escolares (nunca podrán ser idénticas).
- “El producto de dos números consecutivos es 156. Encuéntralos”
- Búsqueda de reglas en los productos para la obtención rápida de resultados (Ej.: regla para multiplicar cualquier número por 9).
- Determinación de los múltiplos de un número. Cálculo del m.c.m.
- Justificación de regularidades en productos con números naturales concretos. (Ej.: situación S7 empleada en la consulta a expertos, apartado A.1.2 del anexo I).

6.3.3.2 Clasificación situacional inicial

Las situaciones expuestas en el apartado anterior son sometidas a una primera ordenación surgida de la reflexión preliminar realizada sobre el material recopilado. Esta clasificación inicial de situaciones se constituye al considerar, aún de forma intuitiva, las tres categorías epistemológicas descritas en el apartado 6.5.1 (Técnica, Analítica y Formal), además de hacer intervenir el contexto (escolar-no escolar) en la dimensión Técnica y de diferenciar en la esfera Formal entre la identificación, la explicación verbal y la aplicación de las propiedades y principios justificativos del algoritmo.

El esquema clasificatorio resultante, con un total de siete tipos de situaciones (ver apartado A.1.2 del anexo I), es sometido a discusión en la consulta a expertos, en la que se analiza sobre todo la exhaustividad de la tipología así como el carácter excluyente de las categorías.

6.3.3.3 Consulta a expertos: resultados y conclusiones

A continuación, exponemos un resumen de los principales resultados y conclusiones a las que hemos llegado tras la etapa de consulta a expertos y que han influido notablemente en la elaboración de la clasificación teórica final de situaciones. Estas conclusiones generales constituyen el eje con el que llegamos a concretar las estructuras epistemológica y fenomenológica del algoritmo, de las cuales surgen los criterios necesarios para una propuesta de clasificación de situaciones. Entre todas ellas, cabe destacar las siguientes:

(a) Identificamos dos formas de aproximación al algoritmo. Por un lado, la centrada en el tipo de uso dado al método de cálculo y por otro, la consideración del algoritmo en relación con los diferentes contextos y situaciones que le dan sentido. Es decir, conviene diferenciar entre los contextos y situaciones y el tipo de empleo del algoritmo, o, en otros términos, entre la faceta epistemológica y la fenomenológica.

(b) Desde un punto de vista epistemológico, las categorías de empleo dependen del conocimiento matemático. En el caso del algoritmo estándar escrito del producto se intuyen categorías de distinto tipo en las que el uso del algoritmo exige diferentes requisitos conceptuales. Lo mismo sucede desde la perspectiva fenomenológica.

Todas las categorías situacionales consideradas tras el análisis efectuado se caracterizan con precisión más adelante en el apartado 6.5 dedicado a la descripción de la clasificación elaborada.

(c) Las categorías situacionales a determinar han de ser objetivas, esto es, deben surgir de las características del propio conocimiento matemático y no depender de las particularidades del sujeto cognoscente. Las acciones del individuo no se toman como criterio para decidir la ubicación de una situación en una u otra categoría.

(d) Entre las propiedades de la tipología de situaciones no contemplamos la de ser una partición. Es decir, admitimos la posibilidad de que alguna situación puntual no se ajuste a ninguna categoría en particular y también que puedan existir tareas que participen de varios tipos situacionales.

(e) A pesar de alguna recomendación externa, no somos partidarios de restringir el campo situacional del algoritmo a las situaciones-problema donde se diga explícitamente que debe utilizarse dicho método de cálculo. Esta decisión reduciría en exceso el campo situacional y tendría consecuencias negativas para la valoración de la comprensión de los sujetos.

(f) Reconocemos la infinitud del conjunto situacional asociado al algoritmo pero a la vez entendemos que las distintas tareas pueden ordenarse en un número finito de categorías o tipos de situaciones. Este número, además, no es elevado como veremos.

(g) En línea con los planteamientos teóricos desarrollados, no contemplamos el uso mental del algoritmo estándar escrito como situación idónea con la que obtener información sobre la comprensión de los sujetos, precisamente por transcurrir en la esfera cognitiva en su faceta de actividad privada no observable. No obstante, ésta resulta una experiencia que, como todas, podrá incluirse en alguna categoría epistemológica y fenomenológica concreta.

(h) La distinción hecha inicialmente atendiendo a la naturaleza escolar de las situaciones y estableciendo dos bloques de tareas, escolares y no escolares, resulta en opinión de diversos expertos demasiado sutil y relativa. Las dimensiones con las que emplazar a las situaciones deberían ser independientes de factores y condicionantes externos al propio conocimiento matemático. En este sentido, el “grado de conciencia” al utilizar el algoritmo, en referencia a un uso procedimental o conceptual del mismo, es señalado como uno de los criterios que podría contemplarse para clasificar situaciones.

Estas conclusiones enunciadas en términos generales se especifican con la información contenida en los dos próximos apartados. Todo ello forma parte del proceso de aplicación práctica de la propuesta teórica para el estudio de la comprensión del conocimiento matemático presentada en este trabajo.

6.4 Estructuras del algoritmo de multiplicar

De acuerdo con lo expuesto en el apartado 5.2.2 del capítulo anterior, todo conocimiento matemático específico posee unas estructuras epistemológica y fenomenológica caracterizadoras que le son exclusivas, fruto de las distintas relaciones con otros conocimientos matemáticos y con las situaciones que le dan sentido. En este sentido, el análisis epistemológico y fenomenológico, tal como lo hemos presentado, constituye el medio que posibilita la identificación y delimitación de estas estructuras.

En este apartado se describen las estructuras epistemológica y fenomenológica identificadas para el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

6.4.1 Estructura epistemológica

En este apartado nos centramos en el estudio de la naturaleza y modo de existencia del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Para ello, tendremos en cuenta su carácter como procedimiento algorítmico así como las componentes subrayadas en el apartado 5.4.2 del capítulo V: sintaxis, conocimientos previos y relaciones.

A. Sobre los procedimientos algorítmicos

Este punto se concreta retomando las ideas recogidas en el apartado 3.2 del capítulo III acerca de la naturaleza de los algoritmos y procesos algorítmicos. Tan sólo añadiremos que el algoritmo matemático en su faceta de tópico escolar es considerado en este trabajo como un tipo de conocimiento matemático consolidado y aceptado por una comunidad científica cuya existencia resulta independiente del sujeto con pretensiones de comprensión. En este sentido, discrepamos con Vergnaud (1997) al afirmar que los algoritmos son esquemas². En nuestra opinión, el esquema proporciona una conducta o un comportamiento muy particular que el sujeto manifiesta ante determinadas situaciones. Y aunque tanto esquema como algoritmo puedan estar

² Vergnaud (1997) utiliza el término esquema para referirse a la organización invariante de conducta para cierta clase de situaciones.

compuestos de objetivos, expectativas, reglas, invariantes operacionales y posibilidades de inferencias, tal como indica este autor, creemos que son acepciones que hacen referencia a entidades de naturaleza diferente no identificables.

B. El algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Como procedimiento algorítmico que es, el algoritmo estándar escrito del producto participa de todas las características mencionadas en el punto anterior. Pero además, manifiesta las siguientes particularidades:

1. Sintaxis

Desde un punto de vista epistemológico, se considera al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales como un procedimiento de cálculo con una sintaxis claramente definida, resultado del proceso de refinamiento que ha venido experimentando durante siglos. En la actualidad, su registro escrito se reduce a la clásica y extendida representación en columnas. La notación empleada es la propia de la numeración indoarábica.

Somos conscientes de que la disposición usual que adoptan los factores al multiplicar con el algoritmo suele considerarse parte del propio procedimiento. Nos referimos a la recomendación de que ambos factores se sitúen en función de su tamaño en diferentes filas contiguas, disponiéndose el número mayor (multiplicando) por encima del menor (multiplicador) y siempre alineados a la derecha.

Esta recomendación, sin embargo, podría interpretarse también como una decisión a tomar previa a la aplicación de la secuencia algorítmica en sí, que si bien está relacionada con ella al mismo tiempo le sería ajena, en el sentido de que su aceptación o rechazo no afectaría al mecanismo del algoritmo. Es decir, que cualquier otra disposición de factores no-estándar (por ejemplo, sin justificación a la derecha o sin orden en los tamaños de los números) podría ser válida en principio como situación inicial para la aplicación del algoritmo estándar escrito del producto, o lo que es lo mismo, que la presentación concreta de los factores a multiplicar no formaría parte del algoritmo.

A decir verdad, no queda claro si la sugerencia para la disposición inicial de los factores surgió formando parte del propio proceso algorítmico para multiplicar o si, por el contrario, tuvo un origen posterior de carácter didáctico con el propósito de facilitar el aprendizaje del procedimiento por parte de los sujetos.

Sea como fuere, lo cierto es que la disposición inicial de los factores constituirá, tal como se verá, un elemento sintáctico relevante para la investigación en curso. Así, como se explica en el apartado 7.3.4.3 del capítulo VII, la disposición de los factores en la presentación de la multiplicación constituye un aspecto que influye en el uso del algoritmo y condiciona la comprensión de los sujetos (ver ejemplo de la figura 7.11).

2. Conocimientos previos

Dicho método de cálculo se sustenta en los principios de la numeración decimal, es decir: las cifras del 0 al 9, el agrupamiento decimal, el valor de posición, el cero y el agrupamiento multiplicativo (Gómez, 1999a). Todos ellos, junto con los hechos numéricos básicos³ (tablas de multiplicar) y el algoritmo estándar escrito para la suma

³ Resultados exactos cuyo uso es necesario para la aplicación del algoritmo.

de números naturales, constituyen la base de conocimientos previos que conforman el algoritmo.

Por su parte, Roa (2001) subraya como conocimientos mínimos necesarios para una comprensión satisfactoria del algoritmo, la estructura del sistema decimal de numeración, la descomposición de números, las tablas de multiplicar y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

3. Relaciones

Los conocimientos previos, entendidos como elementos básicos o componentes constitutivos del algoritmo, aparecen conectados o relacionados entre sí dentro del mismo sistema de representación simbólico.

Una de las características de los algoritmos de cálculo elemental, también del estándar escrito para el producto, es la de estar formados por un conjunto de pasos elementales secuencialmente distribuidos y conectados entre sí de un modo concreto.

Algunas de las relaciones que se establecen entre los conocimientos integrantes del algoritmo pueden encontrarse en las descripciones realizadas por algunos autores (Gómez, 1988; Maza, 1991; Roa, 2001; Gairín y Sancho, 2002) sobre el proceso de construcción y refinamiento experimentado por el algoritmo hasta alcanzar su estado actual. Un primer análisis de estas relaciones nos permite identificar algunas diferencias y similitudes entre ellas de carácter epistemológico, lo que nos conduce a su vez al establecimiento de dos grupos de relaciones claramente diferenciados:

Grupo 1: Relaciones externas (nivel sintáctico o técnico)

Las relaciones que incluimos en este grupo son las que se muestran de forma ostensiva al recorrer cada uno de los pasos de la secuencia algorítmica en el sentido establecido. El proceso implicado en el algoritmo se puede resumir en términos similares a los siguientes:

Se procede de derecha a izquierda y de arriba abajo, multiplicándose cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando. Si el resultado obtenido al multiplicar dos cifras concretas (una del multiplicador por otra del multiplicando), excede de 10 unidades, las correspondientes decenas son almacenadas temporalmente (por ejemplo, anotadas encima de la siguiente cifra del multiplicando) y sumadas después al resultado del multiplicar la misma cifra del multiplicador con la siguiente del multiplicando. De este modo, cada unidad del resultado de un hecho numérico básico se va disponiendo a la izquierda de la unidad del resultado obtenido en el paso precedente. Las decenas, por su parte, se van “llevando” a las cifras siguientes. Este proceso continúa hasta llegar a la última cifra del multiplicando, donde las posibles decenas del producto elemental obtenido se situarán esta vez a la izquierda de las unidades. Los pasos contiguos suelen estar, pues, conectados por las “llevadas”, actuando éstas como vínculo de unión entre ellos.

Una vez concluido el procedimiento con las unidades del multiplicador, del que se deriva el resultado del primer producto parcial, se procede de igual modo con las decenas del multiplicador pero con la salvedad de que ahora el resultado parcial obtenido estará desplazado un lugar a la izquierda en relación con el situado en la fila superior.

Finalmente, con esta disposición se lleva a cabo la adición conjunta de todos los resultados parciales con el algoritmo estándar escrito para la suma de números naturales.

Grupo 2: Relaciones internas (nivel semántico o formal)

Principalmente, la descomposición de los factores en combinaciones lineales de potencias de diez (sistema de numeración decimal posicional), la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y la suma de cada uno de los sumandos resultantes.

Estos dos grupos de relaciones, fácilmente apreciables en multitud de trabajos desarrollados en el ámbito de la didáctica de la aritmética elemental, no cubren, sin embargo, la totalidad de relaciones posibles entre los conocimientos previos vinculados al algoritmo. En efecto, podemos considerar un tercer grupo diferente a los anteriores con las siguientes características:

Grupo 3: Relaciones externas (nivel analítico)

Grupo constituido por todas aquellas relaciones que siendo externas no tienen cabida, por no ser las usuales establecidas, en el Grupo 1. En otros términos, la *aplicación del algoritmo*, en el sentido ‘naive’ y usual de la expresión, no exige una conciencia de las relaciones incluidas en este grupo. Nos referimos a relaciones del tipo siguiente, cuya existencia en el algoritmo es obvia:

- Cifras iguales en el multiplicador dan lugar a resultados parciales visiblemente idénticos salvo por la posición.
- El número total de resultados parciales depende del número de cifras del multiplicador.
- El número de cifras de los resultados parciales (su extensión o tamaño) depende del número de cifras del multiplicando.
- Cada cifra del multiplicando siempre es multiplicada por todas las cifras del multiplicador. Las cifras del multiplicando son, por tanto, un vínculo de unión entre las cifras del multiplicador.
- Cada cifra del resultado final depende (no es más que la suma) de las cifras dispuestas por encima en la misma columna.
- El número de cifras del resultado final depende conjuntamente del número de cifras del multiplicando y del multiplicador.
- El producto de una de las cifras del multiplicador con una de las cifras del multiplicando, además de un resultado, proporciona información acerca de la posición relativa que ha de ocupar ese resultado entre el resto de cifras que configuran el espacio de resultados parciales. De forma más concreta, cada cifra del multiplicador apunta a una fila de resultados parciales y cada cifra del multiplicando hace lo propio con unas determinadas cifras de resultados parciales. Al multiplicar ambas cifras, se determina un resultado y una posición única que lo sitúa entre el resto de cifras de los resultados parciales.

6.4.2 Estructura fenomenológica

Nos fijamos ahora en el algoritmo estándar escrito del producto y su relación con las situaciones que le dan sentido de acuerdo con lo establecido en este sentido en los

apartados 5.2.2 y 5.4.3 del capítulo V. La estructura fenomenológica que se establece a través de la identificación y delimitación de los aspectos relevantes que caracterizan la relación entre el algoritmo y las situaciones que le dan sentido, si bien puede hacerse extensible a otros conocimientos matemáticos, será específica del algoritmo en cuanto que las situaciones consideradas son las propias del campo situacional asociado a este procedimiento. En concreto, en este apartado se especifican las características generales de las situaciones que se contemplan en relación con el algoritmo. Estas consideraciones preliminares son la referencia desde la que se establece el criterio clasificatorio que permite concretar las dimensiones fenomenológicas concretas descritas en el apartado 6.5.2 del presente capítulo.

En lo que respecta a la faceta fenomenológica, conviene destacar primeramente que las tareas directamente vinculadas con el algoritmo estándar escrito de la multiplicación son las que van a conformar el conjunto de situaciones que nos interesa clasificar. El resto de tareas, sin vinculación alguna con el algoritmo o bien relacionadas indirectamente con él a través de otros conocimientos matemáticos, no serán consideradas como pertenecientes al conjunto situacional asociado a este método de cálculo.

Para aclarar esta última afirmación, presentamos un ejemplo concreto del caso que nos ocupa. En la figura 6.1 aparecen dos situaciones (S_1 y S_2) muy similares y catalogables como pertenecientes al conjunto situacional del algoritmo (CS_A), puesto que su posible utilización en ellas parece contribuir de algún modo a la resolución de cada una de estas tareas. No obstante, entendemos que existe una diferencia sustancial entre la primera y la segunda; diferencia que tiene que ver con el número de conexiones que el resolutor debe establecer para vincular la tarea en sí con el algoritmo. Así, el primer caso exige la secuencia de vínculos *situación– fórmula del área de un triángulo – algoritmo*, mientras que el segundo sólo requiere la conexión *situación – algoritmo*. En este último caso, el propio enunciado hace evidente el enlace *situación – fórmula del área de un triángulo* por lo que la utilización del algoritmo es más directa; se tiene de este modo una única conexión problemática, que será la que deba establecer el sujeto. En definitiva, podríamos hablar de los dos tipos de situaciones siguientes:

- Situaciones de vinculación directa con el algoritmo: La relación situación-algoritmo se establece de un modo directo sin la presencia de otros conocimientos matemáticos que hacen de intermediarios.
- Situaciones de vinculación indirecta con el algoritmo: La relación se determina mediante conocimientos matemáticos auxiliares que hacen las veces de intermediarios entre la situación a resolver y el algoritmo. La cadena establecida incluirá conexiones totalmente ajenas al algoritmo.

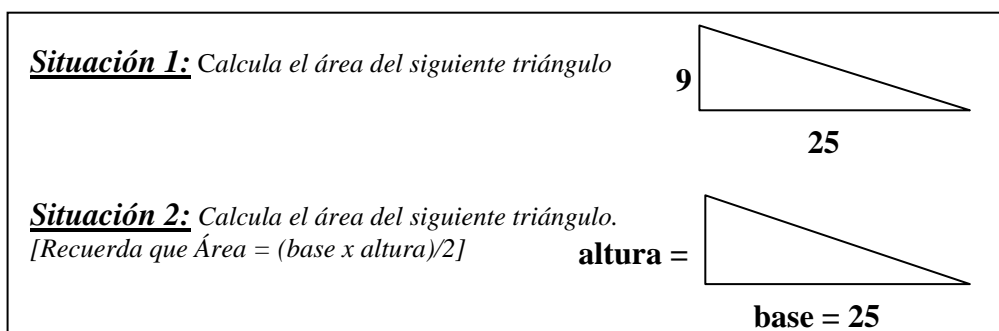


Figura 6.1.- Dos situaciones diferentes: $S_1 \notin CS_A$ y $S_2 \in CS_A$

Esta distinción, en apariencia sutil y sin importancia, nos va a permitir reducir considerablemente el campo de situaciones del algoritmo a sólo aquellas en las que la conexión con el método de cálculo es directa o sin intermediarios. En principio, estas situaciones son las que conforman el campo situacional que buscamos caracterizar para el algoritmo, decisión que bien podría tomarse también en el caso de cualquier otro conocimiento matemático.

Por otra parte, existen situaciones donde se requiere emplear el algoritmo estándar escrito del producto desde el inicio del proceso de resolución. Se hace ostensible desde el propio enunciado. De otro lado, existen tareas donde el algoritmo se muestra en una etapa concreta de la resolución, no inicial sino intermedia o final. Esta diferencia también es destacada por otros autores como Assude (1996) para el caso del objeto matemático *raíz cuadrada*.

Identificamos otro aspecto de la relación entre el algoritmo y sus situaciones asociadas. Nos referimos al hecho de que algunas situaciones exigen un uso obligado del algoritmo, esto es, no son resolubles a menos que se aplique de algún modo este método de cálculo concreto. En otras situaciones, en cambio, el empleo del algoritmo no es más que una alternativa de resolución, existiendo otros conocimientos matemáticos cuyo uso también conduce a la solución.

6.5 Criterios clasificatorios y categorías de situaciones

Las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, descritas en el apartado anterior, permiten definir criterios clasificatorios con los que establecer dimensiones o categorías de situaciones utilizables desde un punto de vista práctico para el diagnóstico y evaluación de la comprensión.

La clasificación de situaciones que se presenta en este apartado surge de la base de estas estructuras vinculadas al algoritmo. Dicha clasificación es inicial y dado que se realiza a nivel teórico debe interpretarse como provisional.

6.5.1 Categorías epistemológicas

La consideración de las conexiones o relaciones entre los conocimientos previos del algoritmo nos va a proporcionar el criterio epistemológico fundamental con el que clasificar las diversas situaciones asociadas al algoritmo.

Se vislumbran unas categorías Técnica, Analítica y Formal, pendientes de caracterizar teóricamente, que son específicas del algoritmo.

El **criterio epistemológico**, que toma en consideración las posibles relaciones detectadas entre los componentes internos del algoritmo como condicionante del tipo de utilización que el sujeto hace de él cuando se enfrenta a una situación particular, suministra las siguientes categorías o dimensiones:

(1) *Categoría Técnica*: Reúne a todas aquellas situaciones donde el algoritmo se emplea de forma mecánica o rutinaria como un instrumento de cálculo. La comprensión exigida para solventarlas se limita al *dominio* de los diversos pasos que conforman el procedimiento completo. Las relaciones a establecer entre los elementos básicos del

algoritmo son las usuales que posibilitan recorrer la secuencia procedimental establecida en el sentido apropiado. Una tarea propia de esta categoría sería:

$$\begin{array}{r} \text{Calcula } 12 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

(2) *Categoría Analítica*: En ella se incluyen las situaciones que exigen para su resolución un uso reflexivo del algoritmo. No basta con la simple aplicación rutinaria mencionada en la categoría anterior; se requiere además de un análisis, de una reflexión sobre la estructura y el funcionamiento externos del método de cálculo, lo cual supone:

- (a) La consideración consciente/explicita y permanente de las relaciones usuales.
- (b) El empleo intencionado de relaciones externas no usuales entre las distintas componentes del algoritmo.

Por ejemplo:

Encuentra las cifras que completan la multiplicación:

$$\begin{array}{r} \square\square \\ \times 11 \\ \hline 1\square \\ \square 2 \\ \hline \square\square\square \end{array}$$

(3) *Categoría Formal*: Constituida por todas las situaciones que precisan, para poder resolverse, de la utilización de los principios básicos en los que se fundamenta el algoritmo, en concreto, en las características del sistema de numeración posicional y en las propiedades distributiva y conmutativa. Las tareas incluidas en esta categoría demandan del resolutor un conocimiento explícito de las relaciones internas que sustentan y validan el mecanismo subyacente al algoritmo. Un ejemplo sería:

Observa la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 11 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 132 \end{array}$$

¿Por qué se desplaza el resultado del 2º producto parcial un lugar a la izquierda?

A las situaciones que permiten ser resueltas empleando de más de una forma el método de cálculo elegido las hemos denominado *situaciones frontera* y pueden pertenecer a varias categorías.

6.5.2 Categorías fenomenológicas

Dentro del grupo de situaciones delimitado por la estructura fenomenológica del algoritmo, tomaremos como **criterio fenomenológico** fundamental de clasificación la posibilidad de que el algoritmo intervenga en una situación concreta de forma necesaria o como alternativa entre varios conocimientos matemáticos⁴.

En principio, de acuerdo con lo expuesto distinguimos los siguientes tipos de situaciones:

Situaciones Exclusivas: Son aquellas situaciones donde el empleo del algoritmo estándar escrito para multiplicar números naturales se hace necesario o por lo menos muy evidente para el sujeto. Es decir, el alumno ve con total claridad que la situación problemática a la que se enfrenta puede quedar resuelta si utiliza el algoritmo, o lo que es lo mismo, la identifica de forma inmediata como perteneciente al campo de situaciones que requieren del uso del algoritmo para su resolución. En este grupo cabe distinguir, a su vez, dos subgrupos⁵. Uno, constituido por las denominadas situaciones Preferentes en las que el algoritmo se hace presente desde el primer momento al aparecer como un fin en sí mismo. Son situaciones en las que se proponen cuestiones relativas a este método de cálculo. En cierto sentido, podríamos decir que él es el protagonista de la situación. Transcurren en un entorno matemático puro. La situación tomada como ejemplo en la categoría Técnica también lo es de este subgrupo.

El segundo subgrupo estaría constituido por las llamadas situaciones de Participación, donde el empleo del algoritmo se muestra evidente en una determinada etapa dentro del proceso de resolución de la situación problema. En estas situaciones el algoritmo constituye un medio que posibilita llegar a la solución, cumpliendo un papel secundario puesto que el centro de interés no está depositado en él, aunque bien es cierto que participa en el proceso de resolución. En el ejemplo recogido en la figura 6.1, S₂ es una situación Exclusiva de Participación del algoritmo. Por la propia naturaleza de los procedimientos de cálculo la mayoría de las situaciones asociadas al algoritmo estarán incluidas en este grupo.

En un ámbito distinto, los tests de comprensión asociados a una demostración matemática (Conradie y Frith, 2000) sería otro ejemplo de situación Exclusiva, aunque para el caso concreto de la demostración.

Situaciones No-Exclusivas: Son aquellas situaciones-problema que pueden resolverse de diferentes formas, una de ellas mediante el empleo del algoritmo estándar escrito de la multiplicación. Son situaciones en las que existe la opción de que el resolutor elija utilizar el algoritmo como camino más adecuado para llegar a la solución. De un modo más preciso, ante una situación No-Exclusiva, donde el empleo del algoritmo no es del todo evidente, el sujeto tendrá que:

- (a) identificar la situación como apta para poder ser resuelta con el algoritmo;

⁴ Convendría en estudios posteriores decidir y justificar si este criterio puede o no extenderse a cualquier conocimiento matemático.

⁵ Estos subgrupos situacionales, surgidos del ámbito teórico, se verán desestimados tras la primera confrontación empírica. Como se expone en el apartado 7.3.4.2 del capítulo VII, el segundo estudio exploratorio realizado como parte de la investigación pone de manifiesto que la dualidad Preferente/de Participación resulta demasiado sutil y de poca relevancia para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del algoritmo.

(b) decidir emplear este método de cálculo concreto en lugar de otros conocimientos matemáticos alternativos que también comparten la propiedad de que a través de ellos es posible alcanzar la solución.

Precisamente, esta posibilidad en el uso del algoritmo es la que permite que podamos considerar también a las situaciones No-Exclusivas como pertenecientes al campo situacional asociado al algoritmo, a pesar de que su utilización en ellas no esté garantizada. Además, a través de estas situaciones se puede observar el referente teórico de la competencia interna entre conocimientos matemáticos y la comprensión de los mismos en función de la disponibilidad a ser empleados.

Al igual que en el caso de las situaciones Exclusivas, las No-Exclusivas pueden clasificarse en dos tipos: *situaciones modelo* y *situaciones naturales*.⁶ El primer tipo está formado por aquellas situaciones No-Exclusivas en las que el sujeto ha logrado establecer una fuerte conexión entre ellas y el algoritmo de la multiplicación. Esta asociación podría estar motivada por el elevado número de experiencias escolares que previamente ha tenido el sujeto con determinadas situaciones particulares (tareas escolares clásicas) presentadas por el profesor para conseguir esa vinculación deseada entre situación y algoritmo. El resultado que se busca es lograr en el sujeto una identificación casi inmediata entre algunas situaciones, siempre No-Exclusivas, y el empleo del algoritmo como método que permite su resolución. Los PAEV constituyen un ejemplo de situación no-exclusiva modélica o típica en la utilización de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas básicas.

Por su parte, las situaciones naturales son aquellas situaciones no-exclusivas que no suelen ser empleadas por el profesor en el aula como problemas modelo para utilizar el algoritmo. Es previsible que la posible conexión que establezca el sujeto entre estas situaciones y el algoritmo sea más natural al estar menos condicionada o educada.

Situación No-Exclusiva Modelo:

Juan tiene 12 cajas de bombones. En cada caja hay 11 unidades.
¿Cuántos bombones tiene Juan en total?

Situación No-Exclusiva Natural:

El producto de dos números naturales consecutivos es 132.
Encuétralos.

Los criterios de clasificación descritos en esta etapa del estudio nos permiten situar a cada situación en relación con las demás. Asimismo, el modelo circular de la figura 6.2 posibilita visualizar de forma clara la posición relativa de las categorías y la ubicación de las situaciones en ellas.

⁶ Al igual que sucede con las situaciones Exclusivas, la distinción entre situaciones No-Exclusivas Modelo y Naturales no resultará de interés para establecer diferencias entre sujetos en cuanto a su comprensión, por lo que será omitida en la nueva categorización situacional que surge tras la fase de la investigación desarrollada en el capítulo VII.

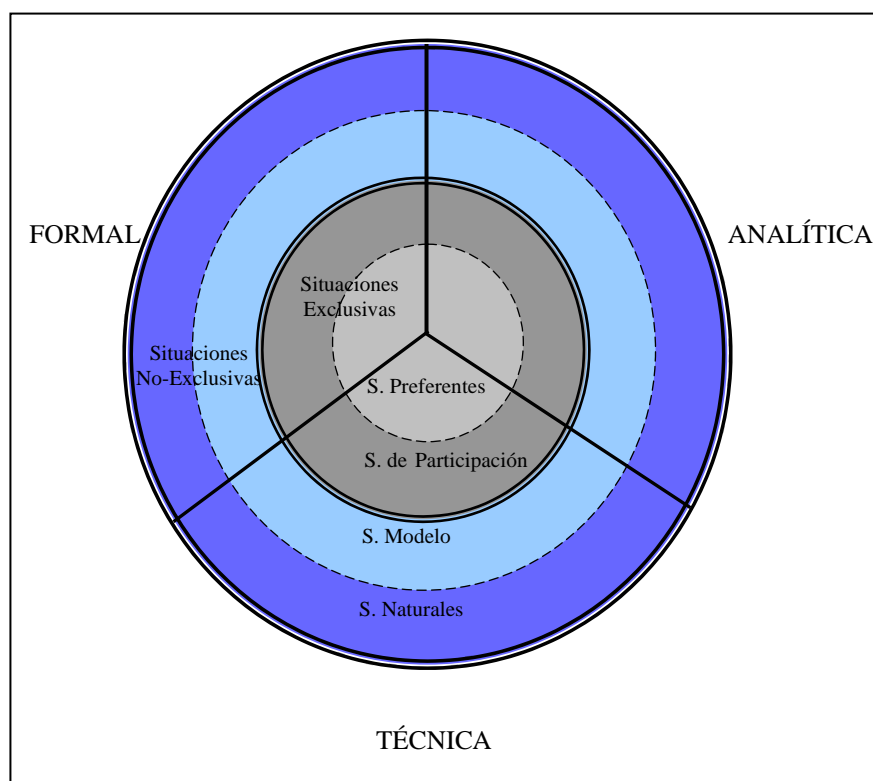


Figura 6.2.- Una primera clasificación provisional de situaciones vinculadas al algoritmo

6.6 Dificultades y limitaciones

Surgen tres categorías para las que no hemos podido encontrar ningún ejemplo: situaciones Exclusivas de Participación de categoría Analítica; situaciones No-Exclusivas Modelo de categoría Analítica y situaciones No-Exclusivas Modelo de categoría Formal.

Como hemos mencionado en la sección anterior, la categoría Analítica de situaciones Exclusivas de Participación incluye aquellas situaciones en las que el empleo del algoritmo se muestra evidente en una determinada fase del proceso de resolución, siendo además dicho empleo analítico. En este punto, nos surge la duda de conocer si realmente existen situaciones Exclusivas de Participación de categoría Analítica. En otros términos: ¿en qué situaciones Exclusivas resulta necesario utilizar el algoritmo de forma Analítica en un paso concreto de la resolución? En principio, de todas las situaciones identificadas no hemos encontrado ninguna que se ajuste a esta categoría. En caso de existir, nos atrevemos a afirmar que constituirían un grupo fenomenológico muy reducido con el que quizá ni tan siquiera se llegue a aportar una información sustancial acerca de la comprensión de los sujetos.

Sin duda, estamos ante una categoría anómala surgida de una propuesta de categorización situacional puramente teórica. Aunque en un principio dejemos tal cual la clasificación inicial de categorías para abordar la fase empírica, ya se vislumbra la necesidad de realizar en ella algunas modificaciones, sobre todo en las categorías con anomalías.

Por otra parte, la no identificación de situaciones No-Exclusivas Modelo de categoría Analítica y Formal ha de entenderse como uno de los resultados a los que

llegamos tras el análisis epistemológico y fenomenológico del algoritmo estándar escrito del producto. En efecto, en los libros de texto no hemos detectado una intención clara de uso de situaciones No-Exclusivas para que los alumnos empleen el algoritmo de un modo Analítico o Formal. El principal objetivo didáctico de tales situaciones no es precisamente el de favorecer el aprendizaje del algoritmo con comprensión, por lo que consideramos que no pueden catalogarse como situaciones No-Exclusivas Modelo. Las pocas tareas detectadas encaminadas a fomentar las facetas Analítica y Formal de empleo del algoritmo se reducen al ámbito Exclusivo. Esta situación identificada en los libros de texto bien podría hacerse extensible al trabajo tradicional desarrollado por el profesor en el aula de matemáticas.

Estas circunstancias ponen de manifiesto que el campo situacional genérico-referencial obtenido como consecuencia del análisis situacional realizado no abarca la totalidad de situaciones en las que podría emplearse el algoritmo estándar escrito de la multiplicación. Por tanto, estas tres categorías no podrán ser consideradas en el estudio empírico puesto que de ellas no conocemos ninguna situación para proponer a los alumnos.

En realidad, las categorías incluyen un número desigual de situaciones, apareciendo unas bajo las que se reúnen una cantidad muy superior de tareas en comparación con otras. Sin duda alguna, la categoría más extensa es la constituida por las situaciones exclusivas de participación de utilización técnica del algoritmo. Entendemos que la causa que provoca estas diferencias se encuentra en la propia naturaleza del método de cálculo que estamos considerando y no en las posibles deficiencias de la descripción de situaciones realizada.

Conviene recordar una vez más que todo el estudio anterior ha sido llevado a cabo a nivel exclusivamente teórico por lo que habrá que considerarlo con las debidas precauciones dado que posee un carácter provisional.

Se requieren estudios empíricos exploratorios para poner de manifiesto la validez de la ordenación propuesta, no ya a nivel teórico sino también a nivel práctico. En concreto, interesa que las categorías situacionales surgidas del ámbito fenómeno-epistemológico se reflejen también en el plano cognitivo. Esto garantizaría, entre otras cosas, su utilidad como herramienta para discriminar a los sujetos respecto a su comprensión del algoritmo.

Identificamos, entonces, dos ámbitos de actuación: uno, fenómeno-epistemológico, y otro cognitivo. La operatividad de la Aproximación propuesta pasa por documentar la extensión del primer plano al segundo.

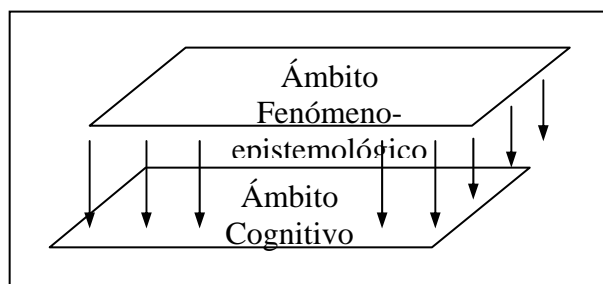


Figura 6.3.-Ámbitos de acción en el proceso de operativización de la Aproximación propuesta.

Por otra parte, la unicidad de la categorización establecida no queda garantizada porque pensamos que no puede certificarse algo así en una propuesta de ordenación situacional. No obstante, lo que sí podemos defender es la idoneidad de la misma en cuanto que proviene de la epistemología y fenomenología del propio conocimiento matemático en estudio.

6.7 Resumen y conclusiones para la investigación

Tras realizar los análisis epistemológico y fenomenológico correspondientes al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales hemos identificado un conjunto extenso de situaciones⁷ donde es posible emplear dicho método de cálculo para resolverlas. Este conjunto situacional genérico, si bien no es completo⁸, podría considerarse como representativo de la totalidad de situaciones en las que aparece el algoritmo⁹.

El siguiente paso ha consistido en tratar de agrupar las distintas situaciones, en principio diferentes unas de otras, en categorías concretas que surgen de una primera reflexión teórica acerca de cómo y dónde se emplea el algoritmo estándar de la multiplicación, aspectos éstos que pueden ser observados directamente por el investigador. Este intento de clasificación de situaciones lo hacemos con el propósito de reducir el campo situacional hasta hacerlo operativo con vistas a la observación, análisis e interpretación de respuestas, como vía de acceso al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del algoritmo elegido, sin perder por ello la representatividad de las situaciones elegidas.

6.7.1 Cuestiones abiertas

El estudio desarrollado en este capítulo deja pendientes algunas cuestiones para la siguiente fase de la investigación. Así por ejemplo, la operatividad exige que las situaciones sean, por un lado, de lo más representativas dentro del conjunto genérico, y por otro, con la suficiente potencialidad como para garantizar de los sujetos una diversidad (controlada) de respuestas que permita tras su análisis una valoración precisa de la comprensión, esto es, potencialidad en cuanto a instrumento de recogida de información (Webb, 1992; Giménez, 1997). De forma específica, se requieren situaciones:

- Que permitan mostrar indicios claros sobre la comprensión de los sujetos a través de las acciones que realizan en su intento por resolverlas. La producción escrita, los ocasionales y espontáneos comentarios verbales que la acompañan y en menor medida el comportamiento externo del sujeto frente a la tarea, deberían proporcionar la información necesaria desde la que extraer resultados acerca de la comprensión del individuo.
- Que, aún no siendo posible lo anterior, al menos inviten al alumno por mediación del investigador a dar explicaciones elaboradas (según su nivel) del porqué de sus acciones

⁷ Ver apartado 6.3.3.1 del presente capítulo.

⁸ Hecho que es reconocido como una limitación propia del análisis epistemológico y fenomenológico asociado a cualquier conocimiento matemático, según se expone en el apartado 5.4.6 del capítulo V.

⁹ Tal como se argumenta en el apartado 5.4.1 del capítulo V, las fuentes consultadas para el análisis epistemológico y fenomenológico nos proporcionan una cierta garantía, quizá la máxima que podamos alcanzar, de esta representatividad.

y a justificar la idoneidad del proceso empleado en la resolución de la tarea. En este sentido, no interesa que el alumno se limite únicamente a describir verbalmente unas acciones ya constatadas al observar cómo resolvía la tarea.

- Que lleven asociadas un conjunto variado, aunque controlado, de respuestas posibles.
- Que sean, en lo posible, de enunciado y formato simples, sencillas de entender y sin distractores ni elementos superfluos¹⁰.

En resumen, queda pendiente para la fase empírica de la investigación la comprobación de dos aspectos fundamentales:

- (a) la idoneidad de las categorías situacionales, con la posibilidad abierta para el refinamiento o el ajuste al plano cognitivo de la clasificación situacional original;
- (b) la selección y posterior comprobación de la adecuación de las situaciones seleccionadas como instrumentos de observación para el diagnóstico y evaluación de la comprensión.

6.7.2 Conexión con la fase empírica

En el capítulo VII se exponen los aspectos fundamentales de los estudios empíricos exploratorios desarrollados como parte del proceso de aplicación de la propuesta para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático presentada en el capítulo V. A través de ellos se pretende continuar con el proceso de operativización de la Aproximación, tratando para ello las cuestiones mencionadas en el apartado anterior, al objeto de garantizar la extensión de las categorías y situaciones identificadas en el ámbito fenómeno-epistemológico al plano cognitivo y de este modo asegurar su adecuación para la valoración de la comprensión. En concreto, se busca contrastar empíricamente la relevancia cognitiva de los criterios epistemológico y fenomenológico contemplados, así como la idoneidad de la clasificación situacional y de las categorías obtenidas como marco interpretativo de referencia para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del algoritmo.

Hasta aquí hemos ordenado el conjunto situacional asociado al algoritmo y ha resultado un total de 12 categorías diferentes. En la siguiente fase de la investigación se trata de perfilar estas categorías y seleccionar en cada una de ellas un representante de grupo (o varios). Tal como se expone en el apartado 7.3 del siguiente capítulo, la clasificación inicial de tareas surgida de la reflexión teórica desarrollada en este capítulo y en los precedentes se toma de referencia para el desarrollo del segundo de los estudios empíricos exploratorios. Seguidamente, una vez depuradas las categorías y estudiada la adecuación de las situaciones seleccionadas, se lleva a cabo un nuevo estudio empírico (capítulo VIII) con el propósito de obtener información precisa sobre la comprensión que manifiestan los sujetos sobre el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. La figura 6.4 recoge el esquema que resume lo realizado en este capítulo y su conexión con el siguiente.

¹⁰ Hemos de subrayar que no todas las situaciones o tareas a emplear tienen porqué ser un problema para el sujeto, en el sentido estricto del término *problema*. Asimismo, conviene precisar que nuestra intención no es la de proponer una clasificación de tipos de problemas similar a las que mencionan autores como Blanco (1993), Puig (1996) o Carrillo (1998), entre otros.

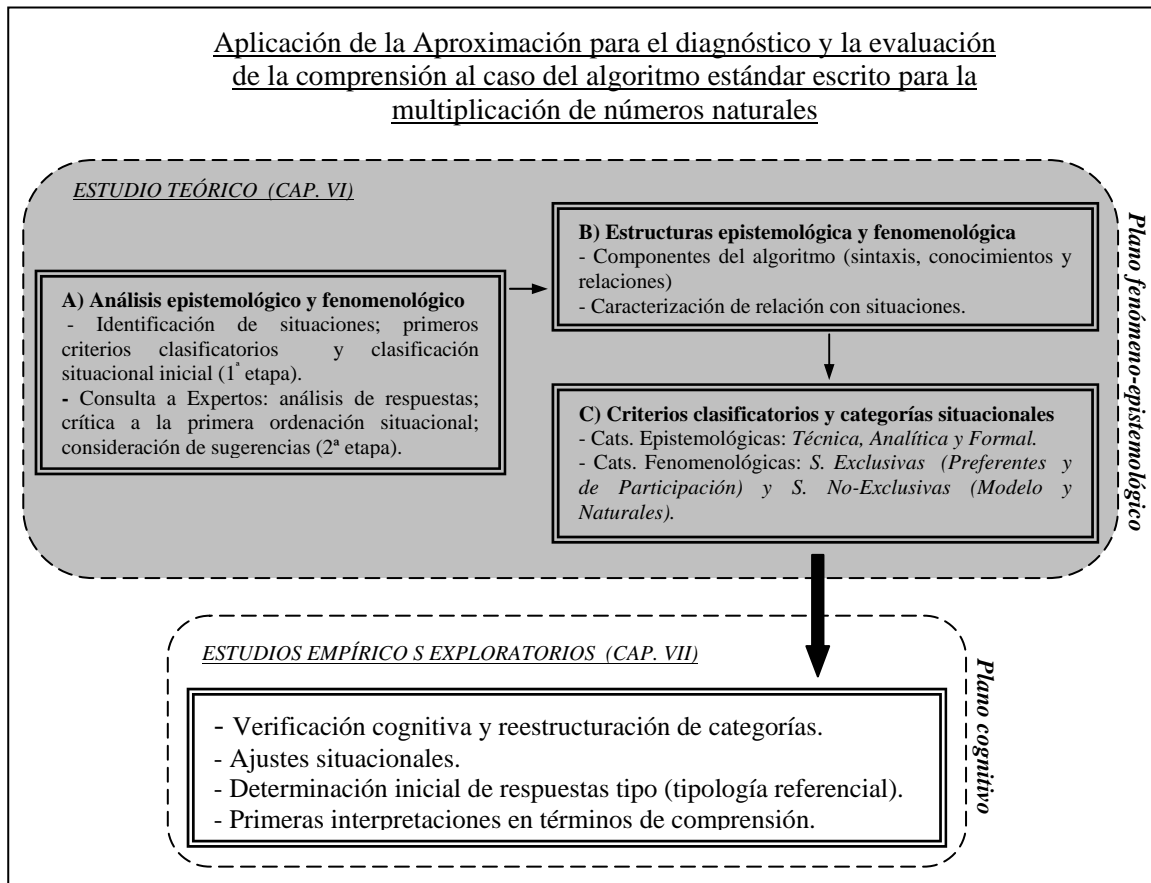


Figura 6.4.- Resumen de la primera etapa del proceso de aplicación de la Aproximación y su conexión con la segunda.

CAPÍTULO VIII

SEGUNDO ESTUDIO EMPÍRICO

8.1 Introducción

Los estudios exploratorios descritos en el capítulo anterior han supuesto un primer acercamiento empírico en el proceso de aplicación de la propuesta planteada en el capítulo V para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático al caso del algoritmo estándar escrito de la multiplicación de números naturales. Dichas experiencias nos han permitido:

- refinar la categorización situacional establecida a partir de los análisis epistemológicos y fenomenológicos desarrollados en el capítulo VI;
- extraer del campo situacional asociado al algoritmo de la multiplicación una muestra de situaciones adecuadas para la valoración de la comprensión;
- establecer comportamientos y respuestas tipo provisionales e interpretables en términos de comprensión;
- contrastar la potencialidad de la entrevista semiestructurada sobre cuestionario escrito como procedimiento metodológico adecuado para la recogida de información sobre comprensión.

Los resultados obtenidos en ambos estudios exploratorios han servido de base para el diseño y desarrollo del estudio empírico que se presenta en este capítulo; un estudio que vamos a considerar definitivo y con el que vamos a cerrar el informe de esta etapa de la investigación, aunque advirtiendo que se trata de un paso más en el largo proceso de aproximación al diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático bajo el enfoque particular que hemos adoptado. En este segundo estudio empírico se exponen los detalles de la experiencia realizada en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En esencia, se trata de un estudio cualitativo transversal con enfoque de presente donde se describe la situación de la comprensión que sobre dicho conocimiento matemático manifiestan los sujetos de una muestra reducida de alumnos elegida intencionalmente para los propósitos que se indican en el apartado 8.2. A partir de esta información se profundiza en las características de la comprensión del algoritmo, en particular, y del conocimiento matemático en general.

Las cuestiones abiertas heredadas de los estudios exploratorios previos junto con las hipótesis de investigación todavía pendientes de confirmación constituyen la justificación genérica para el desarrollo de esta nueva experiencia.

En la primera parte del capítulo se exponen, por este orden, el propósito concreto del estudio, la metodología empleada, las características de la muestra y las particularidades

del instrumento utilizado para la recogida de datos. A continuación, se presentan el análisis de las respuestas recopiladas tras la aplicación del instrumento, la interpretación de las mismas en términos de comprensión y los distintos resultados y conclusiones obtenidos. El capítulo finaliza con una revisión de los logros alcanzados en el estudio en relación con los objetivos e hipótesis de investigación.

8.2 Propósito del estudio

En el capítulo anterior hemos puesto de manifiesto, como consecuencia del nivel de análisis desarrollado, la existencia de datos, matices y aspectos diversos acerca de la comprensión del algoritmo estándar escrito del producto que hasta ahora han permanecido ocultos o no reconocidos en el seno de la comunidad de investigadores en Educación Matemática¹. Este hecho nos sitúa en una posición favorable, en cuanto a justificación se refiere, para determinar, de forma precisa y detallada, diferentes estados y perfiles de comprensión del algoritmo, los cuales vendrán caracterizados en términos de usos del conocimiento en cuestión y de acuerdo con la categorización situacional obtenida en los estudios exploratorios precedentes. En consecuencia, además de contribuir a la consecución completa del objetivo metodológico [OM₁], ya cubierto parcialmente en los capítulos VI y VII, por el que se pretende mostrar la operatividad de la Aproximación propuesta para el estudio de la comprensión del conocimiento matemático, tratamos de alcanzar el objetivo empírico [OE], por el que se pretende *identificar, describir y caracterizar posibles estados y perfiles de comprensión tipo en los sujetos en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales y obtener a partir de ellos información específica sobre características y aspectos particulares de la comprensión de este conocimiento matemático.*

Además, nos interesa aportar nueva información sobre las particularidades de la comprensión del algoritmo. En concreto, profundizar en la naturaleza de los estados de comprensión identificados y de las relaciones entre ellos, así como en las diferencias entre individuos de acuerdo a sus niveles y edades.

Por último, a partir de los resultados y conclusiones específicas sobre la comprensión del algoritmo de multiplicar, pretendemos extraer conclusiones generales referentes a la comprensión del conocimiento matemático y contribuir con ello a la consecución del objetivo complementario (c), que, como se recordará (apartado 1.5.1.3 del capítulo I), se orienta a *mostrar la pertinencia y eficacia de los estudios sobre comprensión sustentados en marcos teóricos integradores y operativos y centrados en conocimientos matemáticos específicos para la obtención de información acerca del fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático considerado en términos genéricos.*

Los objetivos mencionados se alcanzarán contrastando la bondad de las hipótesis II y IV, enunciadas en el apartado 1.5.2 del capítulo I en los siguientes términos:

II. *Resulta posible abordar los problemas relativos a los distintos aspectos vinculados con la comprensión de conocimientos matemáticos específicos, incluso*

¹ Al menos entre los antecedentes específicos revisados y mencionados en el capítulo III del presente informe.

los de naturaleza interna, mediante la elaboración y aplicación de aproximaciones de carácter teórico-metodológico centradas en el estudio de lo observable.

IV. *En el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales se identifican distintas facetas de comprensión, de origen epistemológico y también fenomenológico, que permiten la descripción de diferentes estados y perfiles de comprensión en los sujetos.*

Los logros alcanzados en los capítulos precedentes en relación con la propuesta metodológica planteada y con la organización del campo situacional del algoritmo de acuerdo a criterios epistemológicos y fenomenológicos concretos, han de verse reflejados ahora a nivel cognitivo en términos de comprensión. Con este estudio pretendemos justamente evidenciar esta extensión, lo que nos permitiría validar la hipótesis IV y con ello completar el objetivo OE.

La contrastación de la hipótesis IV supondría además la culminación del proceso de operativización, iniciado en el capítulo VI para el caso del algoritmo estándar escrito del producto, de la propuesta teórico-metodológica elaborada en el capítulo V para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. Como consecuencia, se avalaría la bondad de la hipótesis II, contribuyéndose de este modo a la consecución del objetivo [OM₁] y también del (c).

8.3 Metodología

La metodología empleada conjuga el cuestionario escrito y la entrevista en un único espacio. Se trata, por tanto, de una metodología empírica de carácter cualitativo coherente con la línea metodológica básica adoptada en la Universidad de Málaga para las investigaciones en Educación Matemática (González y Ortiz, 2000).

Optamos por el análisis descriptivo de las respuestas dadas por los alumnos interpretadas de acuerdo con la tipología provisional obtenida tras los estudios exploratorios. La información obtenida en dichos estudios la vamos a utilizar ahora para extraer conclusiones en términos de comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. No se trata, por tanto, de un estudio con fines prescriptivos, si bien queda abierta la posibilidad de plantear en un futuro tales estudios desde el mismo marco teórico-metodológico de referencia adoptado aquí.

Por otra parte, el estudio se lleva a cabo teniendo presente la importancia de la búsqueda de regularidades en el comportamiento y en la comprensión de los sujetos en cualquier propuesta de acercamiento al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático que pretenda superar el ámbito teórico para ser aplicable también desde un punto de vista práctico. En tal sentido, se tratará también de identificar las regularidades que permita observar el análisis descriptivo que se pretende realizar a partir de los resultados obtenidos.

Por último, entendemos que el método seguido durante esta fase de la investigación satisface los propósitos de la propuesta general de diagnóstico y evaluación de la comprensión presentada a lo largo de los capítulos V y VI de la presente memoria.

8.4 Elección y composición de la muestra

La propia naturaleza de la aproximación adoptada permite interpretar este estudio, junto con los trabajos exploratorios ya concluidos, como experiencias empíricas sucesivas pertenecientes a una línea de investigación emergente dirigida a la obtención de información a medio y largo plazo sobre diferentes aspectos de la comprensión del conocimiento matemático. Este hecho justifica que no veamos necesario considerar para este estudio concreto una muestra de alumnos extensa. Más bien, una selección diversa en torno a 20 o 30 sujetos resulta suficiente para cumplir con los objetivos empíricos planteados en la investigación.

En concreto, en este estudio se ha elegido un total de 24 alumnos pertenecientes a un mismo centro escolar de una localidad situada en la zona norte de la provincia de Almería. Con el propósito de garantizar una muestra lo más heterogénea posible decidimos seleccionar estudiantes de distintos grados académicos y de diferente nivel escolar².

Por curso llegamos a establecer cuatro grupos de 6 alumnos pertenecientes, respectivamente, a 1º y 3º de Educación Secundaria Obligatoria, 1º de Bachillerato y 1º de Ciclo Formativo de Grado Superior en Administración de Sistemas Informáticos (ASI). Por nivel nos basamos para la selección de los alumnos de ESO y Bachillerato en las calificaciones de las asignaturas de matemáticas obtenidas durante los dos trimestres anteriores al periodo de entrevistas, llegándose a establecer para ello tres niveles de calificación: alto (sobresaliente), medio (suficiente/bien) y bajo (muy deficiente/insuficiente). En estos grados previmos por cada estudiante un sustituto de similares características para solventar posibles ausencias o negativas a colaborar. Para los alumnos de 1º ASI no se impuso ningún criterio de selección.

Al final, la muestra se seleccionó de forma aleatoria entre los estudiantes que cumpliendo los requisitos mencionados se prestaron voluntarios a participar en el estudio. La distribución del alumnado se resume en el siguiente cuadro:

Grado Académico	Nivel (según calificaciones escolares)		
	Alto (Sobre.)	Medio (Bien/Suf.)	Bajo (Ins./M.D.)
1º ESO	2 alumnos	2 alumnos	2 alumnos
3º ESO	2 alumnos	2 alumnos	2 alumnos
1º Bachillerato	2 alumnos	2 alumnos	2 alumnos
1º ASI	6 alumnos		

8.5 Instrumentos de recogida de datos

Para la recogida de datos se utilizó un instrumento del mismo tipo al empleado en el segundo estudio exploratorio. Éste consistió en un cuestionario con distintas situaciones-problema extraídas del campo situacional del algoritmo estándar escrito del producto, que el alumno debía resolver. El cuestionario se complementa con una entrevista semiestructurada a desarrollar durante el proceso de resolución de las tareas

² La heterogeneidad la justificamos por la pretensión de mostrar estados de comprensión sustancialmente diferentes y de garantizar la aparición de distintos perfiles de comprensión posibles vinculados al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

del cuestionario. Así, según el formato de las tareas, se establece un diálogo entre el entrevistador y el alumno, simultáneo o posterior a la resolución, y centrado fundamentalmente en clarificar las respuestas dadas y profundizar en ellas.

En el diseño y elaboración de ambos instrumentos de observación se han tenido en cuenta las consecuencias derivadas de los estudios exploratorios realizados. Sobre todo, las referidas a la clasificación situacional, a la adecuación de las situaciones, a los tipos de respuesta y comportamientos y al sentido dado a las primeras interpretaciones realizadas en términos de comprensión del algoritmo estándar escrito.

8.5.1 Cuestionario

Constituido por nueve tareas pertenecientes a las distintas categorías situacionales surgidas de los estudios precedentes, teórico y empíricos, y recogidas en la figura 7.6 del capítulo anterior. Estas situaciones se presentan en la tabla 8.1 distribuidas por categorías fenómeno-epistemológicas y se relacionan posteriormente a propósito del análisis de las características de cada una de ellas.

8.5.1.1 Estructura y contenido

A continuación se describen las características de cada una de las situaciones incluidas en el cuestionario, al tiempo que justificamos los motivos de su inclusión.

- Bloque de Situaciones No- Exclusivas

Tal como concluimos en el capítulo VII, no son representativas de la totalidad pero a través de su empleo podremos, entre otras cosas, extender los perfiles de “*comprensión fundamental*” de la muestra de alumnos.

- Situación 1:

Calcula:	
	16
	16
	16
+	16
	16
	16
	16
	16
	16

Propia de la categoría Técnica. Ya empleada en el segundo estudio exploratorio con otros sumandos. Se incluye para observar exclusivamente el posible uso Técnico que los alumnos dan al algoritmo estándar escrito del producto en una tarea para la que en principio no es necesario.

- Situación 2:

Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.

CATEGORIAS [Epistemológicas]		
CATEGORIAS [Fenomenológicas]		
SITUACIONES EXCLUSIVAS	SITUACIONES NO-EXCLUSIVAS	
		TÉCNICA
		ANALÍTICA
		FORMAL
<p>5. Encuentra el algoritmo de la multiplicación para calcular</p> $\begin{array}{r} 6 \\ \times 21 \\ \hline \end{array}$	<p>1. Calcula:</p> $\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ + 16 \\ \hline 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline \end{array}$ <p>4. Ordena a la siguiente multiplicación cada regla considerando siempre por la misma:</p> $\begin{array}{r} 15 \\ 112 \\ 70 \\ 45 \\ \hline 470 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ 111 \\ 72 \\ 16 \\ \hline 810 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ 112 \\ 70 \\ 15 \\ \hline 810 \end{array}$	
<p>6. En la siguiente multiplicación se han ocultado el multiplicando y el multiplicador:</p> $\begin{array}{r} \blacksquare \\ \times \blacksquare \\ \hline 37035 \\ 24600 \\ 12245 \\ \hline 1718435 \end{array}$ <p>(a) ¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicador? Justifica tu respuesta.</p> <p>(b) ¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicando? Justifica tu respuesta.</p> <p>1. ¿Qué reglas se aplican a la suma y a la resta? ¿Por qué, para poder aplicarlas?</p> <p>1. Crea:</p> $\begin{array}{r} \blacksquare \\ \times 102 \\ \hline 38005 \\ 00000 \\ 00810 \\ \hline 000005 \end{array}$	<p>2. Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.</p> <p>3. Ayuda de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación, explicando el proceso seguido:</p> $\begin{array}{r} 222444999 \\ \times 64 \\ \hline \end{array}$ <p>9. Clasifica la siguiente multiplicación realizada con el algoritmo:</p> $\begin{array}{r} 146 \\ -123 \\ \hline 23 \\ \times 378 \\ \hline 292 \\ 758 \\ \hline 3158 \end{array}$ <p>Contesta de forma razonada a las siguientes cuestiones:</p> <p>(a) ¿Qué sentido tienen las líneas? En decir, ¿por qué hay que llevar?</p> <p>(b) ¿Por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?</p> <p>(c) ¿Por qué se van sumando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro?</p> <p>(d) ¿Por qué se dice un "hacer" en la fila correspondiente al segundo resultado parcial? ¿Qué significado tiene ese "hacer"?</p> <p>(e) Al final, ¿por qué se deben sumar las cifras se cobrezarse para llegar al resultado?</p> <p>(f) ¿Conoce alguna propiedad que se aplica en el algoritmo de multiplicar?</p>	

Tabla 8.1.- Conjunto de situaciones incluidas en el cuestionario

Propia de la categoría Analítica aunque de las consideradas como *situaciones frontera*. En este caso, admite un empleo del algoritmo, tanto Técnico como Analítico. También fue propuesta, con otros datos, y validada como situación adecuada en el segundo estudio exploratorio. Se propone para identificar sujetos con disposición a utilizar de forma Analítica el algoritmo en una tarea en la que no resulta imprescindible.

▪ Situación 3:

Ayúdate de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación, explicando el proceso seguido:

$$\begin{array}{r} 222444999 \\ \times 64 \\ \hline \end{array}$$

Propia de la categoría Formal. Reconocida en la reflexión teórica del capítulo VI, no llega a utilizarse en la fase exploratoria del estudio aunque por sus características la consideramos dentro de las apropiadas para ser incluida en el cuestionario. Así, mediante el uso (opcional) de la calculadora se consigue trasladar al sujeto a un espacio de reflexión sobre las propiedades internas justificativas del procedimiento del cálculo, en especial, sobre el sistema de numeración posicional y la propiedad distributiva.

En consecuencia, con ella pretendemos observar la disponibilidad de los sujetos a la hora de emplear el algoritmo de un modo Formal, de acuerdo con la caracterización adoptada en los capítulos anteriores. Indirectamente se emplea también para aportar indicios a favor de la *destreza* del alumno en la utilización del procedimiento de cálculo, uno de los tres aspectos registrados en el uso Técnico del algoritmo.

- Bloque de Situaciones Exclusivas

Destinado fundamentalmente a obtener información acerca de la “*comprensión fundamental*” que sobre el algoritmo poseen los alumnos de la muestra.

▪ Situación 4:

Determina si las siguientes multiplicaciones están resueltas correctamente y corrige las que no lo estén:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 32 \\ \hline 20 \\ 45 \\ \hline 470 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 850 \end{array}$$

Característica de la categoría Técnica. Esta situación se incluye por resultar adecuada para observar en el alumno el *reconocimiento* explícito de los pasos que conforman la secuencia algorítmica y la *destreza* en el uso, entendida como empleo regular del algoritmo con acierto.

▪ Situación 5:

Emplea el algoritmo de la multiplicación para calcular:

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 251 \\ \hline \end{array}$$

Propuesta dentro de la categoría Técnica para cubrir el tercero de los ámbitos caracterizadores del uso técnico del algoritmo: la *independencia a la disposición de los factores*. Su inclusión en el cuestionario está justificada porque fue precisamente una situación como ésta la que dio origen en el segundo estudio exploratorio a considerar una tercera faceta de empleo técnico. En esta ocasión, tan sólo hemos cambiado los valores de los factores.

▪ Situación 6:

En la siguiente multiplicación se han ocultado el multiplicando y el multiplicador:

$ \begin{array}{r} \text{x } \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ \hline 37035 \\ 24690 \\ 12345 \\ \hline 1518435 \end{array} $	<p>(a) ¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicador? Justifica tu respuesta.</p> <p>(b) ¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicando? Justifica tu respuesta.</p>
---	---

Primera de las situaciones consideradas de uso Analítico del algoritmo. Con esta tarea nos interesa observar el empleo intencionado de dos de las relaciones externas no usuales presentes en el algoritmo (ver apartado 6.4.1) que caracterizan a esta categoría epistemológica:

- El número total de resultados parciales depende del número de cifras del multiplicador.
- El número de cifras de los resultados parciales (su extensión o tamaño) depende del número de cifras del multiplicando y del valor de las cifras de mayor orden relativo en el multiplicando y multiplicador.

▪ Situación 7:

En la siguiente multiplicación se ha ocultado el multiplicando. A pesar de ello, ¿podrías completar los cálculos?

$ \begin{array}{r} \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ \text{x } 303 \\ \hline 38 \square \square 5 \\ \square \square \square \square \square \\ \square \square 83 \square \\ \hline \square \square \square \square \square \square 5 \end{array} $

Presenta el formato de una multiplicación con cifras desconocidas. Con ella se continúa estudiando el desempeño de los alumnos en el uso Analítico del algoritmo. Se propone para cubrir otras relaciones externas no usuales de las recogidas en el apartado 6.4.1. En concreto, que cifras iguales en el multiplicador dan lugar a resultados parciales visiblemente idénticos salvo por la posición (relación A) o que cuando una cifra del multiplicador es 0 todas las cifras del correspondiente resultado parcial son 0 (relación B).

Fundamentalmente, esta situación junto con la siguiente nos permite identificar en los sujetos su grado de dependencia en el conocimiento de las cifras de los factores, en este caso del multiplicando, así como su capacidad para trascender al orden establecido en la secuencia algorítmica.

▪ Situación 8:

Completa:

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \times 45 \\ \hline \square 30 \\ \square 44 \\ \hline \square 870 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \times \square 7 \\ \hline \square \square 5 \\ \square 0 \\ \hline \square 45 \end{array}$$

Constituida por dos multiplicaciones con cifras desconocidas de tamaño 2x2. Los estudios preliminares realizados, teórico y empíricos, nos garantizan la adecuación de estas tareas para el estudio de la faceta Analítica en los sujetos. A través de ellas y junto con la situación anterior pretendemos identificar, sobre todo, a los alumnos que superan la barrera del orden secuencial algorítmico y la dependencia en el conocimiento de las cifras de los factores. Todo ello con independencia del resultado obtenido.

▪ Situación 9:

Observa la siguiente multiplicación resuelta con el algoritmo:

$$\begin{array}{r} 146 \\ \times 23 \\ \hline 438 \\ 292 \\ \hline 3358 \end{array}$$

Contesta de forma razonada a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse?
- ¿Por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?
- ¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro?
- ¿Por qué se deja un “hueco” en la fila correspondiente al segundo resultado parcial? ¿Qué significado tiene ese “hueco”?
- Al final, ¿por qué se deben sumar las cifras en columnas para llegar al resultado?
- ¿Conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar?

Es la utilizada para tratar la faceta Formal del algoritmo. De forma intencionada, presenta seis cuestiones de respuesta verbal con las que intentamos observar la

comprensión que manifiestan los alumnos acerca de los principios constitutivos del algoritmo, poniendo el límite con la sexta cuestión en la explicitación de las propias propiedades justificativas. En concreto, a través de las explicaciones dadas, buscamos identificar en los estudiantes un uso consciente de la relación existente entre, por un lado, las propiedades del sistema de numeración posicional y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, y por otro, el propio mecanismo visible que conforma al algoritmo. Esto es, nos interesa determinar hasta qué punto los estudiantes de la muestra sustentan y justifican las particularidades del procedimiento en las propiedades mencionadas.

Conviene mencionar que aunque todas las situaciones estén propuestas con unos fines muy concretos, algunas de ellas pueden ser empleadas también como tareas de confirmación del desempeño mostrado por los sujetos en otras situaciones pertenecientes a la misma o incluso distintas categorías, sobre todo en lo que a uso Técnico se refiere. Esto es, las tareas empleadas en el cuestionario pueden desempeñar la función secundaria de reducir en otras situaciones la presencia de casos de ambigüedad en la interpretación de las respuestas. Este es el caso de la situación 3, con la que se puede obtener una información acerca de la destreza del alumno en el uso del algoritmo, función para la que no estaba destinada inicialmente, complementaria a la obtenida a través de la situación 4, que como ya hemos mencionado es propuesta principalmente para observar el reconocimiento y destreza de la secuencia algorítmica. Lo mismo sucede con la situación 2, que por ser frontera resulta una fuente de observación del empleo Técnico del algoritmo además del Analítico. De igual manera, dado que las MCCD's son problemas diseñados sobre la base del algoritmo (Gallardo y González, 2002), la situación 8 también podría analizarse con atención a aspectos propios de la faceta Técnica del mismo.

Siempre que se considere oportuno, para el análisis de las respuestas nos serviremos de esta posibilidad con objeto de garantizar en lo posible la adecuación de las interpretaciones realizadas y las posteriores valoraciones en términos de comprensión.

8.5.1.2 Formato y presentación

El cuestionario consta de cuatro páginas en las que se muestran distribuidas, por una sola cara, el total de tareas. La primera página presenta el registro del nombre del alumno (sin apellidos para mantener el anonimato) y el Curso al que pertenece, junto con las tres situaciones No-Exclusivas asociadas al algoritmo. Las tres páginas siguientes recogen el resto de situaciones, catalogadas como Exclusivas. En concreto, la segunda reúne a las dos situaciones de categoría Técnica y la primera de categoría Analítica; la tercera, a las dos siguientes situaciones Analíticas; y la última, a la novena situación, de uso Formal del algoritmo. Para cada situación se dispuso de un espacio en blanco suficientemente amplio para su resolución.

Las páginas del cuestionario no se propusieron simultáneamente sino de manera secuencial a medida que el alumno seguía el orden de las tareas incluidas en cada hoja. Una vez concluida una página, ésta se recogía y se sustituía por la siguiente.

Por otra parte, al igual que hicimos en el segundo estudio exploratorio para evitar el “efecto aprendizaje”, optamos por presentar las situaciones No-Exclusivas con antelación a las Exclusivas. En cualquiera de los dos casos, las tareas aparecen ordenadas siguiendo la secuencia Técnico, Analítico y Formal. Esta decisión viene motivada por la intención de configurar una prueba creciente en dificultad en cada categoría fenomenológica; para ello nos basamos en el hecho constatado de que la

faceta Técnica resulta necesaria para afrontar los planos Analítico y Formal. Y puesto que la relación entre lo analítico y lo formal aún no está resuelta, de manera arbitraria optamos por presentar en el cuestionario las situaciones analíticas antes que las formales.

8.5.2 Entrevista

Se ha empleado una entrevista semiestructurada (Cohen y Manion, 1990; González y Ortiz, 2000) con guión preestablecido, aunque permitiendo un cierto grado de libertad para las respuestas y posteriores preguntas derivadas de éstas.

Se desarrollaron 24 entrevistas donde cada uno de los sujetos tuvo que resolver el total de tareas incluidas en el cuestionario. Todos los alumnos elegidos como primera opción tuvieron a bien participar en la entrevista, de forma que tan sólo se les propuso a los estudiantes suplentes la posibilidad de colaboración cuando los primeros no asistieron a clase ese día. Las entrevistas se llevaron a cabo en horario escolar durante el periodo comprendido entre el 24 de abril y el 29 de mayo de 2003 sin que se llegara a producir ningún suceso destacable ajeno al propio desarrollo. El tiempo de duración de cada una de las entrevistas osciló entre 30 y 40 minutos. Los alumnos de ESO realizaron la prueba en la biblioteca del Centro mientras que los de 1º de Bachillerato y 1º de ASI en una sala de idiomas sin uso. Ambos ambientes eran confortables y estaban protegidos de elementos perturbadores.

Al igual que en el segundo de los estudios exploratorios, las entrevistas se registraron en audio, figurando dichos diálogos en el anexo III junto con la producción escrita de los alumnos y los comentarios explicativos de las respuestas dadas.

En cuanto al **protocolo** se consideró conveniente mantener las mismas pautas de actuación generales (etapas) utilizadas en el segundo de los estudios exploratorios. No obstante, hemos de mencionar que el protocolo seguido en cada etapa de la entrevista resulta específico de este estudio. El procedimiento seguido es el que se indica a continuación.

1ª Etapa [Propuesta de participación y presentación de la prueba (5 minutos aprox.)]:

En una hora de clase de las primeras de la mañana y previo consentimiento del profesor correspondiente, el alumno sale de su aula y se le propone la participación anónima en la prueba sin dar explicaciones detalladas de la misma. En este instante tan sólo aclaramos que se trata de una investigación de la Universidad de Málaga dirigida a estudiar hasta qué punto los estudiantes comprenden las matemáticas escolares.

Seguidamente, si el alumno acepta la propuesta, se le acompaña a la sala habilitada para la entrevista, donde se encuentra una mesa amplia con dos sillas iguales no enfrentadas, una para él y otra para el entrevistador. En la mesa se sitúa la prueba boca abajo, un bolígrafo y una grabadora de audio. En este momento es cuando aclaramos los pormenores del cuestionario, explicando al alumno que consta de nueve tareas distribuidas en cuatro hojas que deberá ir resolviendo en los espacios reservados para ello. Asimismo, se le comenta que sobre lo realizado se podrán proponer algunas cuestiones para responder verbalmente y que en algunas de las tareas no serán necesarias las respuestas escritas, por lo que resultará imprescindible el uso de una grabadora para el registro. Es entonces cuando se vuelve a insistir en el carácter voluntario y sobre todo anónimo de la participación en la entrevista.

2ª Etapa [Desarrollo de la entrevista (entre 25 y 35 minutos aprox.)]:

El protocolo seguido en el transcurso de la entrevista se ajusta al siguiente esquema básico:

- (a) Lectura por parte del alumno de la situación N (1,...,9) del cuestionario.
- (b) Aclaración del propósito de la tarea en caso de ser requerido. Las explicaciones se realizan en términos similares a los expuestos en el enunciado, procurando no aportar información relevante añadida a la presentada.
- (c) Un tiempo destinado a la resolución personal de la situación planteada que, dependiendo de la tarea, suele estar entre 2 y 5 minutos aproximadamente.
- (d) Por último, una breve fase de preguntas y respuestas verbales centradas en lo intentado y/o realizado.

Sobre la base de este esquema general introducimos algunos ajustes en el procedimiento al tener en cuenta las características y propósitos asignados a cada situación particular, principalmente concreciones y puntualizaciones específicas en torno al vínculo entre los puntos (c) y (d). El protocolo final queda conformado conjuntando los procedimientos considerados para cada una de las tareas, cuyos detalles se incluyen resumidos en el cuadro de la siguiente página.

3ª Etapa [Comentarios finales y despedida (2 minutos aprox.)]:

Una vez finalizada la fase de resolución de situaciones y antes de la despedida, se pregunta al alumno si desea añadir algún comentario a todo lo realizado. Además, fuera del registro de audio, se intenta solventar las posibles dificultades y responder a las dudas solicitadas surgidas durante la entrevista. Por último, se agradece una vez más al estudiante su participación desinteresada en la prueba.

8.6 Análisis de respuestas: criterios y categorías

En este apartado presentamos los criterios utilizados y el proceso seguido en la determinación de las pautas a seguir para el análisis e interpretación de las respuestas obtenidas a lo largo del desarrollo de las entrevistas.

Al no existir una única modalidad de respuesta, en parte por ser distintos los formatos de las situaciones utilizadas, no podemos tomar un modelo común a todas las situaciones como referencia para valorar los distintos tipos de respuestas de los entrevistados. Por el contrario, cada situación lleva asociada un conjunto de respuestas posibles que sirven de guía para interpretar y valorar las respuestas particulares dadas por los alumnos. Este conjunto-guía de referencia considerado de antemano forma parte de los resultados obtenidos de los estudios empíricos previos realizados.

En consecuencia, el desempeño de los sujetos será valorado de acuerdo con las características de cada situación. No obstante, como ya argumentamos en el capítulo VII, esto no significa que el diagnóstico dado en términos de comprensión dependa de las respuestas concretas dadas a unas situaciones particulares, en el sentido de que de ser otras proporcionen resultados diferentes. Tal como se menciona, las respuestas se conciben como meros aportes observables para la caracterización de comportamientos tipo que son los que a la postre se emplean como indicadores de la comprensión de los sujetos (punto 14; apdo. 7.3.4.3; cap. VII).

SITUACIONES			PROCEDIMIENTO
SITUACIONES NO-EXCLUSIVAS	TÉCNICA	1	Tras la resolución en silencio de la tarea, se pregunta al sujeto sobre su modo de proceder. En caso de no emplear el algoritmo estándar escrito del producto, se le solicita un segundo modo de resolver la situación en espera de observar algún indicio de uso del algoritmo. A continuación, se pasa a la siguiente tarea.
	ANALÍTICA	2	Se deja un tiempo para los intentos de resolución. En caso de no observar nada, se insiste al alumno para que escriba o explique lo que está pensando. Si no emplea el algoritmo en la resolución o lo emplea de un modo Técnico se le pregunta sobre otras formas de proceder con vistas a forzar el uso Analítico. El diálogo finaliza en este punto dando paso a la siguiente situación.
	FORMAL	3	Una vez aclarada la tarea (si es necesario), se proporciona la calculadora al alumno y se le deja actuar. Tanto si la emplea con éxito como si decide dejarla para aplicar el algoritmo de un modo Técnico, una vez finalizados los intentos se le invita a que explique con sus palabras todo lo realizado durante la resolución.
SITUACIONES EXCLUSIVAS	TÉCNICA	4	En esta situación no se prevé ningún diálogo posterior al proceso de resolución. La producción escrita de los sujetos muestra indicios suficientes como para no insistir en explicaciones posteriores. En caso de error en la respuesta, y al objeto de disminuir la posibilidad de que éste sea fruto del despiste, se repetirá al alumno una única vez la valoración final (correcta o incorrecta; bien o mal) que él mismo ha dado a cada multiplicación. En caso de reconocimiento de algún error se le permite la corrección y a continuación se pasa a la siguiente tarea.
		5	Previa explicación de la situación, se deja al alumno actuar. Si modifica el orden de los factores para aplicar el algoritmo, se le solicita que intente emplear el mismo procedimiento de cálculo en la disposición de factores inicial. Si tiene dificultad en entender la propuesta, se le explica una vez más en términos similares. Con independencia de lo realizado ahora, se pasa a la siguiente situación.
	ANALÍTICA	6	Se aclara a qué hacen referencia los términos multiplicando y multiplicador. Se pide una explicación de cada una de las respuestas dadas. Si alguna es incorrecta, se insiste sobre el argumento dado en espera de que el alumno modifique y corrija su respuesta. Tanto si lo hace como si no, se finaliza en este punto proponiendo la siguiente tarea.
		7	Tan sólo se piden explicaciones añadidas a lo que va realizando el sujeto en caso de que éste permanezca en silencio durante periodos de tiempo prolongado. Asimismo, se insiste en la posibilidad de nuevos intentos si se observa que el alumno desiste y suspende sus acciones con brevedad o por el contrario persiste con alguna estrategia sin garantías de éxito. En cualquier caso, se deja al estudiante proceder durante un máximo de 5 o 6 minutos antes de pasar a la siguiente situación.
		8	Al igual que en la tarea anterior se deja al alumno trabajar en silencio. Tan sólo se solicitan explicaciones sobre lo realizado en caso de que tengamos alguna duda acerca de la estrategia de resolución empleada. A los alumnos excesivamente lentos o bloqueados se les insta a que intenten resolver la última situación.
	FORMAL	9	En esta situación se van tratando las cuestiones de una en una y en orden. En función de las respuestas dadas queda abierta la posibilidad de realizar nuevas preguntas dependientes de las primeras al objeto de que el alumno aclare y profundice aún más sus argumentos, ya sean correctos o incorrectos.

8.6.1 Esquema general

De acuerdo con las consideraciones realizadas anteriormente, el análisis de respuestas sigue el siguiente esquema para las situaciones propuestas:

I. En primer lugar, explicitamos las posibilidades básicas y conocidas de antemano de uso del algoritmo. Éstas, constituyen la referencia fundamental para posicionar los comportamientos y respuestas dadas. Asimismo, en virtud de la caracterización para la comprensión adoptada en el apartado 5.3.1 del capítulo V, estas opciones componen la base de indicadores desde los que interpretar y valorar posteriormente la comprensión de los sujetos.

Al respecto, interesa señalar que permanece abierta la posibilidad de que las respuestas previstas se completen con otras surgidas durante el estudio, proporcionando así nuevas posibilidades de uso no contempladas con anterioridad. Además, entre todas las opciones de empleo que se puedan definir a priori, nos centramos justamente en las consideradas, por cuanto están dirigidas a identificar sujetos con características cognitivas propias de cada categoría, cumpliendo de este modo con los intereses del estudio.

II. En segundo lugar, con la reseña anterior identificamos en cada uno de los sujetos los distintos comportamientos tipo a través de las respuestas representativas dadas. En este apartado aportamos las correspondientes muestras de ello, mientras que el total de respuestas dadas por los alumnos se recoge en el anexo III del informe junto con la mención sobre el tipo al que pertenecen.

III. Por último, proporcionamos la interpretación sobre lo realizado en cada caso en términos de comprensión del algoritmo estándar escrito del producto. Este punto se corresponde con la valoración en sí de las respuestas y sirve de base para el establecimiento de los pretendidos perfiles de comprensión. Como veremos, la interpretación y caracterización de la comprensión de los sujetos (estados y perfiles) se detallan en términos que superan las particularidades de las respuestas dadas aunque su origen lo tengan en ellas. De otra parte, conviene subrayar el reconocido carácter abierto de toda interpretación, incluida la que ahora se realiza.

Antes de proceder con la exposición de respuestas, ejemplos e interpretaciones asociadas, hemos de recordar que desde la Aproximación que adoptamos el uso intencionado del algoritmo en las situaciones No-Exclusivas se interpreta siempre de forma positiva como indicio de comprensión del mismo, al margen de que dicho uso conduzca o no al resultado correcto. De igual manera, en las situaciones Exclusivas cualquier manifestación admite una interpretación concreta enunciada en términos de presencia, y no ausencia, de comprensión con unas determinadas características. Nos interesa por tanto la identificación de una comprensión de mínimos positiva, debiendo ajustarse a ello cualquier interpretación y explicación de comportamientos.

Por otra parte, debemos contemplar también la posibilidad de que determinados alumnos de la muestra no realicen ninguna acción observable sobre alguna de las situaciones planteadas. De acuerdo con nuestros planteamientos teóricos, en estos casos no se realizará ninguna interpretación en términos de comprensión.

8.6.2 Usos y ejemplos de respuestas representativas

Situación 1 [No-Exclusiva y Técnica]

I. Posibilidades de uso del algoritmo

(a) Ausencia de empleo Técnico del algoritmo. Aún reconociendo al inicio su adecuación como medio de resolución, el algoritmo se desestima y no llega a utilizarse explícitamente, prefiriéndose en su lugar el empleo de estrategias alternativas. Incluimos también en este caso la posibilidad de utilizar tan sólo algún paso de la secuencia algorítmica combinado con otras posibilidades.

(b) Empleo Técnico. Se manifiesta un claro reconocimiento o uso del algoritmo de forma Técnica como instrumento de resolución de la tarea. A diferencia de (a) en este caso el acercamiento al algoritmo resulta positivo; en ningún caso se muestra rechazo hacia él.

II. Ejemplos de respuestas representativas

Tipo 1a:

Mariano (1º Bach.)

1. Calcular

16

16

16

16

16

16

16

16

112

Ma.- Pues he ido sumando de 15 en 15 y luego le he sumado lo... el que faltaba.
I.- Has ido sumando de 15 en 15.
Ma.- Claro. Le he quitado 1, entonces: 15, 30, 45, 60,... Ya está, luego le he sumado pues los 7 que faltaban.
I.- Entiendo. Bueno, ¿lo podrías haber hecho de otro modo?
Ma.- Pues como... se suele hacer normal. Pues sumando 6, 6, 6,...

Conclusión: Entre las propuestas de resolución de la tarea no se encuentra un uso explícito del algoritmo de modo Técnico. Por tanto, es una respuesta de tipo *1a*.

Tipo 1b:

David (1º Bach.)

1. Calcular:

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 16 \\ + 16 \\ + 16 \\ + 16 \\ + 16 \\ + 16 \\ + 16 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 112 \end{array}$$

[No llega a establecerse ningún diálogo].

Conclusión: Este alumno emplea directamente el algoritmo estándar escrito del producto para resolver la suma. En consecuencia, se trata de una respuesta de tipo *1b*.

Situación 2 [No-Exclusiva y Analítica]

I. Posibilidades de uso del algoritmo

- (a) No se utiliza en ningún caso, prefiriéndose emplear estrategias alternativas.
 (b) Se emplea el algoritmo de un modo Técnico no llegándose a manifestar ningún uso de naturaleza analítica.
 (c) Se observa un empleo Analítico del algoritmo, incipiente o afianzado, como instrumento de resolución de la tarea.

II. Ejemplos de respuestas representativas

Tipo 2a:

Rosa (3º ESO)

2. Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.

$$\begin{array}{r} 177 : 3 \\ \underline{51} \\ 177 - 51 = 126 \\ \underline{126} \\ 177 - 126 = 51 \end{array}$$

$$\{51, 3, 126, 177\}$$

I.- [Transcurren 55'' en silencio en los que la alumna descompone 177 en factores primos para obtener el resultado correcto]. *A ver, explícame cómo lo has hecho.*

Ro.- Descomponiendo el número.

I.- Descomponiendo. ¿Y se te hubiese ocurrido hacerlo de otro modo?

Ro.- Puede ser pero es que ahora mismo se me ha ocurrido ese [risas].

I.- ¿Ese nada más?

Ro.- Sí, ahora mismo ese. Pero a lo mejor hay otro modo, claro.

Conclusión: Esta alumna no emplea el algoritmo estándar escrito de ningún modo, ni tan siquiera lo reconoce como instrumento que posibilita llegar a la solución. Se trata, por tanto, de una respuesta de tipo 2a.

Tipo 2b:

Miguel (1º ESO)

2. Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.

$$\begin{array}{r} 177 \\ \underline{21} \\ 156 \\ \underline{21} \\ 177 \end{array}$$

Mi.- Pues multiplicando.

I.- Multiplicando números...

Mi.- Naturales. [Transcurre otro 1' 10'' aprox. en silencio, empleándose la misma estrategia y sin indicio alguno de uso analítico]. *Ésta es la que más se acerca.*

I.- ¿Cuál?

Mi.- Ésta, el 8 por 21. Entonces, 9 por 21... 181. [Permanece en silencio].

I.- Bueno, ¿qué pasa? ¿No das con el número?

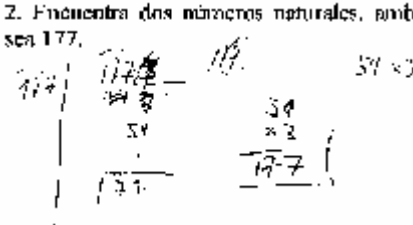
Mi.- No. 21 por 7... que va, sale demasiado chico: 147.

Conclusión: Este alumno emplea como estrategia para la resolución la aplicación Técnica del algoritmo sin mostrar indicios de un uso Analítico. Por tanto, es una respuesta de tipo 2b.

Tipo 2c:

David (1º ASD)

2. Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.



I.- ¿Y ahora qué estabas intentando?
Da.- Buscar dos números que al multiplicar me dieran por lo menos una primera cifra en 7 para más o menos orientarme [**indicio de uso Analítico**]. Pero como que eso es una miaja difícil. [Tras 45'' en silencio llega a la solución correcta]. 59 por 3.
I.- 59 por 3.
Da.- Serían 3 por 9, 27.... 3 por 9, 27, me llevo 2. 3 por 5, 15 y 2 que me llevo 7.
I.- ¿Y cómo has llegado ahí, a sacar el 59?
Da.- Porque es lo que estaba intentando hacer desde el principio pero aquí me... he intentado hacer al revés. Pues he buscado un número que multiplicado por otro me diera la terminación en 7 [**muestra de uso Analítico**], primero, que eso es 3 por 9. Yo sabía que aquí ya tenía un 7, entonces tenía que buscar otro número que multiplicado por 3 me diera 17 o aproximado para que sumándole 2 [**nueva reflexión de naturaleza Analítica**]... entonces salía mejor el 5. Me daba 15 y 2, 17.

Conclusión: Claramente este alumno proporciona muestras de utilizar el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de un modo Analítico, aunque no como primera opción. Se trata, de todos modos, de una respuesta de tipo 2c.

Situación 3 [No-Exclusiva y Formal]

I. Posibilidades de uso del algoritmo

En lo que respecta a la faceta Formal, diferenciamos entre:

(a) Ausencia de empleo Formal del algoritmo o empleo Formal inadecuado. O bien no se reconoce o se niega esta posibilidad de uso, o bien se manifiesta una predisposición inicial a la utilización de relaciones justificativas erróneas, con desestimación final ocasional de la estrategia.

(b) Empleo Formal. Indicios suficientes de una aplicación coherente, aunque a veces insegura, de las propiedades justificativas del algoritmo como vía de acceso a la solución (sistema de numeración posicional y propiedad distributiva).

Asimismo, identificamos dos posibilidades más dentro de la función secundaria desempeñada por esta situación:

a') Empleo Técnico desacertado, con presencia de errores.

b') Empleo Técnico correcto libre de errores. Se considera éste un indicador favorable en cuanto a la *destreza* del sujeto sobre el algoritmo.

II. Ejemplos de respuestas representativas

Tipo 3a:

Cristina (1º ESO)

3. Ayúdame de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación, explicando el proceso seguido:

$$\begin{array}{r} 222444999 \\ \times 64 \\ \hline 106560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ \times 64 \\ \hline 63936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 444 \\ \times 64 \\ \hline 28416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 222 \\ \times 64 \\ \hline 14208 \end{array}$$

Cris.- No. Espérate... podríamos hacerlo 222.... No, espérate, 999 por 4, luego 444 por 4 y 222 por 4. Y luego con el 6. [Comienza a realizar los cálculos con la calculadora].

...

Cris.- [Tras 1' de trabajo en silencio] Ya lo he sumado. [Otros 30'' de silencio] ¡Es que no creo que sea esto!

I.- ¿Por qué?

Cris.- No sé, porque igual es un número muy pequeño, esta cifra.

I.- O sea, lo que has hecho es sumar estos resultados, ¿no? Y dices que es un número muy pequeño.

Cris.- Yo creo que sí porque... tenía que haberlo hecho primero por el 4 o por el 6. No sí, pero... sí. [Unos 20'' de silencio] Que todo esto sería como si fuese el número entero.

I.- ¿El número entero cómo es?

Cris.- Pues, primero es 222, 444 y 999. Todos estos resultados serían como si la hubiésemos hecho entera y el resultado final sería como... sí, sí, sí, yo creo que está bien. ¡No sé si me explico! [Uso incorrecto de las propiedades del sistema de numeración posicional].

I.- Sí, entiendo lo que quieres decir.

Cris.- Entonces yo creo que sería eso. ¿Lo apunto aquí? [El resultado obtenido 106560].

Conclusión: En este caso la alumna no considera necesario el uso Técnico del algoritmo. Por el contrario, emplea el algoritmo de un modo Formal aunque de forma incorrecta, por lo que su respuesta es considerada de tipo 3a.

Tipo 3b:

Rubén (3º ESO)

3. Ayúdame de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación, explicando el proceso seguido:

$$\begin{array}{r} 222444999 \\ \times 64 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 444 \times 4 = 1776 \\ \checkmark 64 \\ \hline 2247936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 222 \times 6 = 1332 \\ \checkmark 64 \\ \hline 1453200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 222 \times 6 = 1332 \\ \checkmark 64 \\ \hline 1453200 \end{array}$$

Ru.- Pues, al ver que no cabía en la calculadora lo he reducido como he podido. He extraído... lo he dividido [el multiplicando] en dos números que al sumarlos dé ese número y entonces pues... uno de los números ha sido 22 millones. No, 222 millones, pero como seguía sin caber lo he reducido entre 4. Entonces he pensado que si ese lo he reducido entre 4, pues el número que lo tengo que multiplicar también lo tenía que reducir entre 4. Entonces ya, lo he multiplicado y lo que ha salido pues lo he multiplicado por 4, porque

como he reducido por 4 los dos.... Pues ese ha sido uno y luego el otro, como ya sí me cabía, lo he multiplicado por 64, lo he sumado y eso ha salido. Pero eso no es, vamos.

I.- *Ya, entiendo el método que has utilizado.*

Ru.- *Si pero creo que.... Bueno creo, eso no es correcto, ¿no? Pero bueno.*

Conclusión: En esta ocasión el alumno manifiesta un uso Formal del algoritmo estándar escrito del producto al emplear conscientemente propiedades del sistema de numeración posicional (descomposición del multiplicando en sumandos; reconocimiento del orden de las cifras) y la propiedad distributiva del producto respecto a la suma. También utiliza, aunque de forma incorrecta, relaciones de proporcionalidad. Si bien la solución no ha sido correcta, observamos indicios de lo que hemos catalogado como empleo Formal del algoritmo. Por tanto, consideramos esta respuesta como de tipo *3b*.

Situación 4 [Exclusiva y Técnica]

I. Posibilidades de uso del algoritmo

(a) Ausencia total de empleo Técnico del algoritmo, identificado por la carencia de indicios de *reconocimiento* del procedimiento algorítmico por parte del alumno.

(b) Empleo Técnico parcial en cuanto que se dan muestras de *reconocimiento* del algoritmo pero no se garantiza la *destreza* sobre el mismo al no observarse una regularidad en la aplicación correcta. Este caso se relaciona con la identificación y corrección del error en al menos una de las multiplicaciones presentadas aunque no en todas.

(c) Empleo Técnico certero en lo que respecta al *reconocimiento* y *destreza* sobre la secuencia procedimental. Se corresponde con la identificación y corrección de errores en las tres multiplicaciones resueltas con el algoritmo.

II. Ejemplos de respuestas representativas

Tipo 4a:

Ningún alumno del estudio proporcionó una respuesta apta para ser incluida en esta posibilidad.

Tipo 4b:

Miguel (1º ESO)

4 Determina si las siguientes multiplicaciones están resueltas correctamente y corrige las que no lo estén:

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 32 \\ \hline 20 \\ 45 \\ \hline 470 \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 48 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 780 \end{array}$
---	--	---

I.- [Tras resolver la situación] *A ver, explícame.*

Mi.- *Pues que aquí se ha equivocado al sumar.*

I.- *Pero has puesto aquí... ¿esto qué es, un 8?*

Mi.- *750... espera, 780.*

I.- *¿Y las otras dos?*

Mi.- *Están bien.*

I.- *Las otras dos están bien.*

Mi.- [Vuelve a revisarlas durante unos instantes] *Está bien.*

Conclusión: En este caso el alumno reconoce las dos primeras multiplicaciones como resueltas correctamente. Por tal motivo concluimos que su respuesta es de tipo *4b*.

Tipo 4c:

M^a Dolores (3^o ESO)

4. Determina si las siguientes multiplicaciones están resueltas correctamente y corrige las que no lo estén.

$$\begin{array}{r}
 15 \\
 \times 32 \\
 \hline
 30 \\
 45 \\
 \hline
 470
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 16 \\
 \times 12 \\
 \hline
 32 \\
 16 \\
 \hline
 48
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 15 \\
 \times 52 \\
 \hline
 30 \\
 75 \\
 \hline
 850
 \end{array}$$

[Sin diálogo complementario].

Conclusión: En este caso la situación es resuelta correctamente y con soltura, manifestándose reconocimiento y destreza en el uso Técnico del algoritmo, por lo que la respuesta es de tipo *4c*.

Situación 5 [Exclusiva y Técnica]

I. Posibilidades de uso del algoritmo

(a) Empleo del algoritmo dependiente de la disposición de los factores. Se manifiesta con la permutación de los factores como condición necesaria para la aplicación del algoritmo estándar escrito o con la aplicación errónea del mismo en la disposición de factores inicial.

(b) Utilización del algoritmo con *independencia a la disposición de los factores*. Se muestra en la aplicación correcta del procedimiento estándar sobre la presentación de inicio.

II. Ejemplos de respuestas representativas

Tipo 5a:

Raúl (3^o ESO)

5. Emplea el algoritmo de la multiplicación para calcular:

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 \times 251 \\
 \hline
 6 \\
 30 \\
 12 \\
 \hline
 156
 \end{array}$$

[Ningún diálogo destacable].

Conclusión: Se observa que este alumno aplica la secuencia algorítmica estándar manteniendo la disposición inicial de los factores. No obstante, el empleo Técnico del algoritmo se ve afectado por tal disposición, dando lugar a una aplicación incorrecta del mismo. Se trata, por tanto, de una respuesta de tipo *5a*.

Tipo 5b:**José (1º ASD)**

5. Emplea el algoritmo de la multiplicación para calcular:

$$\begin{array}{r} 251 \\ \times 6 \\ \hline 1506 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 251 \\ \hline 306 \\ 1506 \\ \hline 1506 \end{array}$$

Jo.- 6, me vendría una para acá. Serían 30... y aquí me vendría una para acá... serían 12. Uno, cinco, cero, seis. Pues nunca la había hecho así. Pero que lo primero que te viene a la cabeza, como el de arriba es menor, pues darle la vuelta.

Conclusión: En este caso el alumno es capaz de aplicar el algoritmo de forma Técnica en la disposición inicial de factores (derecha) aunque, tal como reconoce, empleó primero el algoritmo con los factores reordenados (izquierda). A pesar de ello, se trata de una respuesta de tipo 5b.

Situación 6 [Exclusiva y Analítica]I. Posibilidades de uso del algoritmo

(a) Ausencia de indicios de un empleo Analítico del algoritmo correcto. Reúne a las respuestas que proporcionan un número incorrecto de cifras para al menos uno de los factores y a las explicaciones alejadas de los verdaderos motivos justificativos.

(b) Empleo Analítico acertado por cuanto se reconoce y utiliza para la resolución las relaciones no-usuales incluidas caracterizadoras de la categoría. Se manifiesta con la identificación correcta del número de cifras de los factores y la justificación de la respuesta con argumentos acertados, aunque sean informales.

II. Ejemplos de respuestas representativasTipo 6a:**Carlos (3º ESO)**

[Ningún registro escrito pues se trata de una tarea de respuesta verbal].

Ca.- El multiplicador, una.**I.-** El multiplicador, una.**Ca.-** Sí.**I.-** ¿Por qué?**Ca.-** Es que no se sabe determinar, es que eso no se sabe. No te puede dar la solución si sabes donde estás haciendo.**I.-** ¿Y el multiplicando?**Ca.-** Yo creo que podría ser el multiplicando cuatro y el multiplicador uno. Porque como sale aquí cinco cifras, pues vas multiplicando y al final te llevas una.**I.-** Y al final te llevas una.**Ca.-** No creo que sea así pero bueno.**I.-** ¿Por qué dices que no crees que sea así?**Ca.-** No se puede decir que.... No sabría determinarlo.

Conclusión: Este alumno no es capaz de determinar el posible número de cifras del multiplicando y multiplicador en base a la información disponible en la multiplicación a

través del establecimiento de relaciones no-usuales entre pasos algorítmicos. No se muestran indicios de uso Analítico del algoritmo por lo que la respuesta es de tipo 6a.

Tipo 6b:

María (1º ESO)

[Ningún registro escrito pues se trata de una tarea de respuesta verbal].

Ma.- *Es que puede tener más de... que no puede tener... que hay más de una opción, ¿no?, para saber las cifras que tiene.*

I.- *¿Cuál?*

Ma.- *Pues, puede tener cuatro cifras. Y salir 37... último número [indicio de uso Analítico]. ¿Lo entiendes?*

...

Ma.- *¿El de arriba? Ya se lo he dicho: pues, puede haber cuatro o cinco.*

I.- *¿Y el de abajo, el multiplicador?*

Ma.- [Permanece en silencio durante 20' aprox.]. *Tres.*

I.- *¿Por qué?*

Ma.- *Porque hay tres filas [indicio de uso Analítico]. No me había dado cuenta de eso. ¡He tardado en averiguarlo!*

Conclusión: Proporciona una respuesta correcta con argumentos que relacionan la información disponible con el posible número de cifras del multiplicando y el multiplicador. Se establecen relaciones no-usuales entre diferentes partes de la secuencia algorítmica. Se trata, en consecuencia, de una respuesta de tipo 6b.

Situación 7 [Exclusiva y Analítica]

I. Posibilidades de uso del algoritmo

(a) Utilización propia de la faceta Técnica por cuanto se manifiesta una dependencia clara en el conocimiento de los factores, en este caso del multiplicando, y en el orden establecido de la secuencia algorítmica. En este grupo reunimos a los alumnos que abandonan la tarea sin haber mostrado en el proceso indicios suficientes de empleo Analítico: flexibilidad para recorrer la secuencia algorítmica en diferentes sentidos, independencia de los factores y uso de distintas relaciones no-usuales.

(b) Empleo Analítico manifestado en la identificación y uso de las relaciones no-usuales que conducen a la solución; en este caso concreto, las relaciones A y B (apartado 8.5.1.1). En esta posibilidad se incluyen también aquellos alumnos que, si bien muestran dependencia de las cifras del multiplicando y sienten la necesidad de retomar continuamente el orden algorítmico preestablecido, manifiestan sin embargo algunos recursos ocasionales de carácter analítico. Por ejemplo, el uso continuado de relaciones entre partes no contiguas del algoritmo.

II. Ejemplos de respuestas representativas

Tipo 7a:

Antonio (1º ASI)

[Ningún registro escrito: respuesta en blanco].

An.- *Si no completas esto no sabes lo huecos tampoco.* [Pasados unos 30'' en silencio]. *¡Esto es difícil!* [**Dependencia**].

I.- *¿Sí?*

An.- [Tras 15'' en silencio y murmullo] *Si no busco los números de arriba yo no lo saco.* [**Dependencia**].

I.- *¿Perdón?*

An.- *Si no busco los números de arriba que no lo saco.* [30'' aprox. sin decir nada] *Buscando lo de arriba, es que si no. 3 por 5, 15, es que no se sabe si te llevas 1 o no.* [**Dependencia**] [Otros 20'' de silencio prolongado]

I.- *¿Qué estabas pensando?*

An.- *Pues, hay que buscar los números de arriba. Así, a simple vista no sería capaz.*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

An.- *Si tengo que buscarlos y... Es sin tener que buscarlo, no lo saco.*

Conclusión: Este alumno se muestra fuertemente condicionado por el conocimiento de las cifras del multiplicando y por el orden estándar de la secuencia algorítmica. En ningún momento manifiesta flexibilidad en el uso de relaciones no-usuales entre los pasos del procedimiento algorítmico, característica del empleo Analítico del algoritmo. Por tanto, es una respuesta de tipo 7a.

Tipo 7b:

Mariano (1º Bach.)

7. En la siguiente multiplicación se ha ocultado el multiplicando. A pesar de ello ¿podrías completar los cálculos?

$$\begin{array}{r}
 \text{[Ocultado]} \\
 \times \quad 303 \\
 \hline
 38\boxed{}\boxed{}5 \\
 \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{} \\
 \boxed{}\boxed{}83\boxed{} \\
 \hline
 \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}5
 \end{array}$$

Ma.- *Esto daría 0... ¿no?* [en referencia al 2º resultado parcial]. *Por 0, entonces me da por lo que sea, por 0. Claro...* [20'' aprox. de trabajo en silencio, donde el alumno logra detectar las cifras ocultas por los huecos]. *¿No?* [**Indicio de uso Analítico**].

I.- *¿Cómo?*

Ma.- *Como están... si están aquí los números que faltan a éste.*

I.- *Que están ahí los números...*

Ma.- *Estos dos [el 8 y el 3 del 3º resultado parcial] son los que faltan aquí [en el 1º resultado parcial].* [**Indicio de uso Analítico**].

I.- *El 8 y 3 son los que faltan arriba.*

Ma.- *Sí. Como es 3 también aquí, es el mismo 3...* [comparación de las centenas y unidades del multiplicador]. [**Indicio de uso Analítico**].

I.- *Entiendo.*

Conclusión: El alumno resuelve la tarea identificando y utilizando las relaciones no-usuales incluidas en la multiplicación y características del uso Analítico del algoritmo. Se trata de una respuesta de tipo 7b.

Situación 8 [Exclusiva y Analítica]

I. Posibilidades de uso del algoritmo

(a) Empleo del algoritmo Técnico (a veces inadecuado) sin manifestación apreciable de uso Analítico. La incapacidad para completar la tarea resulta una consecuencia de este uso.

(b) Se reconocen algunas muestras emergentes, evidentes aunque no continuadas, de empleo Analítico del algoritmo. Este desempeño puede resultar suficiente para resolver alguna MCCD.

(c) Empleo Analítico. Lo identificamos en la capacidad para, de forma directa, trascender al orden establecido y recorrer la secuencia algorítmica en sentidos diferentes al estándar en las dos MCCD's propuestas. Por lo general, este uso lleva consigo la resolución completa de la tarea aunque no sea éste el criterio a observar.

II. Ejemplos de respuestas representativas

Tipo 8a:

Karina (1° ESO)

4. Completa:

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \times 45 \\ \hline \square 30 \\ \square 44 \\ \hline \square 870 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \times \square 7 \\ \hline \square \square 5 \\ \square 0 \\ \hline \square 45 \end{array}$$

Ka.- [Primera MCCD] *A ver, 2 por 5, 10, me llevo 1. 5 por... 3 son 15.* [Transcurren 35'' de reflexión en silencio]. *Esa está bien porque no le puedo poner otra. Como no sea 4: 5 por 4, 20. Sí, ahí puede ser 4. No, tampoco.* [Tras 40'' en silencio] *¡Si es que no me salen de éstas porque...!*

I.- *¿Qué problema tienes en ésta?*

Ka.- *Pues porque no me da ninguno en ese número. Aquí, 2 por 5, sí, 10, pero después ahí [decenas del multiplicando] es que no me da. No me da ninguno. [Indicio de dependencia en el orden algorítmico].*

...

I.- *Bueno, intenta la siguiente a ver.*

Ka.- [Transcurren aprox. 1' 15'' en silencio en los que la alumna intenta **completar los huecos siguiendo los pasos usuales de la secuencia estándar**. De este modo propone 15 como multiplicando y 105 como primer resultado parcial]. *Pero después aquí... ahí tampoco me da después [no hay ajuste con la suma en columnas]. A 2, sí, pero después yo me llevo... ¡si es que no me sale! Porque después 2 por 7, 14 y el 3 que me llevo, entonces tampoco me da. Son 17 y ahí un 7 y me da un 4.* [Reconoce que las decenas del primer resultado parcial deben ser 4 aunque no las fija como resultado concluyente. **Se mantiene la influencia del orden establecido**] *¡Yo qué sé si es que...!* [Transcurren unos 20'' en silencio] *Y después ahí tampoco sería porque... si es que no porque no salen los números. Aquí son 35, me llevo 3 y después aquí cuando multiplicas 7 por 1, esto son 7 más 3, 10 y aquí no te sale porque si pones aquí 10, después aquí en el resultado te da 4 y no lo puedes sumar. ¡Así que esto no sale! Esto no sale, no sé porqué.* [Ausencia de uso analítico].

Conclusión: No se manifiestan indicios claros de un uso Analítico del algoritmo. La dependencia en el orden de la secuencia algorítmica estándar impide a la alumna identificar

las relaciones no-usuales entre partes del algoritmo necesarias para completar las cifras del multiplicando y el multiplicador en ambas MCCD. Se trata de una respuesta de tipo 8a.

Tipo 8b:

Clara (3º ESO)

8. Completa:

$$\begin{array}{r} \boxed{2} \boxed{6} \\ \times 45 \\ \hline \boxed{4} 30 \\ \boxed{} 44 \\ \hline \boxed{} 870 \end{array} \quad \begin{array}{r} \boxed{3} \boxed{6} \\ \times \boxed{2} 7 \\ \hline \boxed{2} \boxed{4} 5 \\ \boxed{} 0 \\ \hline \boxed{} 45 \\ 9 \end{array}$$

Cla.- [Tras intentar la primera MCCD en silencio durante 55'' aprox.] *No me da.*

I.- *No te da.*

Cla.- *No.*

I.- *¿Por qué no te da?*

Cla.- *Porque yo he puesto los números que valen para ésta, para esta fila...*

I.- *Para la primera [primer resultado parcial].*

Cla.- *Sí y luego cuando voy a multiplicar la de aquí abajo no me da porque pongo: 4 por 6, 24, me llevo 2; 4 por 2, 8, 9 y 10 y aquí pone un 4. No puedo. [Dependencia en el orden algorítmico].*

I.- *¿Y este 6 [unidades del multiplicando] por qué lo has puesto?*

Cla.- *Porque son 5 por 6, 30 y me llevo 3. Y luego si multiplico 5 por 2, 10 y 3, 13. Me da la cifra de arriba. Pero ya no puedo completarlo más porque es que no me da la de aquí abajo. [Aún no trasciende al orden estándar. Seguidamente afronta la resolución de la segunda MCCD].*

I.- [Transcurrido 1' 25'' en silencio]. *¿Y esa cómo la has hecho? Explícame.*

Cla.- *Ésta, tengo que ir buscando los números para que cuando se multipliquen me dé el resultado. Vamos a ver, yo he cogido el 5 porque 7 por 5 son 35 y aquí el 5 ya está puesto. Y me he llevado 3. Y luego he tenido que mirar un número que cuando lo haya multiplicado, el resultado me tendría que dar 4 porque luego al sumarlo, como hay un 0, es 4. [Indicador de flexibilidad en el recorrido algorítmico].*

I.- *Entiendo.*

Cla.- *Y eso.*

I.- *¿Por eso pones el 3 [decenas del multiplicando] ahí, no?*

Cla.- *Sí, porque 7 por 3, 21, ¿no? Por eso, un 3 o... no sé. [Indicio de empleo Analítico].*

Conclusión: En este caso se manifiestan indicios emergentes de empleo Analítico del algoritmo (segunda MCCD) tras haber mostrado previamente dependencia en el orden algorítmico estándar (primera MCCD). Por no ser directo y constante el empleo Analítico consideramos la respuesta dada como de tipo 8b.

Tipo 8c:

Cecilio (1º ASI)

8. Completa:

$$\begin{array}{r} \boxed{5} \boxed{7} \\ \times 45 \\ \hline \boxed{4} 30 \\ \boxed{} 44 \\ \hline \boxed{} 870 \end{array} \quad \begin{array}{r} \boxed{2} \boxed{6} \\ \times \boxed{2} 7 \\ \hline \boxed{2} \boxed{4} 5 \\ \boxed{} 0 \\ \hline \boxed{} 45 \\ 9 \end{array}$$

Ce.- [Tras la resolución de la primera MCCD] *Ya está. Aquí multiplico esto [5 por 6], serían 30, me llevo 3. Y aquí he buscado pues... como aquí la resta de esto [8 menos 4] me daba 4, pues he buscado el que me diera 40. 8 por 5, 40 y 3 de las que me llevaba...43 y luego pues buscar; multiplicar esto y ya está.* [**Trascendencia del orden estándar. Indicador evidente de uso analítico**].

I.- *¿Y la siguiente?*

Ce.- [Después de 1' 45'' aprox. de silencio completando los huecos de la segunda MCCD] *Aquí, uno que me diera 5 al multiplicar 7. 7 por 5, 35 y como aquí la suma es 4 y esto es 0 pues aquí tendría que poner un 4. Pues suelo buscar el número que al multiplicarlo por 7 y sumarle 3, me diera aquí un 4: 24. 7 por 3, 21 y 3, 24.* [**Nuevo indicio de uso analítico**].

Conclusión: Este alumno emplea el algoritmo de un modo Analítico para completar las cifras de ambas MCCD. Se trata de una respuesta de tipo 8c.

Situación 9 [Exclusiva y Formal]

I. Posibilidades de uso del algoritmo

(a) Ninguna manifestación clara de uso formal del algoritmo. Las respuestas dadas vienen acompañadas en todo caso de argumentos externos ajenos a la verdadera justificación. También incluimos en este grupo las respuestas acertadas acompañadas de explicaciones alejadas de lo Formal.

(b) Empleo Formal irregular. Se manifiesta en respuestas con justificaciones variables, a veces contradictorias, no siempre de naturaleza Formal. Ocasionalmente se proporcionan, entre argumentaciones no formales, explicaciones que evidencian un cierto reconocimiento de características sobre alguno de los principios justificativos del algoritmo.

(c) Empleo Formal regular. Coherencia en las respuestas con justificaciones acertadas sustentadas de forma continua en las propiedades del sistema de numeración decimal posicional y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

II. Ejemplos de respuestas representativas

Tipo 9a:

Rosa (3º ESO)

[Ningún registro escrito pues se trata de una tarea de respuesta verbal].

I.- *La primera: ¿qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse cuando uno multiplica?*

Ro.- [Permanece en silencio unos 15'']. *Porque sí.*

I.- *3 por 6, 18...*

Ro.- *Me llevo 1.*

I.- *...me llevo 1. ¿Eso por qué es?*

Ro.- [Instantes en silencio]. *Porque sí, porque no vas a poner aquí 18. 6 por 3, 18 y después la juntas con la otra y esto. ¿No? Es que no... no sé.* [**Ausencia de un uso Formal del algoritmo**].

I.- [Tras 15'' en silencio]. *¿Y por qué crees que se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada una del multiplicando?*

...

Ro.- *Yo qué sé. Es que es una pregunta... no sé. ¿Por qué hay que multiplicarse? Es que no lo entiendo, no sé. Porque son...* [Vuelve a quedarse en silencio durante otros 15'' aprox.].

I.- *Dime, ¿qué crees tú? ¿O por qué hay que ir colocando los resultados parciales uno debajo del otro?*

Ro.- [Tras permanecer 25'' en silencio]. *No sé. Yo siempre hago multiplicaciones y nunca me he parado a pensar eso. [Ausencia de un uso Formal del algoritmo].*

I.- *¿Y lo del hueco? ¿Por qué se deja un hueco en esa fila? ¿Qué significado tiene ese hueco?*

Ro.- [15'' de silencio]. *Pues no sé qué significado tiene pero... es que no sé, es que no lo sé. Es que, mira, yo siempre hago multiplicaciones así, ¿no?, normales, como todo el mundo y yo nunca me he parado a ver por qué se tienen que llevar, por qué se colocan así,.... Este hueco porque no lo han enseñado así, yo qué sé. Nunca me han dicho el porqué. Siempre cuando se multiplica el segundo, pues ya falta el espacio y después así, siempre cuando.... Es que no lo sé. [Ausencia de un uso Formal del algoritmo].*

Conclusión: No se aprecia ninguna manifestación de empleo Formal del algoritmo estándar escrito de la multiplicación pues las justificaciones dadas se alejan de los principios que fundamentan el algoritmo. Por tanto, esta alumna proporciona una respuesta de tipo 9a.

Tipo 9b:

Rubén (1º Bach.)

[Ningún registro escrito pues se trata de una tarea de respuesta verbal].

I.- [El alumno permanece sin decir nada durante unos 30''] *¿Por qué hay que llevarse 1 cuando uno multiplica 3 por 6 y dice 18?*

Ru.- *Pues, porque luego tienes... porque tienes que hacer otra cuenta. Yo qué sé, porque... si pones 18, pues entonces la otra la tenías que poner más para allá todavía y entonces daría más de lo que en realidad es. Por ejemplo, si dices 3 por 6, 18 y pones así el 18 [sin la acción de llevarse] y luego haces la siguiente, pues entonces la tendrías que ir haciendo así. Entonces, ahí te daría una expresión con más de tres dígitos. [Explicación no reconocida como de uso Formal del algoritmo].*

I.- *Entiendo. Oye, ¿y por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Es decir, ¿el 3 por el 6, por el 4, por el 1 y después lo mismo con la otra cifra?*

Ru.- [Instantes de reflexión en silencio]. *No sé.*

I.- *¿No se te ocurre nada?*

Ru.- *Pues para simplificarlo un poco más, digo yo. 146 por 3 es 3 veces 146, pues entonces es como si dijeras 3 veces el 6, 3 veces 4 y 3 veces el 1 pero llevándose... no sé, digo yo. Es que no lo sé. [Identificación de la propiedad distributiva. Indicador de uso Formal].*

...

I.- *Aquí, en esta fila. ¿Qué significado tiene ese hueco?*

Ru.- *Por eso, porque si, por ejemplo, el 292 lo pones debajo del 438, justo debajo, pues entonces la suma no sería eso, sería muchísimo menos porque le estarías dando menos valor. Porque en realidad no estás multiplicando por 2 sino por 20 [reconocimiento del valor posicional. Uso Formal]. Digo yo que será por 20. Entonces por eso te dejas un valor que sería el de las unidades que es el 3; en el 23 el 3 son las unidades y ese es el que te dejas.*

...

I.- *Bueno, ¿y por qué se tiene que sumar al final en columnas para obtener un resultado?*

Ru.- *Pues, porque no has multiplicado 23 directamente. Primero has multiplicado el 3 y después has multiplicado el 2 [ahora no se reconoce el valor de posición (uso no Formal), pero sí la propiedad distributiva (uso Formal)]. Por eso. Entonces luego lo tienes que sumar.*

Conclusión: El alumno muestra indicios de un uso Formal del algoritmo estándar escrito. Ahora bien, este uso no es de todo completo en el sentido de que las explicaciones dadas resultan incompletas y en fases puntuales llegan a contradecirse. Esto es, no se manifiesta una coherencia total en las respuestas aunque sí síntomas de empleo Formal. En consecuencia, estamos ante una respuesta de tipo 9b.

Tipo 9c:**M^a. Dolores (3^o ESO)**

[Ningún registro escrito pues se trata de una tarea de respuesta verbal].

M^a. D.- *¿Por qué hay que llevarse cuando se multiplica?*

I.- *Sí.*

M^a. D.- *Porque se sobrepasa y se lleva a otra cantidad diferente, a otra cantidad mayor.*

I.- *¿Se sobrepasa, qué?*

M^a. D.- *Umm, en cuanto empieza a pasarse del 9, ¿no?, o sea cuando llega ya al 10, ese ya está cambiando de... de unidad. ¿Eso lo tengo que escribir? [reconocimiento del valor posicional. Indicio de uso Formal del algoritmo]*

I.- *No.*

M^a. D.- [Leyendo la segunda cuestión en voz alta] *¿Por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Porque aunque sean diferentes o sean parecidas, después cada uno tiene su espacio y... son tantas cantidades que se van a multiplicar como sí... Puede haber aquí un 5 y se multiplica por éste, a lo mejor te sale lo mismo pero como cada una tiene su hueco y su espacio sería una cantidad diferente. [Uso de las propiedades del sistema de numeración posicional].*

...

M^a. D.- *Es como si se multiplicase el 3 por 146 y 20 por 146, sería lo mismo. [Identificación de la propiedad distributiva. Nuevo indicio de uso Formal].*

I.- *Ya, entiendo.*

M^a. D.- *Daría el mismo resultado porque... ésta [las 3 unidades del multiplicador] ocupa un sitio y ésta [las 2 decenas del multiplicador] ocupa otro diferente. No es lo mismo tener 23 que tener 32.*

...

M^a. D.- *¡Ah!, ¿por qué se ha dejado un hueco en la fila correspondiente al segundo resultado parcial? Porque esto es como si fuera un 20, nada más que se deja el hueco para que no multipliques 2, porque si multiplicas 2 no es lo mismo que multiplicar por 20.*

I.- *¿Y el hueco, entonces?*

M^a. D.- *Pues para eso. Haces como si fuera un 0. Es igual que si multiplicases 20 por 146, por eso está el hueco. Porque si tú multiplicas 2 y los colocas... si tú multiplicases 2 nada más y lo colocas justo debajo, como hay una cuenta anterior, pues el resultado no es lo mismo. Y es que lo que se está haciendo es 23, no por 2. [Se mantiene el reconocimiento del valor de la posición. Uso Formal].*

...

M^a. D.- *Todo eso. [Instantes de silencio] El orden que se establece, eso ya... ya es una propiedad. El orden establecido porque están las decenas, las centenas y todo así, ¿no?... las unidades. Y nada más que la posición que ocupe cada número eso va a hacer que cambie el resultado o que sea diferente. [Nuevo uso Formal].*

Conclusión: Durante todo el diálogo se proporcionan argumentos coherentes que demuestran un claro reconocimiento de los principios justificativos del algoritmo, lo cual justifica que consideremos como Formal el uso dado al algoritmo en esta tarea. Por tanto, es una respuesta de tipo 9c.

8.6.3 Respuestas de la muestra

A modo de resumen se incluye, en la tabla 8.2, la distribución de los alumnos de la muestra en función de las respuestas proporcionadas y de acuerdo con los criterios y tipos de respuesta señalados.

8.6.4 Interpretación de las respuestas en términos de comprensión

Primeramente, es preciso fijar la base terminológica y semántica necesaria para posicionar y dotar de sentido a la pretendida interpretación en términos de comprensión acerca de los comportamientos observables de los sujetos identificados en la fase de análisis de la información recopilada.

En este sentido, tal como se concluyó en el capítulo VII convenimos establecer, en primer lugar, dos ámbitos de comprensión diferentes en el caso del algoritmo estándar escrito del producto, uno Fundamental y otro Extendido. De este modo, la situación cognitiva de los sujetos vendrá descrita en términos de una *comprensión fundamental* del algoritmo, constituida a partir de las respuestas dadas ante situaciones Exclusivas; y una *comprensión extendida*, que viene a ampliar el cuadro fundamental a través de situaciones de naturaleza No-Exclusiva.

A su vez, dentro de la esfera fundamental, la comprensión del algoritmo estándar escrito del producto manifiesta tres facetas distintas con entidad propia, a las que denominamos por mantener una similitud con los términos epistemológicos introducidos, *Técnica*, *Analítica* y *Formal*.

Estas nociones constituyen la estructura conceptual en la que apoyamos la interpretación de respuestas presentada a continuación.

8.6.4.1 Comprensión Fundamental

Para cada una de las facetas de comprensión fundamental consideradas, describimos los posibles estados de comprensión sobre el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

A) Faceta Técnica

Dentro de este ámbito establecemos tres estados de comprensión diferentes, ordenados por grado de desarrollo:

[TB] *Comprensión Técnica Básica*. Caracterizada como aquella que permite el *reconocimiento* del algoritmo. En el estudio, un alumno posee este tipo de comprensión cuando durante la prueba observamos en él al menos una aplicación Técnica acertada del algoritmo. Por ejemplo, los estudiantes con una respuesta de tipo *4b* o *4c* ya están manifestando una comprensión Básica del algoritmo.

[TI] *Comprensión Técnica Incipiente*. Es aquella que permite dar muestras, además del reconocimiento, de alguno de los otros dos aspectos identificativos del uso Técnico del algoritmo: *destreza* o *independencia a la disposición de factores*³. Esta comprensión, aunque supera a la identificada como Básica, continúa transmitiendo un sentido de irregularidad en el uso del algoritmo. De aquellos estudiantes de la muestra que manifestando una comprensión Básica hayan proporcionado además alguna terna de respuestas del tipo [*3a'*, *4c*, *5b*], [*3a'*, *4b*, *5b*], [*3b'*, *4c*, *5a*] diremos que poseen una comprensión Técnica Incipiente.

³ Conviene subrayar que puesto que no nos preocupamos por estudiar la relación específica existente en el plano cognitivo entre *destreza* e *independencia a los factores*, ambos aspectos son incluidos sin distinción como elementos caracterizadores en el estado de comprensión Técnica *incipiente*.

[TC] *Comprensión Técnica Consolidada*. Hace posible que los sujetos muestren indicios de *reconocimiento, destreza e independencia* a la disposición de factores en el algoritmo. Esta comprensión deja entrever una situación de regularidad en el empleo certero del algoritmo a nivel Técnico. Los alumnos con respuestas *3b'*, *4c* y *5b* (considerando también las posibilidades Técnicas *1b* y *2b*) son identificados con una comprensión Técnica Consolidada.

B) Faceta Analítica

Los estados de comprensión Técnica mantienen su vigencia en el ámbito Analítico, aunque ahora vienen caracterizados del siguiente modo:

[AB] *Comprensión Analítica Básica*. Queda garantizada con al menos una muestra de empleo Analítico del algoritmo en cualquiera de las situaciones propias de la categoría. En el estudio manifiestan este estado de comprensión aquellos alumnos que hayan aportado, al menos, respuestas de tipo *6b* o *7b* u *8b*.

[AI] *Comprensión Analítica Incipiente*. Es aquella que permite el uso Analítico del algoritmo aunque de un modo irregular a lo largo de las situaciones de la categoría. Este estado proporciona muestras evidentes pero a la vez eventuales de acceso a la esfera analítica. A través de las situaciones 6, 7 y 8 observamos en algunos alumnos un fenómeno de emergencia ocasional e irregular de uso analítico del algoritmo que sin embargo no llega a ser constante. Es precisamente este hecho el que caracteriza a la comprensión Analítica Incipiente. Los alumnos con un desempeño fundamentalmente de tipo *b* en las situaciones 6 y 7 y de tipo *c* en S8 pero con alguna respuesta de tipo *a* (*6a* o *7a*) o *b* (*8b*), son catalogados como de comprensión Analítica Incipiente.

[AC] *Comprensión Analítica Consolidada*. Hace posible que los sujetos muestren indicios regulares y estables de empleo Analítico del algoritmo. Los alumnos con respuestas *6b*, *7b* y *8c* se incluyen en este estado de comprensión.

C) Faceta Formal

En esta faceta establecemos, en cambio, dos estados de comprensión relevantes:

[FI] *Comprensión Formal Incipiente*. Los alumnos que poseen este tipo de comprensión proporcionan muestras eventuales de empleo Formal aunque sin llegar a ser estables. Esto es, en esencia se intuye parcialmente los motivos que justifican el porqué del funcionamiento del algoritmo. La respuesta *9b* resulta característica de este estado de comprensión.

[FC] *Comprensión Formal Consolidada*. Hace posible que los sujetos muestren indicios regulares de un empleo Formal. La identificamos con la capacidad para justificar razonablemente el funcionamiento interno del algoritmo mediante los principios matemáticos básicos que lo sustentan. Los alumnos que han revelado una respuesta de tipo *9c* los consideramos con una comprensión Formal Consolidada.

En este estado de comprensión incluimos tanto las explicaciones informales, construidas en lenguaje cotidiano con algunas referencias a términos matemáticos, como los razonamientos rigurosos y precisos acompañados de menciones explícitas sobre las propiedades justificativas del algoritmo. Por tanto, no hacemos en principio

una distinción expresa de estas dos posibilidades aunque reconocemos que con la segunda se manifiesta una comprensión más evolucionada que con la primera.

8.6.4.2 *Comprensión Extendida*

Las situaciones No-Exclusivas, tal como argumentábamos en el capítulo anterior, nos permiten esencialmente extender el perfil de comprensión Fundamental de los sujetos, conformado a través de las situaciones Exclusivas, y establecer posibles diferencias entre alumnos de comprensión Fundamental equivalente. Por tanto, las respuestas dadas por la muestra de alumnos a las tres primeras situaciones de la prueba, catalogadas en términos de uso del algoritmo, proporcionan nuevos indicadores acerca de la comprensión del algoritmo.

Así pues, asignaremos el estado de *comprensión Extendida* en sus facetas Técnica (ET), Analítica (EA) o Formal (EF), a aquellos sujetos que hayan empleado el algoritmo, respectivamente, de forma Técnica, Analítica o Formal en alguna situación No-Exclusiva de la misma categoría. En el estudio, las respuestas *1b* y *2b* constituyen la referencia para considerar a los alumnos con una comprensión Extendida a nivel Técnico. De igual manera, las respuestas *2c* y *3c* revelan una comprensión Extendida Analítica y Formal, respectivamente.

Asimismo, desde este enfoque resulta evidente que un mismo alumno puede llegar a evidenciar una comprensión Extendida en más de una faceta, Técnica, Analítica o Formal.

8.6.4.3 *Consideraciones adicionales sobre la interpretación*

La clasificación e interpretación de respuestas dadas se ha desarrollado en un nivel de análisis que admite una concretización y profundización mayor. De hecho, somos conscientes de que las respuestas dadas por los alumnos muestran matices interpretables en términos de comprensión que van a permanecer ocultos en el nivel de análisis empleado. La consideración de estos matices puede llevarnos incluso a establecer diferencias entre sujetos ahora contemplados como de comprensión semejante.

No obstante, lo que en apariencia resulta una limitación del análisis, dado que vamos a obviar dichos matices, nos proporciona en cambio la ventaja de poder tratar e interpretar la información desde una perspectiva más adecuada para la identificación de regularidades y con una generalidad suficiente para obtener resultados y conclusiones de interés difícilmente identificables en niveles de análisis más detallados.

Tras esta observación, hacemos explícitos a continuación algunos de los matices omitidos con objeto de precisar el nivel de análisis concreto en el que nos hemos situado:

1. A nivel Técnico, al caracterizar la comprensión Incipiente no hemos diferenciado en ella entre destreza e independencia a la disposición de los factores en el algoritmo. Ambos aspectos han sido equiparados a la hora de valorar la comprensión en los alumnos, en el sentido de que con independencia del aspecto mostrado, todos ellos manifiestan al final el mismo tipo de comprensión, en este caso Incipiente. Así por ejemplo, los alumnos José Andrés (1º ESO) y Raúl (3º ESO) son valorados con una comprensión Fundamental Técnica Incipiente, después de que el primero proporcione la terna de respuestas [*3a'*, *4c*, *5b*] y el segundo [*3b'*, *4c*, *5a*].

2. A nivel Analítico también hemos establecido equivalencias en cuanto a comprensión Fundamental Básica e Incipiente entre distintas posibilidades de respuesta a lo largo de las situaciones. Así, en el estado de comprensión Básica, tal como lo hemos caracterizado, se incluyen alumnos como Rosa (3º ESO) con respuestas [6a, 7a, 8b] y Sergio (1º ASI) con respuestas [6b, 7a, 8a]. De igual manera, manifiestan una comprensión Fundamental Analítica Incipiente, por ejemplo, tanto Miguel (1º ESO) con respuestas [6b, 7b, 8a] como David (1º Bach.) con respuestas [6a, 7b, 8c].

3. A nivel Formal, para valorar la comprensión como Formal Incipiente no nos preocupamos por identificar qué propiedades justificativas del algoritmo son reconocidas por el alumno y cuáles no. Así, consideramos equivalentes a los alumnos como Sergio (1º ASI), que tan sólo ha intuido alguna propiedad del sistema de numeración posicional como elemento justificativo de la naturaleza y funcionamiento del algoritmo, respecto a aquellos otros como Rubén (1º Bach), que son capaces de proporcionar, entre contradicciones y explicaciones no-formales, muestras constantes de la distributividad del producto sobre la suma como propiedad justificativa.

4. En el ámbito Extendido, hemos considerado que una única muestra de uso Técnico, Analítico o Formal en las situaciones No-Exclusivas empleadas es suficiente para conceder al alumno una comprensión Extendida Técnica, Analítica o Formal, según sea el caso. Sin embargo, reconocemos que en cada una de las tres facetas queda abierta la posibilidad de poder establecer subtipos más concretos, de forma similar a lo realizado en la esfera Fundamental.

Por otra parte, la comprensión Extendida Técnica viene dada indistintamente por el uso Técnico del algoritmo en alguna de las dos primeras situaciones No-Exclusivas presentadas, de modo que no nos hemos preocupado por diferenciar casos y definir matices en cuanto a comprensión.

En otro orden de reflexión, de acuerdo con los supuestos teóricos adoptados, no llevamos a cabo una interpretación negativa de la respuesta en términos de un estado de ausencia de comprensión en caso de no exteriorizarse comprensión de alguno de los tipos considerados. No obstante, tal circunstancia no impide, como veremos en el apartado 8.7.1, que dicha posibilidad venga reflejada también en los perfiles de comprensión asociados a los sujetos.

Por último, desde la interpretación adoptada se puede apreciar también un máximo en la valoración de la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Este límite es aquel que se manifiesta en lo Fundamental con una comprensión Técnica, Analítica y Formal Consolidadas, además de una comprensión Extendida Técnica, Analítica y Formal. Los diversos perfiles de comprensión mostrados por los alumnos de la muestra necesariamente se situarán por debajo de esta referencia valorativa.

8.7 Resultados y conclusiones

Los resultados y conclusiones vienen agrupados en tres bloques de acuerdo con los objetivos empíricos de la investigación. El primero y el segundo se refieren a la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales,

mientras que el tercero tiene que ver con la comprensión del conocimiento matemático en general. El primero de ellos se centra exclusivamente en la determinación de los perfiles de comprensión Fundamental y Extendida para cada uno de los alumnos participantes. Del examen de estos perfiles se extraen algunos resultados de utilidad para la posterior identificación y concreción de características y aspectos particulares de la comprensión del algoritmo, lo que constituye el segundo bloque de resultados y conclusiones. Ambos bloques se exponen en el apartado 8.7.1 que sigue a continuación.

Por último, los resultados obtenidos en el estudio particular realizado sobre el algoritmo estándar escrito del producto de números naturales nos permiten elaborar algunas argumentaciones referentes a la comprensión del conocimiento matemático en general, discusión que completa el tercer bloque de resultados y conclusiones y que se presenta en el apartado 8.7.2 de esta misma sección.

8.7.1 Comprensión del algoritmo de multiplicar

Dedicamos en lo que sigue sendos apartados a los resultados relativos a los perfiles de comprensión y a otras diferencias y regularidades de interés encontradas en relación con la comprensión del algoritmo.

8.7.1.1 Perfiles de comprensión

Conviene tener presente que en este estudio no garantizamos una totalidad de posibles perfiles de comprensión. Con la selección de una muestra heterogénea hemos procurado identificar y mostrar situaciones de comprensión sustancialmente diferentes aunque sin ánimo de ser exhaustivos. Entendemos que son los propios sujetos los que van a ir manifestando con sus acciones sus propios perfiles de comprensión por lo que queda abierta la posibilidad de que alumnos distintos a los seleccionados generen perfiles no revelados en este estudio. En cambio, lo que sí garantizamos es la base estructural de referencia que facilita la interpretación y ubicación relativa de nuevos perfiles. Y es en este punto donde creemos que se encuentra uno de los principales aportes de la propuesta de valoración de la comprensión presentada en la parte teórica y que ahora se pone a prueba.

Por otra parte, hemos de recordar que los **estados** y **perfiles** de comprensión propuestos vienen caracterizados en términos del uso del algoritmo y según las categorías situacionales obtenidas. Estos perfiles podrían ordenarse por grados en función de cuán completos sean respecto a un supuesto perfil máximo surgido también de los usos del algoritmo y conformado a partir de la epistemología y fenomenología del algoritmo. En este caso, tal como hemos señalado en el apartado 8.6.4.3, el perfil máximo se correspondería con el [TC; AC; FC || ET; EA; EF].

A continuación, presentamos en la tabla 8.3 los perfiles de comprensión identificados en los alumnos de la muestra de acuerdo con la interpretación expuesta en el apartado 8.6.4.

		Comprensión Fundamental							Comprensión Extendida			
		Técnica			Analítica			Formal	Extendida			
		TB	TI	TC	AB	AI	AC	FI	FC	ET	EA	EF
1° ESO	María											
	José Andrés											
	Karina											
	Cristina											
	Miguel											
	Manuel											
3° ESO	M ^a Dolores											
	Clara											
	Rosa											
	Raúl											
	Jennifer											
	Carlos											
1° Bach.	Mariano											
	Inés											
	Tomás											
	David											
	Rubén											
	Guillermina											
1° ASI	José											
	Manolo											
	Cecilio											
	David											
	Antonio											
	Sergio											

Tabla 8.3.- Perfiles de comprensión asociados a la muestra participante en el estudio

Sobre la base de los perfiles de comprensión obtenidos se pueden observar los siguientes hechos:

- Acerca de la Comprensión Fundamental:

1. Alumnos de 1° ESO:

(a) No manifestaron comprensión de carácter Consolidado en ninguna de las tres facetas, Técnica, Analítica y Formal.

(b) Cuatro de ellos mostraron una comprensión Técnica Básica y sólo dos, Incipiente.

(c) A nivel Analítico, cuatro estudiantes evidenciaron una comprensión Incipiente, sólo una alumna (María) mostró una comprensión Básica y la última alumna (Karina) no manifestó comprensión Analítica alguna.

(d) Cuatro de estos alumnos no exteriorizaron indicio alguno de comprensión Formal, ni tan siquiera Incipiente.

2. Alumnos de 3º ESO:

(a) No manifestaron comprensión Analítica Consolidada. En sólo una alumna (M^a Dolores) se apreciaron indicios de comprensión Consolidada a nivel Técnico y también Formal.

(b) En el resto de estudiantes dos de ellos mostraron comprensión Técnica Básica y los otros tres, Incipiente.

(c) Cinco alumnos revelaron una comprensión Analítica Incipiente y sólo una (Rosa) la mostró Básica.

(d) En el ámbito Formal, tan sólo un alumno (Carlos) dio muestras de comprensión Incipiente. Los otros cuatro restantes no manifestaron comprensión Formal alguna.

3. Alumnos de 1º de Bachillerato:

(a) Tan sólo uno (Mariano) proporcionó evidencia de una comprensión Consolidada, en concreto a nivel Técnico y Analítico. Tres alumnos más (Inés, Tomás y Guillermina) mostraron una comprensión Consolidada sólo a nivel Formal. El resto no superó el estado de comprensión Incipiente en ninguna de las tres facetas.

(b) Así, a nivel Técnico dos alumnos manifestaron una comprensión Básica y tres Incipiente.

(c) Cinco estudiantes evidenciaron una comprensión Analítica Incipiente. Por tanto, todos dieron muestras de haber superado el estado de comprensión Básica.

(d) En lo Formal, además de los tres estudiantes de comprensión Consolidada, otros dos más (Mariano y Rubén) manifestaron un estado de comprensión Formal Incipiente mientras que el alumno restante (David) no reveló ningún indicio de comprensión Formal.

4. Alumnos de 1º ASI:

(a) Dieron muestras más constantes de comprensión Consolidada. En concreto, excepto dos alumnos (Antonio y Sergio), todos revelaron una comprensión de carácter Consolidado en alguna de las tres facetas. De hecho, dos de ellos (José y Manolo) mostraron este estado de comprensión a nivel Técnico, Analítico y Formal; otro (Cecilio) a nivel Analítico y Formal; y un tercero (David) a nivel Técnico y Analítico.

(b) Dos estudiantes (Cecilio y Antonio) evidenciaron una comprensión Técnica Incipiente y sólo uno (Sergio), Básica.

(c) Ninguno de los alumnos de este grupo mostró una comprensión Analítica Incipiente. Además de los cuatro alumnos mencionados de comprensión Analítica Consolidada, la de los otros dos (Antonio y Sergio) fue Básica.

(d) Dos alumnos (David y Antonio) no dieron muestras de comprensión Formal.

- Acerca de la Comprensión Extendida:

5. En 1º ESO todos los alumnos revelaron algún tipo de comprensión Extendida. En concreto, cuatro de ellos una comprensión tan sólo Técnica; otra estudiante (Cristina), una comprensión Extendida Analítica; y un último alumno (José Andrés), una comprensión Extendida Técnica y Analítica. Ningún sujeto de este grupo manifestó comprensión Extendida a nivel Formal.

6. En 3º ESO dos alumnas (M^a Dolores y Jennifer) no dieron muestra de comprensión Extendida, otros tres estudiantes la revelaron a nivel Técnico y tan sólo uno (Carlos), evidenció una comprensión Extendida Formal. Ninguno de los entrevistados proporcionó indicios de comprensión Extendida Analítica.

7. En 1º de Bachillerato localizamos un alumno (Mariano) para el que no se ha apreciado comprensión Extendida alguna. Otros dos alumnos manifestaron una comprensión Extendida tan sólo a nivel Analítico (Guillermina) o Formal (Rubén), respectivamente. El resto dio muestras de comprensión Extendida Técnica además de Analítica (Inés y David) y de Formal (Tomás).

8. En 1º ASI dos alumnos (José y Cecilio) no presentaron indicios de comprensión Extendida. Otros dos (Antonio y Sergio) sólo revelaron Comprensión Extendida en la faceta Técnica. Los dos restantes mostraron evidencias de comprensión Extendida Técnica además de Analítica (David) y de Formal (Manolo).

-Acerca de los perfiles:

La asignación de los valores numéricos del 1 al 8 a las ocho primeras columnas de la tabla 8.3 (TB:1; TI:2; TC:3; AB:4; AI:5; AC:6; FI:7; FC:8) proporciona una puntuación relativa para cada alumno con la que es posible elaborar la siguiente ordenación de alumnos en función de sus perfiles de comprensión Fundamental, desde el menos al más evolucionado:

1.Karina (1ºESO) [1]	7.Cristina (1ºESO) [25]	13.Manuel (1ºESO) [157]	19.Guillermina (1ºBach) [258]
2.María (1ºESO) [14]	8.Clara (3ºESO) [25]	14.Carlos (3ºESO) [157]	20.Cecilio (1ºASI) [268]
3.Rosa (3ºESO) [14]	9.Raúl (3º ESO) [25]	15.Inés (1ºBach) [158]	21.Mª Dolores (3ºESO) [358]
4.Miguel (1ºESO) [15]	10.Jennifer (3ºESO) [25]	16.J. Andrés (1ºESO) [257]	22. Mariano (1ºBach) [367]
5.David (1ºBach) [15]	11.David (1ºASI) [36]	17.Rubén (1ºBach) [257]	23.José (1ºASI) [368]
6.Antonio (1ºASI) [24]	12.Sergio (1ºASI) [147]	18.Tomás (1ºBach) [258]	24.Manolo (1ºASI) [368]

Dicha disposición nos permite extraer los siguientes resultados y regularidades:

9. El perfil mínimo de comprensión Fundamental fue manifestado por Karina (1º ESO), pues tan sólo se apreció en ella una comprensión Fundamental Técnica Básica.

10. Por su parte, el perfil máximo de comprensión Fundamental [TC; AC; FC] tan sólo fue presentado por dos alumnos: José (1º ASI) y Manolo (1º ASI).

11. En el estudio se ha evidenciado un total de 15 perfiles distintos de comprensión Fundamental, 7 diferentes en la ESO y 10 diferentes en 1º Bach. y 1ºASI. Al mismo tiempo, se observa que algunos de los posibles perfiles han permanecido ocultos. Nos referimos, entre otros, a perfiles como [--; --; FC], [--; AB; FC] o [TB; AB; FC].

12. Se observan sujetos con un perfil de comprensión Fundamental más evolucionado respecto al de sus compañeros del mismo nivel educativo, como es el caso de José Andrés (1º ESO) o de Mª Dolores (3º ESO). Lo mismo sucede con los perfiles menos evolucionados, detectándose alumnos como David (1º Bach.) o Antonio (1º ASI) con un perfil de comprensión Fundamental desfavorable en relación con sus

compañeros de nivel. En este sentido, éstos se podrían considerar como perfiles anómalos.

13. Al considerar la puntuación global obtenida por nivel educativo, se pueden apreciar dos grandes grupos de perfiles de comprensión Fundamental, el correspondiente a 1º ESO y 3º ESO, por un lado y el de 1º Bach. y 1º ASI por otro, éstos últimos visiblemente más evolucionados.

14. Tomando en consideración los 15 perfiles de comprensión Fundamental, agrupados en intervalos de cinco, y organizando a los alumnos por el perfil obtenido desde el menos al más evolucionado, se puede observar una cierta regularidad en la evolución de la comprensión Fundamental manifestada por nivel educativo, tal como se muestra con la siguiente tabla:

Perfil	Porcentaje de alumnos		
	Bajo [1-5]	Medio [6-10]	Alto [11-15]
1º ESO	66'6%	33'3%	
3º ESO	66'6%	16'6%	16'6%
1º Bach	16'6%	33'3%	50%
1º ASI	16'6%	33'3%	50%

15. Finalmente, conviene mencionar que ningún alumno participante aportó suficientes evidencias sobre el máximo de comprensión previsto en la experiencia para el algoritmo. Manolo (1º ASI) fue el alumno que mostró una comprensión más evolucionada respecto a sus compañeros con un perfil extendido del tipo [TC; AC; FC || ET; EF].

8.7.1.2 Otros resultados y conclusiones

La descripción expuesta anteriormente de los resultados obtenidos sobre perfiles de comprensión del algoritmo, en apariencia heterogéneos, nos permite sin embargo apreciar algunas diferencias y regularidades de interés. Veamos las más importantes agrupadas en torno a los dos tipos de comprensión que hemos denominado Fundamental y Extendida.

Con respecto a la comprensión Fundamental:

I. Al igual que sucedió en el segundo estudio exploratorio, se vuelve a aportar evidencia acerca de que el reconocimiento, la destreza y la independencia a la disposición de factores constituyen tres aspectos distintos dentro de la esfera Técnica de comprensión del algoritmo. Asimismo, se vuelven a mostrar las facetas Técnica, Analítica y Formal como ámbitos de comprensión diferentes por los que se ven afectados los alumnos. Este hecho se pone en evidencia a través de los distintos estados de comprensión mostrados por un mismo alumno según la faceta examinada así como por los distintos perfiles de comprensión Fundamental manifestados entre los estudiantes.

Una situación similar también es apreciada en lo que respecta a la consideración de la comprensión Fundamental y Extendida, si bien los detalles contemplados se exponen más adelante.

Así pues, los ámbitos establecidos en la comprensión del algoritmo estándar escrito del producto han resultado ser aspectos distintivos que afectan y producen diferencias en los alumnos a nivel cognitivo. Al menos, la realidad estudiada nos aporta claros indicios a favor de esta conclusión.

Por tanto, dado que las facetas Técnica, Analítica y Formal, originadas en un plano exclusivamente epistemológico, se manifiestan también a nivel cognitivo como estados de comprensión Fundamental con entidad propia, podemos concluir que:

El criterio epistemológico empleado para la ordenación del conjunto situacional vinculado al algoritmo ha resultado acertado por cuanto nos ha permitido identificar claras diferencias cognitivas entre los sujetos interpretables en términos de comprensión.

II. La totalidad de los alumnos participantes en el estudio han mostrado una comprensión Fundamental Técnica del algoritmo, como mínimo Básica. Esto es así puesto que ninguno ha proporcionado una respuesta de tipo *4a* (ver tabla 8.2).

En lo que respecta a la esfera Analítica, todos los estudiantes entrevistados, excepto Karina de 1º ESO, han evidenciado algún estado de comprensión Fundamental, en su mayoría Incipiente.

Estos altos porcentajes contrastan, por el contrario, con el obtenido en el ámbito Formal. En concreto, tan sólo trece de los alumnos de la muestra manifestaron indicios de alguna comprensión Fundamental Formal, Incipiente o Consolidada.

Estos resultados ponen en evidencia, en primer lugar, que la comprensión del algoritmo estándar escrito del producto continúa manifestándose, aunque en distintas formas y grados, una vez superado el periodo básico de su enseñanza escolar correspondiente a la etapa de Educación Primaria.

En segundo lugar, se pone de manifiesto un claro desfase entre lo Formal y lo Técnico y Analítico. O en términos similares, se aprecia una diferencia cualitativa destacada entre la comprensión Fundamental Técnica y Analítica, de un lado, y la Formal, de otro. *Parece ser, por tanto, que en el algoritmo estándar escrito del producto el aspecto Formal impone unas mayores exigencias en cuanto a comprensión que los aspectos Técnico y Analítico.*

III. En otro orden de reflexión, centrando la atención en los estados de comprensión Técnica y Analítica, encontramos alumnos que muestran posibilidades tan dispares como [TB; --] en el caso de Karina (1º ESO), [TB; AB] en Rosa (3º ESO) o [TB; AI] en Manuel (1º ESO); y también [TI; AB] en Antonio (1º ASI), [TI; AI] en Rubén (1º Bach.) o [TI; AC] en Cecilio (1º ASI). Esta falta de homogeneidad observada entre los dos estados dificulta en principio la identificación de una posible relación entre ambas facetas de comprensión. De hecho, con los resultados empíricos obtenidos *no llegamos a precisar una frontera definida entre los ámbitos de comprensión Técnica y Analítica*, si bien esto no significa que debamos descartar la posibilidad de la existencia y determinación en futuros estudios de una relación concreta entre ambos estados de comprensión. De entrada, desde un posicionamiento meramente teórico podemos reconocer que una comprensión Fundamental Técnica, por lo menos Básica, habría de preceder a la de carácter Analítico (y Formal) en fases iniciales de desarrollo de la comprensión correspondientes a las primeras experiencias con el algoritmo.

IV. Profundizando un poco más, aunque la comprensión Fundamental Técnica sea previa a la Analítica (y Formal), ésta no ha de ser necesariamente Consolidada, tal como se muestra por ejemplo en Cecilio (1° ASI) con el perfil [TI; AC; FC] o en Manuel (1° ESO) con [TB; AI; FI]. Podemos concluir, por tanto, que la evidencia de una comprensión Técnica Consolidada no es condición necesaria para acceder a los ámbitos de comprensión Analítica y Formal, es decir, se puede dar algún tipo de comprensión Analítica y Formal del algoritmo de la multiplicación sin necesidad de que exista previamente una comprensión Técnica Consolidada sobre el mismo.

V. En los tres ámbitos de acción del algoritmo, Técnico, Analítico y Formal, se constata un número reducido de estudiantes (un 37'5% del total) que han demostrado una comprensión Fundamental Consolidada en al menos una de las facetas Técnica, Analítica y Formal. En concreto, del total de alumnos, tan sólo cinco manifiestan una comprensión Consolidada a nivel Técnico, otros cinco a nivel Analítico y siete a nivel Formal, constituyendo entre todos un grupo de 9 alumnos.

Asimismo, 9 de los 24 alumnos entrevistados aún revela una comprensión Técnica que no ha logrado superar el estado Básico.

De estos resultados se percibe una situación de comprensión Fundamental emergente y sustancialmente mejorable en la mayoría de los casos, incluso a nivel Técnico. Y desde un punto de vista didáctico y curricular, tal situación entre los sujetos entrevistados respecto al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales se podría entender como no deseable. Por lo menos, se pone en evidencia la posibilidad de una mejora sustancial en los perfiles de comprensión Fundamental obtenidos.

VI. Se aprecia un leve desarrollo de la comprensión Fundamental Consolidada en función del grado académico. Así, contemplando globalmente la tabla de perfiles, observamos que el número de muestras de comprensión Consolidada aumentó por nivel académico: ninguna en 1° ESO, dos en 3° ESO, cinco en 1° de Bachillerato y diez en 1° ASI. Este resultado, sin embargo, no podemos considerarlo como indicio suficiente para establecer una relación entre la comprensión del algoritmo y la edad y grado académico de los estudiantes, en el sentido de que la primera evolucione positivamente junto con lo segundo. De hecho, se observan alumnos que han manifestado perfiles de comprensión menos evolucionados que los de compañeros de menor edad y nivel académico. Compárese por ejemplo el perfil Fundamental [TI; AB; --] de Antonio (1° ASI) con el [TI; AI; FI] de José Andrés (1° ESO) o el perfil [TB; AI; --] de David (1° Bach.) con [TC; AI; FC] de M^a Dolores (3° ESO). En estos casos especiales podemos hablar de un fenómeno de involución en la comprensión, lo que, a pesar de producirse en un porcentaje reducido de individuos, impide afirmar con seguridad que se da una relación directa entre comprensión, edad y nivel académico. Al menos, son necesarios nuevos estudios para profundizar en las relaciones mencionadas.

A pesar de todo, por los indicios favorables observados, quizá pueda considerarse provisionalmente la posibilidad de que exista tal relación a nivel de comprensión Consolidada, aunque ésta es una cuestión que queda pendiente para futuros estudios preocupados por la identificación de regularidades de este tipo mediante el empleo de muestras representativas de poblaciones más amplias.

En esta ocasión, somos partidarios de interpretar los resultados anteriores, en apariencia contradictorios por cuanto no queda clara la relación mencionada, con el

supuesto teórico admitido en el capítulo V de que la *experiencia*⁴ del sujeto con el objeto de comprensión, en este caso matemático, se erige como el factor más determinante de su comprensión. Así, mantenemos que la naturaleza y número de experiencias previas que los alumnos participantes han tenido con el algoritmo estándar escrito del producto, aunque desconocidas por el investigador, sustentan y justifican el desempeño mostrado en la prueba. Al menos, en el estudio no hemos obtenido muestras contrarias de ello.

Con respecto a la comprensión Extendida:

Al igual que sucede en la esfera de lo Fundamental, se pueden apreciar los siguientes hechos destacados al analizar los resultados:

VII. Se aprecia la existencia de perfiles de comprensión Fundamental equivalente y que, sin embargo, manifiestan diferencias considerables en lo que a comprensión Extendida se refiere. Tal es el caso, por ejemplo, de Tomás (1º Bach.) y Guillermina (1º Bach.). Como se desprende de la tabla 8.3, ambos estudiantes evidenciaron un mismo perfil de comprensión Fundamental [TI; AI; FC] y, sin embargo, el primero reveló una comprensión Extendida Técnica y Formal mientras que la segunda tan sólo Analítica.

Observamos asimismo la existencia de sujetos cuyos perfiles de comprensión Fundamental son más evolucionados que otros y que, sin embargo, presentan una relación justamente opuesta entre ellos en lo que a comprensión Extendida se refiere. Por ejemplo, José (1º ASI) manifiesta, por una parte, un perfil de comprensión Fundamental [TC; AC; FC], interpretable como de mayor nivel o más evolucionado que el perfil [TB; AI; --] correspondiente a David (1º Bach.). Sin embargo, José no proporciona indicio alguno de comprensión Extendida, a diferencia de David que evidencia una comprensión Extendida Técnica y Analítica. La relación en este caso es justamente la opuesta que la que se da en el caso de los perfiles de comprensión Fundamental.

Por tanto, a través de los dos hechos anteriores se pone de manifiesto que la esfera de lo Fundamental no resulta suficiente para describir la situación de comprensión concreta en la que se encuentran los sujetos respecto al algoritmo. Realmente existe un ámbito de comprensión, al que hemos identificado como comprensión Extendida, que difiere del de la comprensión Fundamental. De esto extraemos una consecuencia metodológica clara:

El criterio fenomenológico empleado para la ordenación del conjunto situacional vinculado al algoritmo también ha resultado adecuado, o cuanto menos favorable, al permitirnos establecer diferencias cognitivas entre los sujetos interpretables en términos de comprensión.

VIII. En el plano Analítico observamos cómo los estudiantes que han manifestado una comprensión Extendida Analítica, mostraron una comprensión Fundamental del mismo tipo al menos Incipiente. De igual forma, los cuatro alumnos con comprensión Extendida Formal revelaron una comprensión Fundamental Formal al menos Incipiente.

Estas dos observaciones aportan indicios en favor de la siguiente conclusión parcial: para mostrar una comprensión Extendida Analítica o Formal no es necesario

⁴ Considerada en toda su extensión, tal como se describe en el apartado 5.2.3.

evidenciar una comprensión Fundamental Consolidada Analítica o Formal, respectivamente. Tal como parece ser, una comprensión Fundamental Analítica (respectivamente, Formal) Incipiente puede resultar suficiente para abordar con éxito algunas situaciones No-Exclusivas de empleo Analítico (respectivamente, Formal) del algoritmo estándar escrito del producto.

Ahora bien, al no encontrar ejemplos que muestren lo contrario, podemos ir más allá afirmando de manera provisional que en las facetas Analítica y Formal se requiere un mínimo de comprensión Fundamental Incipiente para manifestar una comprensión Extendida al mismo nivel, Analítico o Formal.

IX. Algo similar a lo anterior sucede con la faceta Técnica. De la totalidad de alumnos, que sabemos que han manifestado una comprensión Fundamental Técnica al menos Básica, 15 han proporcionado muestras de una comprensión Extendida a nivel Técnico. Es posible afirmar entonces que una comprensión Fundamental Técnica Básica fue la mínima exhibida en aquellos estudiantes con comprensión Extendida Técnica.

De este resultado podemos concluir, en consecuencia, que no resulta imprescindible ni tan siquiera una comprensión Fundamental Incipiente para dar muestras de comprensión Extendida. Aún más, provisionalmente podríamos admitir también que la exigencia de comprensión Fundamental, aunque menor que en las otras facetas, se sitúa en este caso al menos en un estado Básico.

X. En realidad, los resultados obtenidos evidencian que la situación de comprensión Fundamental mostrada por los sujetos resulta considerablemente mejor que la de comprensión Extendida. Esta conclusión se deriva de los siguientes hechos:

(a) En primer lugar, tal como hemos destacado con anterioridad, todos los estudiantes que manifestaron una comprensión Extendida Técnica, Analítica o Formal revelaron una comprensión Fundamental Técnica, Analítica o Formal, respectivamente.

(b) Se observa que alumnos con un estado de comprensión Fundamental Consolidada a nivel Técnico, Analítico o Formal, no llegaron a dar muestras de comprensión Extendida al mismo nivel. Tal es el caso de M^a Dolores (3^o ESO) en el ámbito Técnico, Mariano (1^o Bach.) en el Analítico o Cecilio (1^o ASI) en el Formal.

Por tanto, identificamos una clara relación entre los ámbitos de comprensión Fundamental y Extendida, que viene caracterizada en los términos expuestos en los puntos anteriores.

XI. En el ámbito de comprensión Extendida, se observan indicios de una relación entre las facetas Técnica, Analítica y Formal que difiere de la reflejada en la comprensión Fundamental. En concreto, entendemos que ahora se manifiesta un mayor grado de independencia entre ellas. Compárese, por ejemplo, la comprensión Extendida [EA] revelada por Cristina (1^o ESO), [EF] por Carlos (3^o ESO), [ET; EF] por Tomás (1^o Bach.) y [ET] por Sergio (1^o ASI). Este hecho resulta justificable reconociendo que en el ámbito Extendido el uso del algoritmo en una situación particular no depende exclusivamente de su naturaleza Técnica, Analítica o Formal sino también de la circunstancia de ser No-Exclusiva, lo que supone un añadido respecto al ámbito Fundamental.

Así pues, la elección de un conocimiento matemático para su uso en la resolución de una situación No-Exclusiva, que puede verse como un escenario de conocimientos en competencia, es el condicionante que hace que la relación entre las facetas Técnica, Analítica y Formal sea distinta en los ámbitos de comprensión Fundamental y

Extendida. Este escenario se localiza en aquellos alumnos que reconociendo el uso del algoritmo confiesen haber preferido utilizar otro distinto; también, en los estudiantes que emplearon diversos conocimientos matemáticos sin llegar a reconocer el algoritmo como medio de resolución (figura 8.1).

A. [Situación 1]
Clara (3º ESO).- *Pues contando 16 más 16 más 16. También podía haberlo hecho 16 por todos los números que hay aquí. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete: 16 por 7 también, ¿no?*
I.- *Lo podías haber hecho así.*
Cl.- *Sí, yo creo que sí. 16 por... 7 por 6 son... 42, no, sí. ¿7 por 6 son 42? ¡No me acuerdo! [Se ríe]*
I.- *Y lo has hecho sumando.*
Cl.- *Claro.*
I.- *Y decías que lo podías haber hecho...*
Cl.- *De la otra manera pero no.*
I.- *¿Pero?*
Cl.- *No, no se puede. Bueno sí, pero que es mucho lío. Yo prefiero hacerlo sumando.*

B. [Situación 2]
Manuel (1º ESO).- *Dividirlo por algún número para que multiplicados por estos dos salga eso. No sé. [Tras 25'' en silencio]. No sé.*
I.- *No se te ocurre nada. Bueno, estabas ahí dividiendo pero ¿no se te ocurre hacerlo de otro modo? [Oros 20'' de silencio] ¿Qué piensas? A ver, ¿qué estabas pensando?*
Man.- *No, así no. [Instantes de silencio]. Se podía hacer la raíz cuadrada.*
I.- *La raíz cuadrada.*
Man.- *Sí. No sé, es que no sé. [Menciona dos conocimientos matemáticos que no son el algoritmo estándar escrito para el producto de números naturales].*

Figura 8.1.- Ejemplos que apoyan la idea de conocimientos en competencia.

Otras conclusiones:

Del análisis de algunos de los perfiles de comprensión identificados extraemos las siguientes conclusiones parciales de interés para la investigación:

XII. El perfil [TC; AC; --] de David (1º ASI) nos prueba que *es posible poseer una comprensión Fundamental Técnica y Analítica Consolidada y sin embargo no dar muestras de comprensión Fundamental Formal*. En parte, esta conclusión viene a respaldar la mayor exigencia de comprensión impuesta por el aspecto Formal en relación a lo Técnico y Analítico.

XIII. Como dejamos entrever en VII, la consideración de la comprensión Extendida conjuntamente con la Fundamental nos permite incidir aún más en las diferencias entre la comprensión de los alumnos. Así, el perfil [TB; AI; --] obtenido por Miguel (1º ESO) y David (1º Bach.), hace que sean susceptibles de ser valorados como de comprensión Fundamental equivalente. No obstante, Miguel (1º ESO) presentaría una comprensión ligeramente menos evolucionada que la de David, por el simple hecho de haber mostrado tan sólo una comprensión Extendida a nivel Técnico por una Técnica y Analítica de su compañero. Por tanto, la faceta de comprensión Extendida nos permite establecer diferencias entre sujetos de comprensión Fundamental equivalente, posibilitando un nivel de análisis para la comprensión más profundo.

Ahora bien, debemos señalar que la estructura empleada para la identificación de perfiles de comprensión y la determinación de diferencias posee la limitación que se desprende de los resultados obtenidos por María (1° ESO) y Rosa (3° ESO), equivalentes incluso en el ámbito de comprensión Extendida por haber mostrado un mismo perfil [TB; AB; -- || ET]. Esto es, a pesar de que el ámbito de comprensión Extendida completa al Fundamental, si el estudio de la comprensión se desarrolla a un nivel de análisis más profundo que el adoptado en la presente investigación, queda abierta la posibilidad de la existencia de nuevas diferencias entre sujetos con perfiles de comprensión Extendida equivalentes.

XIV. Definitivamente, las esferas Analítica y Formal vinculadas al algoritmo constituyen dos ámbitos de comprensión en desarrollo para los que no hemos sido capaces de intuir una relación precisa, ni tan siquiera en el ámbito Fundamental. Al menos, como hemos mencionado en II, se reconoce la posibilidad de evidenciar una comprensión de corte Analítico sin mostrar comprensión Formal alguna. Pero por otra parte, el análisis conjunto de las facetas Analítica y Formal en perfiles de comprensión como los mostrados por David (1° ASI), [TC; AC; -- || ET; EA], y por Tomás (1° Bachillerato), [TI; AI; FC || ET; EF], nos sugiere que quizá ambas facetas de comprensión deban considerarse independientes en su origen y evolución. En principio, tal supuesto vendría respaldado por los términos con los que hemos caracterizado a ambas facetas, aunque hemos de reconocer que son necesarios más datos, en términos de perfiles de comprensión, para poder concluir que ambas facetas son independientes. Se trata, por tanto, de una cuestión que queda pendiente para posteriores estudios.

XV. El perfil [TB; --; -- || ET] mostrado por Karina (1° ESO) evidencia el hecho de que resulta posible expresar una comprensión Fundamental Técnica, incluso Extendida, y no dar muestras de carácter Analítico ni Formal. Esta conclusión empírica apoya el argumento teórico expuesto en III acerca de que la comprensión Fundamental Técnica precede a la Analítica y a la Formal.

XVI. El estudio realizado también pone de manifiesto que de todos los perfiles de comprensión teóricamente posibles existen algunos que por su naturaleza resultan en la práctica imposibles o altamente improbables. Tal es el caso de perfiles como [--;--;-- || ET; EA; EF], además de los mencionados en los puntos 12 y 13 del apartado 8.7.1.1. Las cuestiones en torno a la posibilidad de los diferentes perfiles de comprensión quedan pendientes para posteriores estudios.

8.7.2 Comprensión del conocimiento matemático

A continuación se exponen aquellas consecuencias sobre las características generales de la comprensión del conocimiento matemático que se pueden extraer del estudio particular realizado sobre la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Se han constatado las siguientes consecuencias generales:

1. El hecho de que se muestren las facetas Técnica, Analítica y Formal como ámbitos de comprensión diferentes respecto al algoritmo, todos con entidad propia, refleja, por un lado, el nivel de precisión con el que hemos llevado a cabo el diagnóstico y la evaluación de la comprensión en el caso particular del algoritmo estándar escrito del

producto, y por otro, la complejidad y el *carácter multifacético subyacente al fenómeno de la comprensión* considerado éste desde una perspectiva genérica.

2. En el mismo orden de reflexión, se constata que las facetas Técnica, Analítica y Formal así como los ámbitos Fundamental y Extendido, tratan aspectos concretos de la comprensión del algoritmo que le son propios y exclusivos, en el sentido de que cada una de estas facetas destaca unos matices del algoritmo a la vez que oculta otros. Por tanto, *incluso bajo un mismo sistema de representación como el simbólico*, donde nos hemos situado en el caso del algoritmo estándar escrito de la multiplicación, *se puede llegar a una situación de parcialidad en el estudio de la comprensión si no se tienen en cuenta todas las facetas intervinientes*. Este hecho se podría considerar una extensión de la sugerencia realizada por Castro y Castro (1997) de emplear diferentes sistemas de representación en el estudio de la comprensión al no existir un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que encierra cada conocimiento matemático.

3. El carácter transversal del estudio empírico realizado impide cualquier conjetura acerca de la evolución de la comprensión a lo largo del tiempo. Esta circunstancia, sin embargo, no elimina la posibilidad de establecer otras conclusiones en torno a aspectos dinámicos, como es el caso del desarrollo de la comprensión. En concreto, de un análisis global de la experiencia desarrollada, *percibimos el dinamismo en la comprensión a través de: (a) la variedad de perfiles de comprensión mostrados por los alumnos, (b) la posibilidad de mejora en la mayoría de ellos y (c) el tipo de involución ya mencionado*⁵.

Pero además, el carácter dinámico se manifiesta localmente a través de las contradicciones específicas identificadas en las respuestas de los alumnos. En el caso del algoritmo, estos desajustes son más visibles en un estado de comprensión Incipiente aunque también podrían darse, en menor medida, en un estado Consolidado. En cualquier caso, podríamos interpretarlos a modo de ‘feedback’ o movimientos puntuales que acontecen en el contexto de una comprensión que bien pudiera valorarse como estable contemplada desde una perspectiva más amplia. La figura 8.2 recoge un ejemplo de ello. Tras claros indicios de empleo Técnico y Analítico en ambas MCCD, Raúl (3º ESO) concluye procediendo de un modo notablemente incorrecto al aplicar el algoritmo de forma Técnica en el segundo resultado parcial de la última MCCD.

Comportamientos de este tipo concuerdan con lo observado por autores como Koyama (1997, 2000) o Pirie y Kieren (1994), entre otros, en relación con el desarrollo de la comprensión, de modo que estos resultados podemos considerarlos un aporte más en favor de la comprensión del conocimiento matemático como fenómeno que evoluciona a distintos niveles. Sin embargo, el comportamiento de esta evolución necesita ser analizado con profundidad en estudios dedicados expresamente a ello.

⁵ Punto VI del apartado 8.7.1.2.

K. Completa:

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \times 45 \\ \hline \square 30 \\ \square 44 \\ \hline \square 870 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \times \square 7 \\ \hline \square \square 5 \\ \square 0 \\ \hline \square 45 \end{array}$$

Raúl (3º ESO).- *Este resultado puede ser el que tú quieras porque puedes poner el número que quieras ahí. Como no te pone nada, ninguno.* [En referencia a las decenas del multiplicador en la segunda MCCD].

I.- *¿Dónde?*

Ra.- *Éste.*

I.- *El 1 ese.*

Ra.- *Te puedo poner.... Si lo multiplicas por el que sea, el 2 por 5, 10, el 4 por 5, 20, yo qué sé.*

I.- *Y has puesto el 2.*

Ra.- *Sí, he multiplicado 2 por 5, 10; entonces, ya era 1 y 2 más 1, 3.* [Se equivoca al completar el hueco correspondiente al 2º resultado parcial].

Figura 8.2.- Situación de 'feedback' en la comprensión del algoritmo.

4. La importancia de la *memoria* para la comprensión, reconocida por diversos autores (Anthony y Knight, 1999), se pone especialmente de manifiesto en la práctica en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En efecto, el empleo del algoritmo, sobre todo en su faceta Técnica, requiere recorrer con seguridad cada uno de los pasos del procedimiento, en particular los que necesitan de los hechos numéricos básicos, siendo en este punto donde cobra todo su sentido el almacenamiento en memoria y la posterior recuperación automática de las tablas de multiplicar, dado que el recuerdo automático de esta información permite dinamizar todo el proceso.

Tal como se ha podido observar con algún alumno (ejemplo A de la figura 8.1), la memoria cobra protagonismo en la recuperación efectiva de las tablas de multiplicar, llegando a ser un claro condicionante para el uso del algoritmo en sus distintos ámbitos.

5. En otro orden de reflexión, somos partidarios de que la comprensión del conocimiento necesita de *práctica* para su desarrollo. Ahora bien, esta práctica no debe reducirse exclusivamente al ejercicio de su empleo reiterado de forma mecánica en situaciones del mismo tipo. Tal como ponemos en evidencia con el estudio realizado sobre el algoritmo estándar escrito del producto, resulta acertado ampliar el significado para la noción de práctica y mencionar con ella toda acción posible sobre las distintas tareas de las categorías situacionales vinculadas al conocimiento matemático en estudio. En el caso concreto del algoritmo analizado, el desarrollo de su comprensión en los sujetos exigirá una práctica con todos los tipos de tareas asociados, no sólo con situaciones de categoría Técnica sino también de categoría Analítica y Formal, tanto en el ámbito Fundamental como en el Extendido.

Hemos de mencionar, no obstante, que las prácticas no deben tomar como referencia lo institucional para su diseño y desarrollo. Esto es, no deben ser la escuela ni el sistema educativo ni la sociedad quienes dicten arbitrariamente el ámbito idóneo para las prácticas sin haber tenido en cuenta previamente las características impuestas por el propio conocimiento matemático en estudio. En este punto, nuestra posición difiere de la expuesta en trabajos como los de Díaz-Godino y Batanero (1994) y Díaz-Godino

(2000), si bien el significado que otorgamos a la idea de práctica está más próximo al de ellos que al sentido clásico mencionado por autores como Anthony y Knight (1999).

6. Respecto a la relación existente entre comprensión y destreza, la experiencia realizada nos ha permitido contemplar la destreza como un aspecto más de la faceta Técnica de comprensión vinculada al algoritmo estándar escrito de la multiplicación. Por lo tanto, más que considerar la comprensión y la destreza como ámbitos cognitivos contrapuestos, entendemos que resulta más apropiado concebir la segunda como uno de los requisitos necesarios para la consecución de la primera.

Asimismo, en respuesta a la cuestión de si la comprensión de un procedimiento matemático garantiza o no una aplicación libre de errores, hemos de mencionar que uno de los aspectos evidenciados con el estudio realizado es que el reconocimiento de los pasos de un procedimiento matemático como el algoritmo estándar escrito para la multiplicación no garantiza el éxito en su aplicación técnica (en el sentido clásico de la expresión). Es más, se puede ser consciente del método e incluso manifestar una comprensión a nivel Analítico y Formal y errar al emplearlo de un modo Técnico. Entendemos que este resultado está en consonancia con los trabajos de Nesher (1986) y Byrnes y Wasik (1991), entre otros.

7. La faceta Analítica de comprensión identificada en el algoritmo estándar escrito del producto, suficientemente contrastada a nivel teórico y empírico, nos permite abrir un espacio de reflexión en torno al grado de precisión con el que los modelos dicotómicos tradicionales (Hiebert y Lefevre, 1986; Byrnes y Wasik, 1991) afrontan el estudio de la comprensión del conocimiento matemático. Estos modelos, donde es habitual establecer una distinción básica entre conocimiento procedimental y conceptual, resultan adecuados como referencia teórica inicial. De hecho, ambos ámbitos también se reflejan en el estudio realizado. Ahora bien, con el apoyo de los resultados empíricos obtenidos, podemos afirmar que esta referencia resulta insuficiente para llevar a cabo estudios interesados en analizar con cierto detalle las particularidades existentes en la comprensión de cada conocimiento matemático.

8.8 Logros del estudio empírico

En primer lugar, consideramos que los logros obtenidos en este capítulo respaldan la hipótesis II, enunciada en el apartado 1.5.2 en los siguientes términos:

II. Resulta posible obtener información precisa relativa a distintos aspectos vinculados con la comprensión de conocimientos matemáticos específicos, incluso de naturaleza interna, mediante la elaboración de aproximaciones de carácter teórico-metodológico centradas en el estudio de lo observable.

Así, a través de esta segunda experiencia empírica hemos evidenciado la posibilidad de extraer conclusiones, como las recogidas en el apartado 8.7.2, relativas a la comprensión de un conocimiento matemático particular como es el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Estas conclusiones son precisamente el resultado de la etapa final de aplicación, iniciada en el capítulo VI, de la Aproximación desarrollada en el capítulo V. Por tanto, en realidad la consideración conjunta de los logros y hallazgos alcanzados en los estudios teórico y empírico

realizados durante la investigación proporciona indicios razonables sobre la bondad de esta hipótesis.

Asimismo, los resultados obtenidos avalan la bondad de la hipótesis **IV**, la cual afirma que:

en el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales se identifican distintas facetas de comprensión, de origen epistemológico y también fenomenológico, que permiten la descripción de diferentes estados y perfiles de comprensión en los sujetos.

Precisamente, los estados y perfiles de comprensión identificados en los alumnos de la muestra vienen descritos, tal como se expone en el apartado 8.7.1 y recoge la tabla 8.3, en términos de tres facetas epistemológicas, Técnica, Analítica y Formal, y dos ámbitos fenomenológicos, Fundamental y Extendido, por lo que desde este capítulo se están aportando suficientes evidencias empíricas en favor de esta hipótesis.

En cuanto a los objetivos de la investigación, enumerados en la sección 1.5.1 del capítulo I, se han cubierto, en distinto grado y como consecuencia de este estudio empírico, los siguientes:

En primer lugar, se contribuye al logro del objetivo específico metodológico [OM₁] de *mostrar la operatividad y viabilidad práctica de la Aproximación propuesta para el estudio de la comprensión del conocimiento matemático aplicándola en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.*

Tal como muestran los resultados obtenidos, ha sido posible identificar en un grupo reducido de alumnos unos estados y perfiles de comprensión sobre el algoritmo que son el resultado cognitivo de un proceso de valoración originado en el estudio de la epistemológica y fenomenología de este conocimiento matemático y en el que se ha afrontado el problema abierto de la determinación y organización del conjunto situacional asociado.

Por tanto, dado que las consideraciones epistemológicas y fenomenológicas se han visto reflejadas también en el plano cognitivo podemos afirmar que la operatividad de la Aproximación propuesta para la valoración de la comprensión queda suficientemente garantizada al menos en el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Al mismo tiempo, puesto que los estados de comprensión vienen caracterizados en términos de acciones visibles realizadas con competencia y de forma intencionada por los alumnos, observamos cómo se preserva el sentido positivo en la valoración de la comprensión. En este sentido, la operatividad de la Aproximación se muestra también al permitir la identificación de perfiles de comprensión positiva.

En segundo lugar, se completa el objetivo empírico [OE] de *identificar, describir y caracterizar posibles estados y perfiles de comprensión tipo en los sujetos en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales y obtener a partir de ellos información específica sobre características y aspectos particulares de la comprensión de este conocimiento matemático.* El contenido expuesto en los apartados 8.7.1.1 y 8.7.1.2 nos muestra la existencia en los sujetos de distintas situaciones cognitivas multifacéticas cuyo estudio de relaciones permite

profundizar en diferentes aspectos de la comprensión del algoritmo. Toda esta información consideramos que contribuye a la consecución del objetivo.

Respecto a los objetivos complementarios, creemos que el objetivo (c) de *mostrar la pertinencia y eficacia de los estudios sobre comprensión sustentados en marcos teóricos integradores y operativos y centrados en conocimientos matemáticos específicos para la obtención de información acerca del fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático considerado en términos genéricos*, se alcanza con suficiencia al término de la fase empírica de la investigación. Esto es así puesto que se llega a realizar, tal como muestra el apartado 8.7.2, una primera contribución sobre aspectos referentes a la comprensión del conocimiento matemático en general desde la Aproximación elaborada y a partir de los resultados y conclusiones extraídos sobre la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

Conviene mencionar en este punto que las aportaciones hechas dependen de los resultados alcanzados sobre la comprensión del algoritmo, de modo que con el estudio de distintos conocimientos matemáticos concretos se podría ir contrastando y ampliando sucesivamente la información previa obtenida sobre la comprensión del conocimiento matemático en general.

CAPÍTULO IX

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

9.1 Introducción

La investigación objeto del presente informe se ha centrado en determinados aspectos de la comprensión del conocimiento matemático y su diagnóstico en el ámbito de interés del área de conocimientos de Didáctica de la Matemática. En particular, se ha ocupado de la justificación y desarrollo de una aproximación al diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático y a su aplicación al caso específico del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En líneas generales, se trata de una propuesta con intención integradora y operativa en la que adquieren relevancia, entre otros elementos, los análisis epistemológicos y fenomenológicos del conocimiento matemático, el estudio del conjunto de situaciones-problema derivado de dichos análisis, el uso observable del conocimiento por parte del individuo, la elaboración de instrumentos adecuados de observación de la comprensión y la determinación de estados y perfiles de comprensión en los sujetos, tomando siempre como referencia fundamental el propio conocimiento matemático.

En este capítulo se exponen, de forma resumida y para concluir el informe, los aspectos clave de la investigación realizada de acuerdo con los siguientes puntos:

- una síntesis de los elementos fundamentales de la investigación, a saber: el objetivo general y los objetivos específicos, las hipótesis de investigación, la metodología empleada y las etapas clave en el desarrollo del trabajo;
- una descripción de las conclusiones más relevantes obtenidas a lo largo de las diferentes fases de la investigación;
- una revisión de los logros y hallazgos alcanzados en relación con las hipótesis y objetivos de investigación. En concreto, se analiza el grado de verificación de las distintas hipótesis planteadas y su incidencia en la consecución de los objetivos previstos;
- una muestra de las consecuencias de la investigación en diversos ámbitos de la Educación Matemática;
- una relación de las principales vías para la continuación del estudio en futuras investigaciones en base a las cuestiones abiertas surgidas durante el transcurso del mismo.

9.2 El problema de investigación

Los elementos fundamentales que delimitan el problema abordado y que se exponen a continuación de forma resumida son: los objetivos, las hipótesis, la metodología y el proceso seguido. Veamos un resumen de cada uno de ellos.

(A) Objetivos

El objetivo general de la investigación (apartado 1.5.1.1, capítulo I) consiste en *sustentar las bases teóricas y metodológicas de una aproximación **integradora** y **operativa** al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático fundada en el diagnóstico y la evaluación de los comportamientos observables en los sujetos.*

El propósito central mencionado se articula en los siguientes objetivos específicos teóricos, metodológicos y empíricos (apdo. 1.5.1.2, cap. I):

[OT₁] Revisar y analizar el campo de conocimientos actual en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, poniendo de manifiesto los principales intereses, problemas y limitaciones existentes.

[OT₂] Desarrollar una base teórica inicial, sólida pero a la vez abierta, con la que organizar, integrar y ampliar con interpretaciones plausibles teorías y planteamientos sobre comprensión identificados en investigaciones previas en Educación Matemática.

[OT₃] Elaborar un marco de acción metodológica con el que afrontar el problema del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático desde lo observable.

[OM₁] Mostrar la operatividad y viabilidad práctica de la Aproximación propuesta para el estudio de la comprensión del conocimiento matemático aplicándola en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

[OM₂] Delimitar y organizar el conjunto situacional asociado al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales en base a criterios y categorías organizativas de orden epistemológico y fenomenológico.

[OE] Identificar, describir y caracterizar posibles estados y perfiles de comprensión tipo en los sujetos asociados al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales y obtener a partir de ellos información específica sobre características y aspectos particulares de la comprensión de este conocimiento matemático.

A su vez, los objetivos específicos se completan con los siguientes objetivos complementarios (apdo. 1.5.1.3, cap. I):

(a) Poner de manifiesto la capacidad y adecuación de los desarrollos teóricos sólidos para sustentar investigaciones en Didáctica de la Matemática y aportar argumentos en favor de su elaboración y uso por parte de los investigadores en dicho campo.

(b) Mostrar la potencialidad didáctica y para la investigación de los análisis epistemológico y fenomenológico como procedimientos para la identificación y ordenación de situaciones vinculadas a los conocimientos matemáticos concretos.

(c) Mostrar la pertinencia y eficacia de los estudios sobre comprensión sustentados en marcos teóricos integradores y operativos y centrados en conocimientos matemáticos específicos para la obtención de información acerca del fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático considerado en términos genéricos.

(B) Hipótesis

Para la consecución de los objetivos especificados se han contrastado las siguientes hipótesis de investigación (apdo. 1.5.2 cap. I):

I. El estado actual de conocimientos en Educación Matemática en torno al fenómeno de la comprensión justifica la necesidad y admite la posibilidad de realizar esfuerzos teóricos, encaminados a interpretar, integrar y ampliar la información existente, y prácticos, centrados en el diseño y aplicación de propuestas operativas para el estudio de este fenómeno.

II. Resulta posible abordar los problemas relativos a los distintos aspectos vinculados con la comprensión de conocimientos matemáticos específicos, incluso los de naturaleza interna, mediante la elaboración y aplicación de aproximaciones de carácter teórico-metodológico centradas en el estudio de lo observable.

III. Los análisis epistemológicos y fenomenológicos asociados a un conocimiento matemático proporcionan criterios objetivos para la organización de su conjunto situacional y para la selección de tareas y situaciones con las que valorar la comprensión que manifiestan los sujetos.

IV. En el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales se identifican distintas facetas de comprensión, de origen epistemológico y también fenomenológico, que permiten la descripción de diferentes estados y perfiles de comprensión en los sujetos.

(C) Metodología

Para la contrastación de las hipótesis se ha empleado una metodología mixta (apdo. 1.5.4 cap. I). En concreto:

- En la fase teórica de la investigación se ha empleado el *Análisis Didáctico* para la selección y el tratamiento de antecedentes.

- En la fase empírica de la investigación se han utilizado métodos descriptivos, cuantitativos y cualitativos, transversales y sobre muestras de población reducidas e intencionales. En particular:

(i) en el primer estudio exploratorio se ha aplicado la metodología cuantitativa y los conceptos y técnicas propios de la estadística descriptiva. En dicho estudio se ha diseñado un cuestionario escrito y se ha realizado posteriormente el análisis de los datos obtenidos;

(ii) el segundo estudio exploratorio y el segundo y definitivo estudio empírico han sido de carácter cualitativo y en ellos se ha utilizado la entrevista semiestructurada individual sobre cuestionario escrito como instrumento para la recogida de datos.

(D) Proceso

La investigación se ha desarrollado según el esquema de la figura 9.1, en el que se muestran los estudios realizados en cada etapa del trabajo, las relaciones entre ellos, los principales resultados obtenidos, las cuestiones pendientes para las siguientes fases y las hipótesis contrastadas en cada caso.

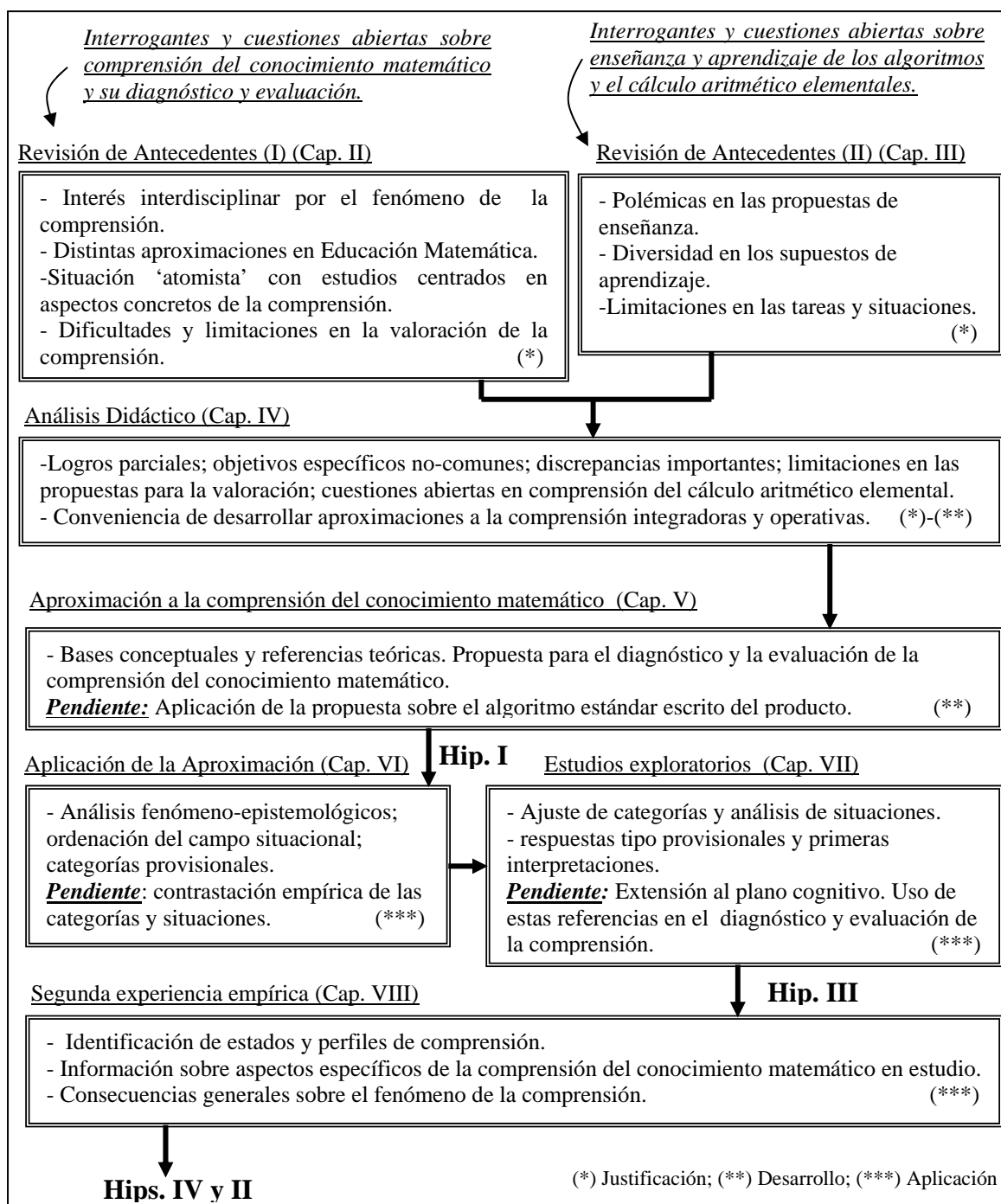


Figura 9.1.- Esquema-resumen del proceso seguido en la investigación.

El desarrollo esquematizado anteriormente se puede resumir en los siguientes términos:

(a) En base a los primeros interrogantes y cuestiones abiertas identificados en relación con el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático y, en menor medida, con la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales, se procede a realizar una revisión y análisis didáctico conjunto de los conocimientos existentes sobre ambas áreas problemáticas.

(b) Las conclusiones obtenidas del análisis didáctico justifican la conveniencia de desarrollar una Aproximación integradora y operativa a la comprensión del conocimiento matemático. En ella se establecen bases teóricas y metodológicas con las

que afrontar el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático en términos de capacidad de respuesta adaptada medida a partir de los análisis epistemológicos y fenomenológicos del conocimiento matemático y del análisis e interpretación de los comportamientos observables de los sujetos.

(c) El marco sugerido para el estudio de la comprensión exige una primera confrontación práctica a fin de contrastar su potencialidad. En tal sentido, se lleva a cabo la aplicación de la propuesta para el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Ésta se inicia con un estudio fenómeno-epistemológico del campo situacional asociado al conocimiento y se continúa con dos estudios empíricos exploratorios dirigidos a perfilar las categorías y situaciones obtenidas a nivel teórico e identificar unas primeras respuestas-tipo referenciales, todas ellas necesarias para abordar la labor de diagnóstico y valoración de la comprensión en los sujetos.

(d) Con los precedentes anteriores se desarrolla una segunda experiencia empírica en la que se describe la situación de la comprensión del algoritmo de multiplicar en una muestra reducida de alumnos. A partir de esta información se profundiza en las características de la comprensión del algoritmo, en particular, y del conocimiento matemático, en general.

9.3 Resultados y conclusiones

En lo que sigue se exponen los resultados y las conclusiones más relevantes de cada una de las etapas por las que ha transcurrido la investigación. La exposición está organizada en apartados en los que se incluyen los resultados y las conclusiones correspondientes precedidas de unas siglas alfanuméricas que facilitan su identificación.

9.3.1 Antecedentes

Entre las conclusiones fundamentales del estudio primario presentado en los capítulos II y III destacamos las siguientes:

A1¹. Diversas áreas de conocimiento, entre ellas la Didáctica de la Matemática, muestran un gran interés por el estudio del fenómeno de la comprensión, llegándose a identificar una preocupación especial por aclarar aspectos como su naturaleza y funcionamiento o su relación con la explicación e interpretación, entre otros.

A2.- En Educación Matemática se encuentran propuestas consolidadas para el estudio de la comprensión como la posición representacionista de Hiebert y Carpenter (1992), la aproximación histórico-empírica de Sierpinska (1990, 1994) o el modelo recursivo de Pirie y Kieren (1989, 1994). Todas ellas, junto con otros trabajos puntuales y de menor envergadura, como la teoría del significado presentada por Díaz-Godino y Batanero (1994) y Díaz-Godino (2000) o los trabajos desarrollados con fines cognitivos (p.e., Duffin y Simpson, 1997) o curriculares (p.e., Hiebert et al., 1997), proporcionan la base de información disponible en la actualidad sobre la comprensión del conocimiento matemático.

¹ La sigla A se refiere a los resultados y conclusiones obtenidas del análisis primario de los Antecedentes.

A3.- Numerosas investigaciones adoptan para el estudio de la comprensión los supuestos del representacionalismo clásico. En ellos, la comprensión es interpretada en términos de representaciones internas y de relaciones entre ellas en la mente del sujeto. Asimismo, se suele reconocer un vínculo especular entre las representaciones internas y externas.

A4.- En los trabajos revisados se muestra evidente el interés por el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. Aunque existen diferencias importantes entre los enfoques, la mayoría giran en torno a los modos y términos en los que valorar la comprensión; los métodos, técnicas e instrumentos a emplear; la relatividad de la valoración, el problema de la interpretación y, en definitiva, la complejidad subyacente al proceso de diagnóstico y evaluación.

A5.- Otro centro de interés se sitúa en el esclarecimiento de las supuestas relaciones existentes entre la comprensión y otras nociones cognitivas como aprendizaje, conocimiento o memoria, entre otras. Conviene recordar que la mayoría de las deliberaciones sobre esta cuestión discurren en un nivel exclusivamente teórico.

A6.- La situación descrita en el capítulo III con respecto al cálculo aritmético elemental también muestra una complejidad y diversidad considerables. De hecho, se identifican diversas tendencias en la enseñanza que apuestan por algunas de las siguientes posibilidades: enseñanza de algoritmos estándar empleando diferentes elementos; enseñanza de algoritmos escritos alternativos, culturales e históricos; invención y desarrollo de algoritmos propios y, finalmente, propuestas de integración. Las tareas y situaciones a emplear con los alumnos son una de las fuentes de discusión.

A7.- En el campo del cálculo aritmético elemental existe una frontera reconocida entre la reproducción y aplicación mecánica de los algoritmos enseñados en la escuela y el reconocimiento y toma de conciencia de sus propiedades fundamentales. Dicho de otra manera, prevalece la clásica dicotomía entre lo procedimental y lo conceptual como aspectos contrapuestos de naturaleza diferente.

9.3.2 Análisis Didáctico

Del estudio presentado en el capítulo IV cabe subrayar las siguientes conclusiones:

AD1².- Los trabajos revisados ponen de manifiesto la complejidad subyacente al fenómeno de la comprensión de un conocimiento matemático. Esta complejidad se manifiesta al contemplar la comprensión en relación con otras nociones cognitivas igualmente complejas y asumiendo el carácter multidimensional del fenómeno.

AD2.- Los esfuerzos por aclarar el fenómeno de la comprensión en Didáctica de la Matemática se han venido desarrollando hasta ahora desde perspectivas diferentes, abordando cuestiones parciales y asumiendo objetivos no-comunes, al menos a corto plazo. Entendemos, asimismo, que se manifiesta un panorama de carácter atomista con una leve emergencia de la posición representacionista sobre las demás.

² Las siglas AD encabezan los resultados y conclusiones del Análisis Didáctico.

AD3.- Se reconoce la especificidad del conocimiento matemático como factor que condiciona la comprensión y su valoración. No obstante, se echan en falta trabajos que traten explícitamente la comprensión del conocimiento matemático como fenómeno particular diferente a la comprensión de otros conocimientos. En la actualidad, este asunto constituye un campo abierto para la investigación.

AD4.- El reconocimiento de una relación no arbitraria entre los estados mentales de un sujeto y su conducta externa es compartido por la mayoría de las posiciones adoptadas frente a la comprensión. Pero ello no significa que se conozca con precisión la naturaleza exacta de tal relación, aspecto en el que surgen las principales diferencias entre las distintas perspectivas y aproximaciones a la comprensión actualmente existentes en Educación Matemática.

AD5.- Los trabajos revisados se pueden organizar en las siguientes categorías: estudios curriculares; estudios sobre modelos de categorías o niveles de comprensión; trabajos no específicos con definiciones o caracterizaciones para la comprensión; aproximaciones específicas centradas en el fenómeno de la comprensión, ampliamente desarrolladas y elaboradas; estudios vinculados a la idea de *modelo mental*.

AD6.- La mayoría de los estudios realizados en Educación Matemática han tenido como propósito la identificación de diferentes tipos de comprensión, aunque con las siguientes limitaciones: se trata de estudios elementales que fomentan una visión distorsionada de la comprensión matemática como algo simple y no como un proceso complejo; no resuelven la cuestión de la existencia de un límite superior para la comprensión de un conocimiento matemático; las tipologías no suelen constituir una partición y tendrían que definirse en función del conocimiento matemático que se pretende evaluar; surgen numerosas cuestiones acerca de las características particulares de las categorías, niveles o clases de comprensión.

AD7.- La *visión representacionalista* de la comprensión constituye un modelo explicativo restringido y con problemas graves aún pendientes, por cuanto: no queda claro el vínculo existente entre la comprensión y las conexiones entre diferentes representaciones internas; tampoco está resuelta y no es sencilla de establecer la transición entre los ámbitos externo e interno; el enfoque depende y está condicionado por ideas preconcebidas sobre la naturaleza y el funcionamiento del fenómeno de la comprensión que se explican en términos de características mentales propias del sujeto cognoscente.

AD8.- El diagnóstico y la evaluación de la comprensión en la aproximación representacionalista se encuentran limitados hasta que se arbitre una solución satisfactoria al problema fundamental de la viabilidad de la evaluación de las representaciones privadas o internas que los alumnos construyen en su mente.

AD9.- La valoración, entendida como interpretación de acciones observables realizadas por otros, ha de ser necesariamente abierta e incompleta. Sin embargo, una valoración limitada no debe interpretarse necesariamente como inadecuada.

AD10.- Entre los trabajos revisados, las manifestaciones observables de los sujetos (acciones externas, producción escrita, afirmaciones y explicaciones) se erigen como un medio adecuado, y a veces único, para extraer información relevante y objetiva sobre el

estado de comprensión de los sujetos. Asimismo, las apreciaciones son relativas y las valoraciones resultan diferentes si las hacen distintos observadores.

AD11.- La valoración depende además del propósito del investigador, del modelo de comprensión adoptado como referencia teórica, de la metodología empleada en las fases empíricas y de las tareas utilizadas. Son condicionantes de la valoración que justifican su carácter relativo.

AD12.- En algunas investigaciones se identifican claras limitaciones a la hora de justificar la elección y diseño de las tareas utilizadas en sus fases empíricas. De hecho, la mayoría de los trabajos revisados presentan dificultades para la justificación rigurosa y coherente de la selección de tareas para el estudio empírico.

AD13.- De los estudios revisados podemos concluir que las producciones escritas y las explicaciones de los alumnos ante situaciones-problemáticas son datos interpretados por el investigador como indicios de la presencia de comprensión. Existe, sin embargo, una cierta controversia en torno a la relación entre acción y explicación en el proceso de evaluación de los sujetos.

AD14.- Se echa en falta un mayor número de trabajos que establezcan con detalle las pautas a seguir para la elaboración concreta de análisis epistemológicos y fenomenológicos, al tiempo que observamos una cierta diversidad en las propuestas para alcanzar la operatividad y objetividad en los juicios sobre la comprensión de los sujetos, por lo que tampoco existe un total acuerdo en este aspecto.

AD15.- Aún resulta preciso continuar con la labor de elaborar y proponer métodos de diagnóstico y valoración cada vez más adecuados, que garanticen, siempre a partir de datos reales obtenidos mediante instrumentos concretos, una información útil, válida y fiable y una evaluación de la comprensión ajustada a la realidad cognitiva de los sujetos.

AD16.- Las distintas líneas de actuación propuestas para la enseñanza de la aritmética elemental, si bien coinciden en algunos planteamientos, también presentan diferencias importantes debidas a las diversas concepciones en las que se basan sobre el aprendizaje y desarrollo cognitivo. A pesar de que los estudios relacionados con la enseñanza de los algoritmos persiguen el objetivo común de conseguir la comprensión de los estudiantes, los que hemos revisado sólo ofrecen prescripciones e ideas no definitivas y de carácter general.

AD17.- La posición representacionista de la comprensión se muestra en la base de algunas de las propuestas analizadas sobre la enseñanza del cálculo aritmético elemental.

AD18.- En los estudios analizados, tanto sobre comprensión como sobre cálculo aritmético elemental, no se encuentran ejemplos que traten en profundidad la comprensión del algoritmo estándar escrito del producto.

AD19.- Los estudios sobre enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental se encuentran mediatizados por la situación actual de la investigación sobre comprensión del conocimiento matemático. Así, se observa una tendencia generalizada a

centrar la atención en la enseñanza de un determinado procedimiento de cálculo sin una reflexión previa consistente sobre su comprensión.

En resumen, dado el carácter atomista de los trabajos revisados y la independencia y diferencias mostradas entre ellos, tanto en el bloque de comprensión como en el de cálculo aritmético elemental, llegamos a concluir la necesidad de realizar intentos de propósito integrador dirigidos fundamentalmente a ordenar el campo de estudio de la comprensión del conocimiento matemático, en general, y de la comprensión de los algoritmos aritméticos elementales, en particular. En concreto, conviene posicionar los trabajos desarrollados, relacionarlos de forma precisa, destacar sus potencialidades y limitaciones y, como consecuencia, mostrar posibles vías de actuación para futuras investigaciones. El análisis didáctico desarrollado ha pretendido ser un aporte en este sentido.

9.3.3 Comprensión del conocimiento matemático

En este apartado se exponen las consideraciones más destacadas que se deducen del estudio que se expone en el capítulo V:

C1³.- Admitimos la posibilidad de no poder desarrollar, por ahora, una teoría que resuelva de modo concluyente el problema de la comprensión del conocimiento matemático y, por tanto, el de orientar adecuadamente la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A lo más que puede aspirar un investigador en la actualidad es a proporcionar aproximaciones teóricas con posibilidad de contrastación empírica.

C2.- La construcción de conocimientos no sólo es resultado de procesos cognitivos internos y privados que tienen lugar al margen del entorno, sino que también se explica, en parte, por la existencia de una componente sociocultural, un factor 'externo' ligado a la faceta convencional y al carácter compartido del conocimiento matemático que impregna la fenomenología y condiciona las experiencias correspondientes.

C3.- Para cada conocimiento matemático, es posible establecer dos estructuras fundamentales asociadas que determinan su naturaleza y existencia, una *epistemológica* y otra *fenomenológica*.

C4.- Una aproximación completa al fenómeno de la comprensión ha de tener en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos: naturaleza, origen, funcionamiento, fuentes, evolución, efectos, diagnóstico y evaluación.

C5.- El origen de la comprensión se sitúa en las situaciones de desequilibrio cognitivo en las que se ve implicado el sujeto en su interacción con el medio. Las fuentes se encuentran en las experiencias que dichas situaciones generan y que obligan al sujeto a elaborar respuestas adaptadas a cada situación particular.

C6.- Además de procesos mentales, en la comprensión intervienen aspectos sociales y culturales así como la naturaleza del conocimiento matemático. En cuanto al funcionamiento, la comprensión depende de las experiencias y los tipos de respuestas adaptadas.

³ La sigla C encabeza los resultados y conclusiones sobre Comprensión del conocimiento matemático.

C7.- La comprensión depende de las experiencias que tenga el sujeto que comprende con el objeto de comprensión. Dichas experiencias van a estar condicionadas, a su vez, por los tres elementos siguientes: el *objeto* de comprensión, el *sujeto* que comprende y el *medio* de interacción sujeto-objeto.

C8.- El sujeto desarrolla la comprensión de los conocimientos matemáticos a lo largo del tiempo. La comprensión no es un fenómeno estático, sino que emerge, se desarrolla y evoluciona. Asimismo, esta evolución no es unidireccional, sino que se producen sucesivos avances y retrocesos en un proceso dinámico, continuo y, a priori, sin límites.

C9.- Los mecanismos asociados a los fenómenos de comprensión producen en el individuo efectos tanto observables como no observables.

C10.- Cualquier caracterización que se proponga para determinar cuándo comprende un sujeto un determinado conocimiento, debe incluir términos propios del conocimiento que se esté considerando.

C11.- Para observar el estado de la comprensión de un individuo sobre un objeto, es necesario ponerlo en disposición de emplear todas las herramientas, capacidades y conocimientos a su alcance sobre dicho objeto para responder a situaciones especialmente preparadas para ello.

C12.- Comprender un conocimiento matemático es sinónimo de responder intencionadamente y resolver con éxito aquellas situaciones problemáticas en las que se manifiesta y cobra sentido ese conocimiento matemático. La comprensión puede ser considerada, en general, como la capacidad de respuesta adaptada del sujeto.

C13.- Lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación centrada en un conocimiento matemático, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende sobre dicho conocimiento matemático.

C14.- La valoración de la comprensión se ha de llevar cabo a partir de la información que proporcionan las acciones observables de los sujetos y las respuestas que emiten a las situaciones especialmente preparadas para ello. Éstos comportamientos observables constituyen el único medio del que dispone el investigador para hacer afirmaciones y llegar a conclusiones relacionadas con la comprensión del conocimiento matemático.

C15.- Reconocemos las limitaciones del investigador para observar de manera directa la comprensión que tiene, emplea o manifiesta un sujeto acerca de un conocimiento matemático, que únicamente puede ser inferida o abordada indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas que requieren el uso de ese conocimiento matemático.

C16.- La contribución que realizan los errores y las respuestas incorrectas al diagnóstico de la comprensión la consideramos más bien positiva, puesto que siempre llevan asociados un modo particular de empleo del conocimiento matemático, el cual será considerado como indicador de un tipo concreto de comprensión.

C17.- El diagnóstico y la valoración de la comprensión de un conocimiento matemático exige la realización previa de un análisis epistemológico y fenomenológico del mismo. Dichos análisis proporcionan unos criterios que nos permiten ejercer un cierto control sobre el total de situaciones que dan sentido al conocimiento matemático en cuestión. Este control se manifiesta en forma de categorías situacionales y situaciones representativas.

C18.- El diagnóstico y la evaluación deben abordarse en términos de aproximaciones sucesivas a una situación cognitiva real que nunca vamos a poder determinar con precisión. Además, no es posible completar el campo de situaciones donde tiene sentido el conocimiento matemático cuya comprensión nos interesa estudiar.

C19.- El conocimiento matemático no está aislado y para estudiarlo no conviene obviar sus conexiones con el resto de conocimientos. Además, podemos identificar para cada conocimiento matemático las siguientes componentes: una sintaxis, unos conocimientos previos y unas relaciones o conexiones internas.

C20.- La comprensión de los sujetos se valorará en términos de capacidad de enfrentar con éxito situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica del conocimiento de que se trate.

C21.- Suelen existir aspectos de la naturaleza de un conocimiento matemático que no resultan interesantes desde el punto de vista de la cognición de los sujetos, al no favorecer el establecimiento de diferencias entre ellos en cuanto a comprensión. En el análisis fenómeno-epistemológico que proponemos hay que discriminar y considerar los elementos cognitivamente influyentes de los que no lo son.

C22.- La especificidad del conocimiento matemático resulta fundamental a la hora de abordar el diagnóstico y la evaluación de la comprensión.

9.3.4 Algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales: análisis de situaciones para el diagnóstico de la comprensión

De los estudios realizados en los capítulos VI y VII interesa destacar lo siguiente:

AL1⁴.- Ha sido posible establecer una categorización para las situaciones del conjunto situacional asociado al algoritmo. Los criterios clasificatorios sugeridos en la discusión teórica sobre las estructuras epistemológica y fenomenológica han sido contrastados empíricamente de modo favorable.

AL2.- El criterio epistemológico considerado suministra tres categorías:

- Técnica: situaciones donde el algoritmo se emplea de forma mecánica o rutinaria como un instrumento de cálculo.

- Analítica: situaciones que exigen para su resolución un uso reflexivo del algoritmo a nivel externo. Se reconocen las MCCD's como situaciones donde se hace necesaria la aplicación Analítica del algoritmo.

⁴ Las siglas AL se refieren a los resultados y conclusiones sobre el Algoritmo de multiplicar.

- **Formal**: situaciones que precisan para su resolución de la utilización de los principios básicos en los que se fundamenta el algoritmo.

AL3.- El criterio fenomenológico propuesto nos proporciona dos tipos de situaciones:

- **Situaciones Exclusivas**: donde el empleo del algoritmo se muestra evidente para el sujeto.

- **Situaciones No-Exclusivas**: que pueden resolverse de diferentes formas, siendo una de ellas mediante el empleo del algoritmo estándar escrito de la multiplicación.

AL4.- Con el estudio exploratorio sobre las MCCD's se constata la presencia a nivel cognitivo de algunas características propias de la categoría Analítica, previamente identificada tan sólo en el plano epistemológico.

AL5.- Tras el segundo estudio exploratorio, las situaciones Exclusivas de Participación, subcategoría considerada a nivel teórico, mostraron no ser del todo relevantes para establecer diferencias entre los sujetos. La dualidad Preferente/de Participación resultó ser demasiado sutil y por tanto de poca relevancia.

AL6.- La distinción entre situaciones No-Exclusivas Modelo y Naturales, subcategorías surgidas también de la reflexión teórica previa a los estudios exploratorios, tampoco aporta información de interés acerca de las diferencias entre sujetos en cuanto a la comprensión.

AL7.- El problema de la selección de *situaciones adecuadas* admite una solución parcial. Por la propia naturaleza de las situaciones No-Exclusivas resultará imposible determinar representantes de clase en las categorías Técnica, Analítica y Formal. La representatividad, en cambio, parece quedar garantizada en las situaciones Exclusivas.

AL8.- Con los estudios exploratorios realizados se ha podido mostrar que no todas las situaciones asociadas al algoritmo se adaptan por igual a una misma técnica de recogida de información. Por un lado, existen tareas para las que resulta apropiado su empleo en un cuestionario. Por otro, se identifican situaciones en las que es necesario establecer un diálogo a fin de aclarar un posible producto escrito o registrar una respuesta verbal exigida. En este orden de cosas, la entrevista semiestructurada individual sobre cuestionario escrito se muestra especialmente útil como instrumento que cubre la diferencia mencionada.

AL9.- De cara a la observación y valoración de la comprensión, se constata la posibilidad de concretar un *conjunto fundamental* reducido de situaciones Exclusivas pertenecientes a las tres categorías de empleo del algoritmo. Asimismo, se vislumbra la necesidad de diferenciar los dos tipos de situaciones, Exclusivas y No-Exclusivas, como medios con los que observar dos esferas diferentes de comprensión, una "fundamental" y otra "extendida".

AL10.- La operativización buscada se obtiene, fundamentalmente, de las respuestas dadas por los sujetos al conjunto fundamental de situaciones Exclusivas. Por su parte, las situaciones No-Exclusivas resultan útiles para completar la información

proporcionada por las situaciones Exclusivas y para establecer posibles diferencias entre sujetos que manifiesten una comprensión fundamental “equivalente”.

AL11.- Los análisis de las respuestas nos han llevado a diferenciar tres aspectos o facetas distintas, interpretables en términos de comprensión, en relación con el uso Técnico del algoritmo: el reconocimiento del algoritmo como procedimiento de cálculo, la destreza en el uso de la secuencia algorítmica y la independencia a la disposición de los factores en la presentación de la multiplicación a la hora de ejecutar la secuencia algorítmica estándar.

AL12.- En relación con la categoría Analítica, los estudios realizados nos han permitido profundizar en las características particulares del uso analítico del algoritmo. Las relaciones iniciales que identificamos teóricamente como caracterizadoras de la categoría son complementadas ahora por otras no detectadas en principio.

AL13.- Identificamos tres niveles provisionales de uso Formal:

- La explicación, que permanece en el ámbito de las relaciones externas.
- El empleo Formal incipiente e irregular. Se manifiesta en respuestas con justificaciones variables, a veces contradictorias, no siempre de naturaleza Formal.
- El empleo Formal consistente. Se manifiesta una coherencia en las respuestas con justificaciones acertadas sustentadas de forma continua en las propiedades del sistema de numeración decimal posicional y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

9.3.5 Diagnóstico y evaluación de la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales

El estudio empírico descrito en el capítulo VIII nos ha permitido aportar indicios en favor de las siguientes conclusiones:

CAL1⁵- Los criterios epistemológico y fenomenológico empleados para la ordenación del conjunto situacional vinculado al algoritmo han resultado acertados por cuanto nos han permitido identificar claras diferencias cognitivas entre los sujetos interpretables en términos de comprensión.

CAL2.- La comprensión del algoritmo estándar escrito del producto continúa manifestándose, aunque en distintas formas y grados, una vez superado el período escolar correspondiente a la etapa de Educación Primaria.

CAL3.- La comprensión Formal del algoritmo estándar escrito del producto impone mayores exigencias que la comprensión Técnica y Analítica. No llegamos a precisar, sin embargo, una frontera definida entre los ámbitos de comprensión Técnica y Analítica.

CAL4.- La evidencia de una comprensión Técnica Consolidada no es condición necesaria para acceder a los ámbitos de comprensión Analítica y Formal.

⁵ Las siglas CAL encabezan los resultados y conclusiones sobre la Comprensión del Algoritmo de multiplicar.

CAL5.- Para mostrar una comprensión Extendida Analítica o Formal no es necesario evidenciar una comprensión Fundamental Consolidada Analítica o Formal, respectivamente.

CAL6.- En las facetas Analítica y Formal se requiere un mínimo de comprensión Fundamental Incipiente para manifestar una comprensión Extendida al mismo nivel, Analítica o Formal. En la faceta Técnica, por el contrario, no resulta imprescindible ni tan siquiera una comprensión Fundamental Incipiente para dar muestras de comprensión Extendida. En este caso, la exigencia de comprensión Fundamental se sitúa al menos en un estado Básico. Así pues, identificamos una clara relación en los términos expuestos entre los ámbitos de comprensión Fundamental y Extendida.

CAL7.- La elección de un conocimiento matemático para la resolución de una situación No-Exclusiva, que puede verse como un escenario de conocimientos en competencia, es el condicionante que hace que la relación entre las facetas Técnica, Analítica y Formal sea distinta en los ámbitos de comprensión Fundamental y Extendida.

CAL8.- Es posible poseer una comprensión Fundamental Técnica y Analítica Consolidada y sin embargo no dar muestras de comprensión Fundamental Formal. Asimismo, resulta posible expresar una comprensión Técnica Fundamental, incluso Extendida y no dar muestras de comprensión alguna ni Analítica ni Formal.

CAL9.- De todos los perfiles de comprensión teóricamente posibles existen algunos que por su naturaleza resultan en la práctica imposibles o altamente improbables. Tal es el caso del perfil fundamental [--; --; FC] o del extendido [--;--;-- || ET; EA; EF].

CAL10.- El hecho de que se muestren las facetas Técnica, Analítica y Formal como ámbitos de comprensión diferentes y con entidad propia, refleja la complejidad y el carácter multifacético subyacente al fenómeno genérico de la comprensión.

CAL11.- En la experiencia desarrollada se percibe el dinamismo en la comprensión del algoritmo a través de: (a) la variedad de perfiles de comprensión mostrados por los alumnos, (b) la posibilidad de mejora en la mayoría de ellos y (c) un fenómeno de involución identificado en algunos casos.

CAL12.- Resulta acertado ampliar el significado para la noción de *práctica* y mencionar con ella toda acción posible sobre las distintas tareas de las categorías situacionales vinculadas al conocimiento matemático en estudio. En el caso concreto del algoritmo analizado, el desarrollo de su comprensión en los sujetos exige la práctica con todos los tipos de tareas asociadas, no sólo con situaciones de categoría Técnica sino también de categoría Analítica y Formal, tanto en el ámbito Fundamental como en el Extendido. Esta situación se encuentra bastante alejada de la que se desarrolla actualmente en las aulas de Primaria.

CAL13.- El estudio realizado nos ha permitido contemplar la destreza como un aspecto más de la faceta Técnica de la comprensión del algoritmo. Asimismo, se ha podido constatar que el reconocimiento de los pasos del algoritmo estándar escrito para la multiplicación no garantiza el éxito en su aplicación técnica (en el sentido clásico de la expresión).

9.4 Logros y hallazgos

Durante el transcurso de la investigación se han ido aportando argumentos y datos que respaldan las cuatro hipótesis planteadas al principio del informe y del presente capítulo, dando lugar, de este modo, a la consecución de los distintos objetivos propuestos. Un recorrido completo por el proceso seguido en el estudio nos permite identificar los logros y hallazgos obtenidos y enunciar las conclusiones que se exponen a continuación y que hemos organizado en dos apartados: logros y hallazgos específicos o relacionados con las hipótesis y objetivos de la investigación y logros y hallazgos generales o relacionados con aspectos generales de la Educación Matemática y de la investigación en Educación Matemática.

9.4.1 Específicos

(a) *Respecto a las hipótesis:*

Hipótesis I.- *El estado actual de conocimientos en Educación Matemática en torno al fenómeno de la comprensión justifica la necesidad y admite la posibilidad de realizar esfuerzos teóricos, encaminados a interpretar, integrar y ampliar la información existente, y prácticos, centrados en el diseño y aplicación de propuestas operativas para el estudio de este fenómeno.*

La situación descrita en el capítulo II, su análisis incluido en el capítulo IV y el posterior desarrollo teórico elaborado en el capítulo V avalan, de un modo satisfactorio, la bondad de esta hipótesis a nivel teórico. De forma añadida, los estudios realizados en los capítulos VI, VII y VIII vienen a respaldar favorablemente la posibilidad de aplicación práctica de la propuesta.

Hipótesis II.- *Resulta posible abordar los problemas relativos a los distintos aspectos vinculados con la comprensión de conocimientos matemáticos específicos, incluso los de naturaleza interna, mediante la elaboración y aplicación de aproximaciones de carácter teórico-metodológico centradas en el estudio de lo observable.*

La consideración conjunta del proceso descrito en los capítulos V, VI, VII y VIII sobre el desarrollo de la Aproximación y su posterior aplicación al caso del algoritmo estándar escrito de la multiplicación de números naturales, proporciona indicios razonables sobre la bondad de esta hipótesis de investigación global.

Hipótesis III.- *Los análisis epistemológicos y fenomenológicos asociados a un conocimiento matemático proporcionan criterios objetivos para la organización de su conjunto situacional y para la selección de tareas y situaciones con las que valorar la comprensión que manifiestan los sujetos.*

La bondad de la hipótesis III viene respaldada por la primera fase de aplicación teórica de la Aproximación, recogida en el capítulo VI, junto con los estudios exploratorios descritos en el capítulo VII.

Hipótesis IV.- *En el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales se identifican distintas facetas de comprensión, de origen epistemológico y*

también fenomenológico, que permiten la descripción de diferentes estados y perfiles de comprensión en los sujetos.

Consideramos que los resultados expuestos en el capítulo VIII proporcionan suficiente evidencia empírica en favor de esta hipótesis.

(b) *Respecto a los objetivos:*

La confirmación de las hipótesis de investigación ha permitido alcanzar, en distinto grado, los objetivos propuestos:

[OT₁] *Revisar y analizar el campo de conocimientos actual en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, poniendo de manifiesto los principales intereses, problemas y limitaciones existentes.*

Objetivo que consideramos cubierto como consecuencia de la verificación de la hipótesis I. En concreto, en el capítulo II se presenta una síntesis estructurada de la información obtenida en la revisión primaria de antecedentes sobre comprensión. Asimismo, se desarrolla en el capítulo IV un estudio de las relaciones más destacadas entre los distintos campos revisados.

[OT₂] *Desarrollar una base teórica inicial, sólida pero a la vez abierta, con la que organizar, integrar y ampliar con interpretaciones plausibles teorías y planteamientos sobre comprensión identificados en investigaciones previas en Educación Matemática.*

Objetivo alcanzado suficientemente en el capítulo V con la propuesta de Aproximación a la comprensión del conocimiento matemático. La consecución de este objetivo específico viene dada por la comprobación de la hipótesis I.

[OT₃] *Elaborar un marco de acción metodológica con el que afrontar el problema del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático desde lo observable.*

Se alcanza como consecuencia de la verificación de las hipótesis I y II. Al igual que el anterior, se trata de un objetivo que damos por cubierto con las referencias expuestas en el capítulo V, en este caso sobre el modelo metodológico para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión.

[OM₁] *Mostrar la operatividad y viabilidad práctica de la Aproximación propuesta para el estudio de la comprensión del conocimiento matemático aplicándola en el caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.*

Creemos que este objetivo se cubre en su totalidad en base a las siguientes consideraciones, expuestas en los capítulos VI, VII y VIII:

- en el capítulo VI se inicia el proceso de aplicación de la Aproximación con el desarrollo de los análisis epistemológico y fenomenológico asociados al algoritmo, la delimitación de una estructura fenómeno-epistemológica y la clasificación provisional del conjunto situacional vinculado al algoritmo;

- en el capítulo VII se analiza la adecuación de los resultados obtenidos en el capítulo anterior a través de una primera confrontación empírica, resolviéndose en su caso las cuestiones abiertas planteadas en él;

- en el capítulo VIII se aportan los resultados empíricos que contribuyen al logro completo del objetivo al mostrarse con ellos la posibilidad de identificar estados y perfiles de comprensión sobre el algoritmo.

[OM₂] *Delimitar y organizar el conjunto situacional asociado al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales en base a criterios y categorías organizativas de orden epistemológico y fenomenológico.*

Objetivo que se alcanza plenamente en los capítulos VI y VII como consecuencia de la verificación de la hipótesis III.

[OE] *Identificar, describir y caracterizar posibles estados y perfiles de comprensión tipo en los sujetos asociados al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales y obtener a partir de ellos información específica sobre características y aspectos particulares de la comprensión de este conocimiento matemático.*

Este objetivo viene dado en parte por la confirmación de la hipótesis IV. Asimismo, los distintos resultados y conclusiones relativas a la comprensión del algoritmo estándar escrito del producto, expuestos en el capítulo VIII, aportan información suficiente para considerar el objetivo cubierto.

Finalmente, mediante la consecución de todos los objetivos específicos damos por alcanzado en su totalidad el propósito central de la investigación, consistente en *sentar las bases teóricas y metodológicas de una aproximación integradora y operativa al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático fundada en el diagnóstico y la evaluación de los comportamientos observables en los sujetos.*

En cuanto a los objetivos complementarios:

(a) *Poner de manifiesto la capacidad y adecuación de los desarrollos teóricos sólidos para sustentar investigaciones en Didáctica de la Matemática y aportar argumentos en favor de su elaboración y uso por parte de los investigadores en dicho campo.*

La presente investigación puede ser considerada como un ejemplo que respalda tal opción, al quedar suficientemente contrastada la potencialidad del desarrollo teórico expuesto en los capítulos IV y V para organizar información teórica diversa, establecer pautas metodológicas viables y obtener resultados empíricos interpretables; condiciones, todas ellas, pertinentes en cualquier propuesta teórica apropiada.

(b) *Mostrar la potencialidad didáctica y para la investigación de los análisis epistemológico y fenomenológico como procedimientos para la identificación y ordenación de situaciones vinculadas a los conocimientos matemáticos concretos.*

Objetivo alcanzado a nivel teórico en el capítulo VI y completado en los capítulos VII y VIII con el respaldo de la evidencia empírica obtenida. Los resultados alcanzados

en la fase empírica de la investigación avalan el acierto de estos análisis como medio para la elaboración de instrumentos de recogida de datos adecuados con los que observar y valorar la comprensión en los sujetos, al tiempo que muestran suficientemente sus posibilidades como herramienta para la obtención de situaciones con las que desarrollar la comprensión en el aula.

Hemos de subrayar, no obstante, que este objetivo se completa para el caso del algoritmo estándar escrito del producto, quedando pendientes nuevos análisis centrados en diferentes conocimientos matemáticos. En este sentido, el objetivo puede considerarse parcialmente cubierto.

(c) Mostrar la pertinencia y eficacia de los estudios sobre comprensión sustentados en marcos teóricos integradores y operativos y centrados en conocimientos matemáticos específicos para la obtención de información acerca del fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático considerado en términos genéricos.

Objetivo que damos por cubierto suficientemente al término del estudio empírico expuesto en el capítulo VIII, donde, desde la perspectiva de la Aproximación integradora y operativa desarrollada, se llega a realizar una primera contribución sobre aspectos generales de la comprensión del conocimiento matemático a partir de los resultados y las conclusiones particulares obtenidas sobre la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

9.4.2 Generales

De la investigación realizada se extraen algunas consecuencias generales que consideramos de interés para distintos ámbitos de la Educación Matemática:

(a) De cara a la investigación en Educación Matemática, se proporciona un modelo sobre comprensión aplicable a conocimientos matemáticos diferentes. De forma específica, se facilita un instrumento teórico y metodológico con el que poder desarrollar estudios sobre la comprensión del conocimiento matemático a través de la observación, diagnóstico y valoración de lo observable.

(b) Se transmite la necesidad de realizar esfuerzos curriculares sistemáticos para contemplar, con un mayor acierto que el logrado hasta ahora, la complejidad global de los conocimientos matemáticos, disponiendo para ello situaciones y fenómenos que cubran en lo posible la esfera fenómeno-epistemológica de cada conocimiento. Si desde el ámbito escolar se quiere garantizar una comprensión lo más completa posible, es recomendable que el estudiante participe en una amplia variedad de actividades diseñadas con intención y de acuerdo a su nivel. De lo contrario, estaríamos limitando a sólo una parcela de situaciones el campo de actuación del conocimiento matemático en estudio, lo que afectaría a la comprensión de los sujetos.

(c) Se facilita un procedimiento operativo para la identificación y organización de situaciones matemáticas para la práctica docente. Además, a través de un ejemplo concreto, se dan muestras del uso que podría darse a estas situaciones en el aula de cara a la valoración y al desarrollo de la comprensión del conocimiento matemático en los alumnos. En este sentido, entendemos que parte de la propuesta presentada está estrechamente relacionada con la consideración de la fenomenología del conocimiento matemático como organizador del currículo (Rico, 1997b). Asimismo, en respuesta a

Webb (1992) pensamos que los principios establecidos para la identificación y selección de situaciones de valoración se sitúan en un contexto de interés para los estudios recientes sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En definitiva, la Aproximación presentada es tanto descriptiva como prescriptiva, lo que la hace propicia, de acuerdo con Koyama (1993), para ser un modelo útil y efectivo en Educación Matemática.

9.5 Perspectivas futuras

A lo largo de los capítulos del presente informe se han venido subrayando algunas dificultades específicas y cuestiones pendientes surgidas durante el transcurso de las distintas etapas de la investigación; dificultades y cuestiones que dejan abiertas posibles vías de continuación para futuras investigaciones y de las que resumimos a continuación las que nos parecen más significativas:

1.- La revisión de trabajos realizados en diferentes áreas de conocimiento sobre el fenómeno de la comprensión, entre las que se encuentra la Didáctica de la Matemática, aunque suficiente para esta investigación, debe considerarse necesariamente incompleta. Cabe la posibilidad de una exploración de mayor alcance que integre los trabajos más recientes y contemple nueva información proveniente de campos diferentes. A modo de ejemplo, quedaría pendiente la labor de iniciar un acercamiento sistemático a los estudios realizados sobre comprensión en áreas como la matemática o la lingüística.

2.- Interesaría realizar nuevos análisis didácticos con objeto de profundizar, fundamentalmente, en la naturaleza de los trabajos existentes sobre comprensión del conocimiento matemático y en sus conexiones, y de articular de un modo más preciso los avances en este ámbito de estudio con las distintas situaciones problemáticas específicas identificadas en otras áreas concretas de investigación en Didáctica de la Matemática, además del cálculo aritmético elemental.

3.- En lo que respecta a los fundamentos teóricos de la investigación, se han sentado las bases de una Aproximación a la comprensión del conocimiento matemático que ha dado muestras de ser integradora y operativa, además de abierta y provisional. Por tal motivo, convendría realizar nuevas investigaciones de los siguientes tipos:

(a) Estudios inmediatos sobre la base teórica de la Aproximación desarrollada y siguiendo la misma línea metodológica propuesta para contrastar su operatividad ante conocimientos matemáticos que posean una complejidad fenómeno-epistemológica similar y diferente al algoritmo estándar escrito del producto. Por ejemplo, queda pendiente la labor de replicar la investigación, a nivel de aplicación de la Aproximación, para los algoritmos estándar escritos correspondientes a las restantes operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción y división).

(b) Con pretensiones más amplias, se deberían desarrollar investigaciones sobre el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático desde la misma perspectiva que la presentada, que pongan a prueba el marco teórico-metodológico de la Aproximación en toda su extensión y permitan, en su caso, la modificación, estructuración y ampliación del mismo, sobre todo en lo que respecta a los supuestos y

resultados relacionados con los diferentes aspectos de la comprensión del conocimiento matemático. Con ello se irían obteniendo nuevos resultados y conclusiones generales, al tiempo que se conseguiría la consolidación de la propuesta metodológica para el diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático.

4.- A medio y largo plazo, convendría ir contrastando regularmente los avances sobre comprensión en la aproximación iniciada y en aquéllos que se van obteniendo desde otras posiciones y perspectivas consolidadas, en vías de desarrollo o futuras. El propósito integrador de la propuesta no pretende tan sólo garantizar un marco de referencia que posibilite, en un instante dado, una interpretación y articulación de trabajos previos, sino que aspira a mantener un vínculo dinámico con las distintas aproximaciones existentes a la comprensión a fin de alcanzar beneficios mutuos a partir de la confrontación de ideas y la reflexión conjunta permanente.

5.- Las diversas dificultades y limitaciones reconocidas en los análisis epistemológico y fenomenológico asociados al conocimiento matemático recomiendan, con vistas a identificar en la práctica los límites de la aplicabilidad de estos análisis, futuras reflexiones dirigidas a establecer unas pautas procedimentales precisas con las que poder desarrollar análisis certeros de forma sistemática así como nuevos estudios centrados en conocimientos matemáticos más complejos que el algoritmo estándar escrito del producto.

Asimismo, convendrá prestar atención en estudios posteriores a la cuestión específica de la unicidad de la posible categorización situacional derivada de los análisis epistemológico y fenomenológico. Este aspecto, contemplado en la presente investigación, requiere sin embargo una reflexión más pausada incluso para el caso del algoritmo estándar escrito de la multiplicación.

6.- Los estudios empíricos realizados deben considerarse provisionales en cuanto a que forman parte de un proceso más amplio para la obtención de información sobre la comprensión en los sujetos del algoritmo estándar escrito del producto. Las interpretaciones realizadas en términos de comprensión así como los resultados y conclusiones obtenidos han de ser contrastados y ampliados mediante el desarrollo de nuevas experiencias donde participen preferentemente muestras más representativas que las empleadas en esta investigación.

En el mismo orden de reflexión, la segunda experiencia realizada no ha sido más que una opción entre otras posibles. Así por ejemplo, queda abierta la posibilidad de realizar estudios cuantitativos con cuestionarios para pasar a muestras amplias de población con el propósito de valorar exclusivamente la comprensión de los sujetos observable a través del uso de situaciones adecuadas para el formato escrito.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abel, T. (1964). La operación llamada “Verstehen”. En I. L. Horowitz (Coord.) *Historia y elementos de la sociología del conocimiento* (pp. 185-196). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Ainley, J. y Lowe, A. (1999). Can written questions differentiate between degrees of understanding? *Mathematics Teacher*, 168, 32-35.

Anghileri, J. (1995). Language, Arithmetic and the Negotiation of Meaning. *For the Learning of Mathematics*, 15, 3, 10-14.

Anthony, G. y Knight, G. (1999). Basic facts: the role of memory and understanding. *The New Zealand Mathematics Magazine*, 36, 3, 28-40.

Arcavi, A. (1995). ...Y en matemáticas, los que instruimos, ¿qué construimos? *Substratum*, 6, 2, 77-94.

Arnold, W., Eysenck, H. J. y Meili, R. (1979). *Diccionario de Psicología*. Madrid: Ediciones Rioduero.

Ashcraft, M. H. (1995). Cognitive Psychology and Simple Arithmetic: A Review and Summary of New Directions. *Mathematical Cognition*, 1, 1, 3-34.

Assude, T. (1996). De l'écologie et de l'économie d'un système didactique: une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16, 1, 47-70.

Azcárate, C. (1998). *Las entrevistas en investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Análisis de algunas experiencias próximas*. II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (pp. 25-31). Navarra: Universidad de Pamplona.

Ball, S. (1986). From Story to Algorithm. *School Science and Mathematics*, 86, 5, 387-394.

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 5-34.

Bender, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts. En C. Alsina, J. M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez. *8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME). Selección de Conferencias* (pp. 57-74). SAEM Thales: Sevilla, 14-21 julio.

- Bishop, A. J. (1992).** International Perspectives on Research in Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 710- 723). New York: MacMillan Publishing Company.
- Bisquerra, R. (1989).** *Métodos de Investigación Educativa. Guía Práctica*, Barcelona: CEAC.
- Blanco, L. (1993).** Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon*, 25, 49-60.
- Boero, P., Ferrari, P. L. y Ferrero, E. (1989).** Division Problems: Meanings and Procedures in the Transition to a Written Algorithm. *For the Learning of Mathematics*, 9, 3, 17-25.
- Brown, H. I. (1994).** *La nueva filosofía de la ciencia*. Tercera Edición. Madrid: Tecnos.
- Burns, M. (1994).** Arithmetic: The Last Holdout. *Phi, Delta, Kappan*, febrero, 471-476.
- Byers, V. y Erlwanger, S. (1985).** Memory in Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 259-281.
- Byrnes, J. P y Wasik, B. A. (1991).** Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning. *Developmental Psychology*, 27, 5, 777-786.
- Cambell, P. F., Rowan, T. E. y Suarez, A. (1998).** What Criteria for Student-Invented Algorithms? En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 49-55). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cañón, C. (1993).** *La matemática: creación y descubrimiento*, Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.
- Carpenter, T. P. (1986).** Conceptual Knowledge as a Foundation for Procedural Knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A. y Wearne, D. (1999).** Learning basic number concepts and skills as problem solving. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.) *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 45-61). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T. y Lehrer, R. (1999).** Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.) *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1987).** Written and Oral Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 2, 83-97.
- Carrillo, J. (1998).** *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carroll, W. M. (1996). Use of Invented Algorithms by Second Graders in a Reform Mathematics Curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 137-150.

Carroll, W. M. y Porter, D. (1998). Alternative Algorithms for Whole-Number Operations. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 106-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Granada: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15, 3, 361-371.

Clausen-May, T. (2000). Understanding Assessment- The Assessment of Understanding. *Mathematics Teacher*, 171, 32-35.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Conradie, J. y Frith, J. (2000). Comprehension Tests in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 225-235.

Coriat, M. (2000). *Los problemas de un director de Tesis. Anexos*. Ponencia presentada en el Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga. Málaga (paper).

Curcio, F. R. y Schwartz S. L. (1998). There are no algorithms for teaching algorithms. *Teaching Children Mathematics*, septiembre, 26-30.

Dancy, J. (1993). *Introducción a la epistemología contemporánea*. Madrid: Tecnos.

Davis, R. B. (1992). Understanding "Understanding". *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 225-241.

De Lorenzo, L. (2000). *Filosofías de la matemática. Fin de siglo XX*. Valladolid: Universidad de Valladolid.

DeMarois, P. y Tall, D. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for*

the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2 (pp. 297-304). Valencia, España, julio.

Díaz-Godino, J. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.

Díaz-Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado Personal e Institucional de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14, 3, 325-355.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor.

Dorsch, F. (1985). *Diccionario de Psicología*. Barcelona: Herder.

Duffin, J. y Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp.166-173). Lhati, Finland, 14-19 julio.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, Hiroshima, Japan, pp. 55-69.

English, L.D. y Halford, G.S. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Ernest, P. (1994). Varieties of Constructivism: Their Metaphors, Epistemologies and Pedagogical Implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.

Farnham-Diggory, S. (1994). Paradigms of Knowledge and Instruction. *Review of Educational Research*, 64, 463-477.

Fennema, E. y Romberg, T. A. (Eds.) (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Fernández, A. (1995). *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Madrid: Síntesis.

Fernández, J. y Rodríguez, M^a. L. (1989). *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*. Madrid: Síntesis.

Ferrater, J. (1994). *Diccionario de filosofía*. Barcelona: Ariel.

Feyerabend, P. (1991). *Diálogos sobre el conocimiento*. Madrid: Cátedra.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35.

Fontana, A. y Frey, J. H. (1994). Interviewing. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 361- 376). London: Sage Publications.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gadamer, H. G. (2000). *Verdad y Método II*. 4ª Edición. Salamanca: Sígueme.

Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos*. Madrid: Síntesis.

Gallardo, J. (2001). Comprensión del algoritmo estándar de la multiplicación: un estudio exploratorio en escolares de 10 a 14 años. En M.Ortiz (Ed.) *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)*, Palencia: Universidad de Valladolid.

Gallardo, J. y González, J. L. (2002). Multiplicaciones con cifras desconocidas: problemas para practicar y comprender el algoritmo estándar de la multiplicación. *Epsilon*, 54, 469-478.

Gallardo, J. y González, J. L. (2003). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En E. Castro (Ed.) *Líneas de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico. Homenaje al Profesor Jorge Cázares*. Granada: Universidad de Granada (por aparecer).

Gavilán J. Mª y Barroso, R. (1996). Didáctica de los algoritmos a través de reconstrucciones. *Epsilon*, 35, 193-202.

Gavilán, J. (1999). *Breve historia de la filosofía*. Málaga: Sarriá.

Genovard, C. (1980). *Diccionario de Psicología*. Barcelona: Elicien.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo*. Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1999a). El futuro del cálculo. *Uno*, 22, 20-27.

Gómez, B. (1999b). *Juntando partes en Pensamiento Numérico y Algebraico*. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia (paper).

Goñi, J. Mª (2000). La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. En J. Mª Goñi (Coord.) *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Grao, pp. 23-57.

González, J. L. (1998a). Números naturales relativos. Granada: Comares.

González, J. L. (1998b). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education, Vol. II* (pp. 245-256). Osnabrück, Germany.

González, J. L. (1999). Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), pp.14-30. Valladolid: Universidad de Valladolid.

González, J. L., Pascual, J. R. y Flores, P. (1994). Epistemología y Educación Matemática. En L. Rico y J. Gutiérrez (Eds.) *Formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria*. Granada: ICE de la Universidad de Granada, pp. 25-39.

González, J. L. y Ortiz, A. (2000). La investigación en Educación Matemática en la Universidad de Málaga: estructura y fundamentos. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva (paper).

González, J. L. (2001). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. Memoria Final del Proyecto de Investigación PB97-1066, subvencionado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología durante el trienio 1998-2001 (paper).

Gusev, V. A. y Safuanov, I. S. (2000). Some theoretical problems of the development of mathematical thinking. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 17-24). Hiroshima, Japan, 23-27 julio.

Guzmán, M. de (1994). *Para pensar mejor*. Madrid: Pirámide.

Habermas, J. (1981). *Teoría de la acción comunicativa I*. Madrid: Taurus, 1999 (Ed. Usada).

Hamrick, K. B. y McKillip, W. D. (1978). How Computational Skills Contribute to the Meaningful Learning of Arithmetic. En M.N. Suydam y R. E. Reys (Eds.) *Developing Computational Skills* (pp. 1-12). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hitt, F. (1999). Tesis de Doctorado en Matemática Educativa en México. En K. Hart y F. Hitt (Eds.) *Dirección de Tesis de Doctorado en Educación Matemática. Una perspectiva internacional* (pp. 45- 60). México: Cinvestav-IPN.

Hatano, G., Amaiwa, S. y Inagaki, K. (1996). "Buggy Algorithms" as Attractive Variants. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 285-302.

Hedrén, R. (1998). The teaching of traditional standard algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupils' own methods. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 233-244). Osnabrück, Germany.

Hennessy, S. (1993). The stability of children's mathematical behavior: when is a bug really a bug? *Learning and Instruction*, 3, 315-338.

Hernández-Pacheco, J. (1996). *Corrientes actuales de Filosofía. La Escuela de Francfort. La filosofía hermenéutica.* Madrid: Tecnos.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K.C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding,* Portsmouth, N. H.: Heinemann.

Hiebert, J. y Wearne D. (1993). Instructional Tasks, Classroom Discourse and Students' Learning in Second-Grade Arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30, 2, 393-425.

Ifrah, G. (1998). *Historia Universal de las Cifras.* Madrid: Espasa Calpe.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III.* Madrid: Visor.

Kamii, C. y Dominick, A. (1997). To Teach or Not to Teach Algorithms. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 1, 51-61.

Kamii, C., Lewis, B. A. y Livingston, S. L. (1993). Primary Arithmetic: Children Inventing their own Procedures. *Arithmetic Teacher*, 41, diciembre, 200-203.

Kieran, C. (1994). Doing and seeing things differently: a 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 6, 583-607.

Kieran, C. (1998). Models in Mathematics Education Research: a Broader View of Research Results. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 213-255). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kouba, V. L. y Franklin, K. (1995). Multiplication and Division: Sense Making and Meaning. *Teaching Children Mathematics*, mayo, 574-577.

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.

Koyama, M. (1997). Research on the complementarity of intuition and logical thinking in the process of understanding mathematics: an examination of the two-axes process

model by analyzing an elementary school mathematics class. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 5, 21-33.

Koyama, M. (2000). A research on the validity and effectiveness of “two-axes process model” of understanding mathematics at elementary school level. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 159-166). Hiroshima, Japan, 23-27 julio.

Kraemer, J. M. (1999). Dividir construyendo los números (mentalmente) ¿Una alternativa frente al algoritmo usual de la división? *Uno*, 22, 29-43.

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

Lindquist, M. M. (1997). Foreword. En J. Hiebert, T.P. Carpenter, E. Fennema, K. C. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Olivier y P. Human *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*, Portsmouth, NH: Heinemann, pp. vii-xvii.

Mason, D. E. (1998). Capsule Lessons in Alternative Algorithms for the Classroom. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 91-98). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. y Waywood, A. (1996). The Role of Theory in Mathematics Education and Research. En A. J. Bishop et al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 1055-1089). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Maurer, S. B. (1998). What Is an Algorithm? What Is an Answer? En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 21-31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Maza, C. (1989). *Multipliación y división*. Madrid: Síntesis.

Maza, C. (1991). *Multiplicar y dividir*. Madrid: Visor.

Mingus, T.T.Y. y Grassl, R. M. (1998). Algorithmic and Recursive Thinking Current Beliefs and Their Implications for the Future. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 32-43). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Morgan, C. (1996). Language and Assessment Issues in Mathematics Education. En A. Gutierrez et al. (Eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, Valencia, Spain, pp. 19-26.

Morin, E. (1994). *El Método. El conocimiento del conocimiento*. Madrid: Cátedra.

Nakahara, T. (1994). Study of the representational system in mathematics education. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 59-67.

Nesher, P. (1986). Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related? *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association* (67th, San Francisco, CA, April 16-20).

Niemi, D. (1996). Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications, and Explications. *The Journal of Educational Research*, 89, 6, 351-363.

Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 1-24.

Philipp, R. A. (1996). Multicultural Mathematics and alternative algorithms. *Teaching Children Mathematics*, 3, noviembre, 128-133.

Piaget, J., Inhelder, B., García, R. y Vonèche, J. (1981). *Epistemología genética y equilibración. Homenaje a Jean Piaget*. Madrid: Fundamentos.

Pirie, S. y Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9, 3, 7-11.

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

Pirie, S.E.B. (1988). Understanding: Instrumental, Relational, Intuitive, Constructed, Formalised...? How Can We Know? *For the Learning of Mathematics*, 8, 3, 2-6.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puig, L y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada. Comares.

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Puig, L. (1998). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.). *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Granada: SEIEM-Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, pp. 106-118.

Quintanilla, M. A. (1979). *Diccionario de filosofía contemporánea*. Salamanca: Sígueme.

Ramírez, A. y Usón, C. (1996). ...Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones. *Suma*, 21, 63-71.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putham y R.

Hatrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós-MEC.

Rico, L. (1997a). Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática. *Suma*, 24, 5-19.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva (paper).

Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 179-193). Granada: Universidad de Granada.

Rittle-Johnson, B. y Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: a review. En J.W. Adams, M.H. Ashcraft et al. (Eds.) *The Development of Mathematical Skills* (pp. 75-110). East Sussex, U.K.: Psychology Press, Ltd.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 231-255). Madrid: Síntesis.

Romberg, T. A. (1992). Perspectives on Scholarship and Research Methods. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 49-64). New York: MacMillan Publishing Company.

Romero, I. (2000). *Representación y Comprensión en Pensamiento Numérico*. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva (paper).

Ron, P. (1998). My Family Taught Me This Way. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp.115-119). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schank, R. C. (1988). Una explicación de la inteligencia. En R. J. Sternberg y D. K. Detterman (Eds.) *¿Qué es la inteligencia? Enfoque actual de su naturaleza y definición* (pp. 147-158). Madrid: Pirámide.

Schliemann, A. D., Dos Santos, C. M., Da Costa, S. C. (1993). Constructing Written Algorithms: A Case Study. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 155-172.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1, 1-36.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24-36.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Sierpinska, A. (2000). Book Review. *ZDM*, 2, 45-50. [Del libro: **Fennema, E. y Romberg, T. A. (Eds.) (1999).** *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates].

Sierpinska, A., Kilpatrick, J., Balacheff, N., Howson, A. G., Sfard, A. y Steinbring, H. (1993). What Is Research in Mathematics Education, and What Are its Results? *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 3, 274 -278.

Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Stanic, G.M.A y McKillip, W. D. (1989). Developmental Algorithms Have a Place in Elementary School Mathematics Instruction. *Arithmetic Teacher*, 37, enero, 14-16.

Stefanich, G. P. y Rokusek, T. (1992). An Analysis of Computational Errors in the Use of Division Algorithms by Fourth-Grade Students. *School Science and Mathematics*, 92, 4, 201-205.

Steinbring, H. (1989). Routine and Meaning in the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics*, 9, 1, 24-33.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana I. El uso colectivo y la evolución de los conceptos*. Madrid: Alianza Universidad.

Trajtenbrot, B.A. (1977). *Los algoritmos y la resolución automática de problemas*. Moscú: M.I.R.

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 7-20). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates – NCTM.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En P. Neshier y J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge, GB: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. En T. Nunes y P. E. Bryant (Eds.) *Learning and Teaching Mathematics* (pp. 5-28). London: Psychology Press, Ltd.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. En A. J. Bishop et al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 99-137). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1997). Word Problems: A Vehicle for Promoting Authentic Mathematical Understanding and Problem Solving in the Primary School? En T. Nunes y P. E. Bryant (Eds.) *Learning and Teaching Mathematics* (pp. 69-97). Londres: Psychology Press, Ltd.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a Constructive Activity. En C. Janvier (Ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 3-17). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Von Wright, G. H. (1987). *Explicación y comprensión*. Madrid: Alianza Universidad.

Webb, N. L. (1992). Assessment of student's knowledge of mathematics: steps toward a theory. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 661-683). New York: MacMillan Publishing Company.

White, R. y Gunstone, R. (1992). *Probing Understanding*. London, GB: The Falmer Press.

Whitin, D. J. y Whitin, P. E. (1998). The "Write" Way to Mathematical Understanding. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 161-169). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas*. México: Crítica.

ANEXO I

CONSULTA A EXPERTOS

A.1.1 Introducción

El conocimiento de los especialistas del área de la Didáctica de la Matemática constituye una de las tres fuentes contempladas para desarrollar los análisis epistemológico y fenomenológico asociados a los conocimientos matemáticos en estudio (apartado 5.4.4, capítulo V). En este Anexo presentamos los detalles de la consulta a expertos realizada como parte del proceso dirigido a delimitar y ordenar el conjunto situacional vinculado al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

En los siguientes apartados se exponen, por este orden, el documento enviado para la discusión, las distintas respuestas recibidas de los expertos consultados y el análisis de la información recopilada. De este estudio se extraen las conclusiones expuestas en el apartado 6.3.3.3 del capítulo VI.

A.1.2 Documento para la discusión

El documento distribuido a cada uno de los expertos consta de tres páginas, en las que se expone:

- (a) Una breve descripción del propósito de la consulta.
- (b) El esquema clasificatorio de situaciones donde interviene el algoritmo estándar escrito para la multiplicación, sobre el cual se centra la discusión.
- (c) Tres cuestiones relacionadas con la adecuación de la clasificación situacional presentada. En concreto, se discute la exhaustividad de la tipología y el carácter excluyente de las categorías. Con la última cuestión, menos específica, se pretende recopilar también cualquier otra observación de interés para los consultados relacionada con los tipos de situaciones.

A continuación, se muestra por páginas el documento enviado a los expertos consultados:

PÁGINA 1

CONSULTA A EXPERTOS

Nombre y Apellidos: _____

Profesión/ocupación: _____

Estamos realizando una investigación sobre la comprensión del algoritmo estándar escrito de la multiplicación. El estudio teórico previo nos ha llevado a analizar las distintas situaciones y problemas en las que se utiliza, aparece o interviene dicho conocimiento matemático. Estas situaciones las hemos organizado por el tipo de utilización que se hace en ellas del algoritmo, obteniendo, de este modo, la clasificación que presentamos a continuación.

Con esta consulta pretendemos obtener más información sobre la clasificación propuesta con intención de mejorarla en su caso y disponer de algunos criterios sobre su validez. Para ello, enunciaremos al final algunas cuestiones de interés que nos gustaría que respondieras. Muchas gracias por tu colaboración.

Situaciones en las que interviene el algoritmo: un esquema clasificatorio

S1. Situaciones donde el algoritmo se utiliza de forma técnica, como instrumento de cálculo para resolver ejercicios de multiplicar (situación escolar descontextualizada). Por ejemplo:

<i>Calcular:</i>	$\begin{array}{r} 51 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 59 \\ \hline \end{array}$
------------------	---	--

S2. Situaciones donde el algoritmo se utiliza de forma técnica, como instrumento de cálculo para resolver situaciones escolares contextualizadas. El resolutor establece la relación entre una situación problema escolar contextualizada y el algoritmo estándar de la multiplicación como método de cálculo que permite su resolución. Por ejemplo:

“Hay 15 estantes de libros en la habitación de Juan. Juan puso 12 libros en cada estante ¿Cuántos libros puso Juan en su habitación?”

S3. Situaciones donde el algoritmo se utiliza de forma técnica, como instrumento de cálculo para resolver situaciones problema en un contexto no escolar. El resolutor establece la relación entre una situación problemática real no escolar y el algoritmo estándar escrito de la multiplicación como método de cálculo que permite su resolución. Es decir, resuelve la situación real con ayuda del algoritmo.

PÁGINA 2

S4. Situaciones donde el algoritmo se utiliza de forma analítica, esto es, donde el proceso algorítmico completo se divide en pasos procedimentales o componentes individuales, se considera y maneja estas componentes por separado y se establece relaciones entre ellas. Por ejemplo:

Encuentra las cifras que completan la multiplicación	$\begin{array}{r} 3 \\ \times 6 \\ \hline 28 \\ \hline 68 \end{array}$
--	--

S5. Situaciones que requieren, para su resolución, la identificación de los principios básicos en los que se fundamenta el algoritmo estándar de la multiplicación: Sistema de Numeración Posicional y Propiedad Distributiva. Por ejemplo:

Observa los siguientes procedimientos para calcular la 2ª Fila:

$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline \end{array}$	<p>→ 1ª Fila</p> <p>→ 2ª Fila</p> <p>→ 3ª Fila</p>	<p>(a) $2 \times 2 + 2 \times 2$</p> <p>(b) $2 \times 2 + 2 \times 20$</p> <p>(c) $20 \times 2 + 20 \times 2$</p> <p>(d) $20 \times 2 + 20 \times 20$</p>
--	--	---

Elige el que te parezca correcto y justifica tu elección.

S6. Situaciones que requieren la justificación verbal del funcionamiento y la estructura interna del algoritmo estándar del producto.

S7. Situaciones donde se aplican los principios fundamentales del algoritmo estándar de la multiplicación para resolver situaciones problemáticas en las que hay que demostrar o justificar regularidades y propiedades acerca del algoritmo.

“Observa el siguiente método para calcular cuadrados de números de dos cifras que terminan en 5:

$\begin{array}{r} 85 \\ \times 85 \\ \hline \end{array}$	→	$8 + 1 = 9 \quad \begin{array}{r l} 5 & \\ \times 8 & 5 \\ \hline 72 & 25 \end{array}$	→	7225
--	---	--	---	------

¿Podrías encontrar una justificación?”

PÁGINA 3

Cuestiones

1.- ¿Consideras que la clasificación anterior es exhaustiva? Es decir, ¿conoces alguna otra situación donde el algoritmo estándar escrito de la multiplicación se utilice de un modo distinto a los mencionados; alguna situación que no se incluya en ninguna de las categorías anteriores?

2.- ¿Consideras que las categorías son mutuamente excluyentes? Es decir, ¿conoces alguna situación donde intervenga el algoritmo estándar escrito de la multiplicación de algún modo tal que sea posible la inclusión de ésta en más de una categoría?

3.- ¿Se te ocurre alguna otra sugerencia, comentario o crítica respecto a la clasificación que hemos propuesto acerca de las situaciones en las que aparece o es útil el algoritmo estándar escrito de la multiplicación?

A.1.3 Respuestas recibidas

En este apartado se exponen las respuestas recibidas de los doce expertos¹ que tuvieron a bien participar en la consulta. Las distintas respuestas se presentan ordenadas por pregunta planteada o vienen dadas en términos genéricos, según el formato de la información textual recibida en cada caso:

-Experto 1

Pregunta 1 [P1]: “No.”

Pregunta 2 [P2]: “No.”

Pregunta 3 [P3]: “No.”

- Experto 2

[P1]: “No puedo añadir nada.”

[P2]: “S6 y S7 pueden estar unidas si se analiza un estudio de caso con un niño de primaria calculando.”

[P3]: “He pensado al principio en la “reproducción mental” que hacemos del algoritmo cuando no disponemos de lápiz y papel, pero podría incluirse en S1, S2 o S3.”

- Experto 3

[P1]: “Me pregunto si cabe en vuestra clasificación las tareas escolares que se plantean para aprender el algoritmo de la multiplicación, comenzando por multiplicaciones de una sola cifra (escritura vertical de la tabla de multiplicar), siguiendo con la multiplicación de una cifra por un número de dos cifras, primero sin llevarse y luego llevándose, etc. Sé que el algoritmo clásico de la multiplicación no deja operaciones resumidas sin expresar (como en la división con las restas, que en una etapa del aprendizaje del algoritmo se le pide que escriban, para después obviarla y realizarla junto con la multiplicación del cociente por el divisor), en el caso de la multiplicación se escribe la suma cuando se multiplica por más de una cifra, pero aún así hay una serie de tareas encaminadas a enseñar gradualmente el algoritmo. Buscaré entre las tareas que tuvieron mis hijos en la enseñanza primaria de la escuela suiza alguna tarea de este tipo, pero supongo que vosotros tendréis muchas de los textos españoles.”

[P2]: “Me pregunto si estas situaciones pueden interpretarse como S1 (es escolar descontextualizada, cuyo único fin es el ejercitar en el algoritmo), o como S4 (uso analítico del algoritmo), en cuyo caso os estoy respondiendo a la cuestión 2.”

[P3]: “Os sugiero que describáis con más precisión las situaciones, para lo que podría ser útil determinar algunas dimensiones que permitan colocar cada situación en relación a estas dimensiones. Sin haberlo pensado demasiado observo que las situaciones que presentáis tienen contextos de aparición diferentes. Así por ejemplo la S1 y S2 son situaciones escolares, en enseñanza obligatoria, en la que también se podrían situar S4 y S7; la S3 es una situación no escolar básica, y las situaciones restantes parecen más habituales en nuestras asignaturas de formación de profesores

¹ Para garantizar la privacidad de los expertos, tan sólo presentamos las observaciones y comentarios referidos al tema de la consulta, omitiendo cualquier otra información contenida en los correos electrónicos recibidos, en particular la cabecera MIME de los mismos.

desde la didáctica de la matemática, ya que tratan de resaltar la toma de conciencia sobre lo que se realiza. Otra dimensión que aparece pues es el grado de conciencia de lo que se hace, que iría de la S1 a la S6, aunque las S4, S5 y S6 no están necesariamente ordenadas de manera jerárquica, sino que obligan a diferentes destrezas interpretativas.”

- Experto 4

“Una primera impresión es que los problemas o situaciones en los que no se dice explícitamente que debe usarse el algoritmo no deberían ponerse. De hecho, entonces podría ni tan sólo usarse. Por ejemplo, aquí en CATALUNYA algunos grupos estamos introduciendo en las escuelas los métodos de rejilla en lugar del modelo tradicional.

Me falta “a simple vista” las situaciones en las que se compara el algoritmo usual con otros algoritmos o representaciones. Por ejemplo, si 22×11 sé que son 242, 22×22 son 484, y preguntar Qué se ve en este procedimiento que no se ve en el otro? Explica diferencias entre el método de rejilla y el tradicional. Estas preguntas no son tradicionales pero deberían formularse por su valor.

La representación en forma de rectángulos de un producto qué tiene de bueno? Entre las representaciones posibles hay la distributividad con uno de los factores, la doble distributividad... No habría que ver lo que dice Bernardo en su tesis?

No entiendo el trasfondo de la clasificación. De hecho, si el objetivo es la reflexión y trabajo con sentido numérico faltaría el trabajo de aproximación simple. No estaría bueno basarse en eso?

A partir de la situación 5 que se propone sobre la multiplicación, en mi libro (con L. Girando) de cálculo en la escuela, aparece un idea “más” que es la de reconocer lo que podemos ver a partir del algoritmo. Una vez escrito, cuánto sería 22×20 ? y 22×200 ? O escribe qué operaciones ves inmediatamente a partir de la escritura de la multiplicación? En este caso, el ejemplo 22×22 no es el mejor. Sobre lo que acabo de decir, encuentro que falta la idea de crear igualdades que puedes escribir en cualquier algoritmo.

Las situaciones de tipo 7 son interesantes pero creo que hay más.

¿No habría que relacionar esquema multiplicativo con división? O vamos de nuevo a relegar un contenido a “él mismo” sin relacionarlo con otros.”

- Experto 5

[P1]: “Respuesta: La clasificación anterior no es ni puede ser exhaustiva.

Razón: El algoritmo de la multiplicación es un procedimiento de cálculo y, por tanto, es un instrumento o una herramienta. Como toda herramienta las situaciones en las que se emplea sólo están limitadas por la capacidad de imaginación humana. Por ejemplo, a mí se me puede ocurrir emplear el algoritmo en las siguientes situaciones que no encajo en las anteriores.

Otras situaciones que se me ocurren sobre la marcha en las que puedo hacer intervenir al algoritmo:

- Realización de cálculos largos con calculadora.
- Modelización del algoritmo empleando modelos manipulativos u otro tipo de modelos.
- Comprobar propiedades como la del cuadrado de un binomio.
- Explorar patrones con cuadrados de números.
- Distraerme cuando estoy aburrido ensayando variantes del algoritmo.

- Etc.”

[P2]: “Respuesta: De la lista de situaciones dadas la S2 y la S3 no son distintas con respecto al algoritmo de la multiplicación. El papel que desempeña el algoritmo es el mismo en ambas. Además, como aclaración a cómo están redactados estos dos apartados, debo advertir que el resolutor cuando resuelve un problema no establece la relación entre la situación problema y el algoritmo, sino entre la situación problema y el concepto de multiplicación. El cálculo se podrá realizar con el algoritmo estándar escrito, con un ábaco, con una calculadora, o con cualquier otro instrumento de cálculo.”

[P3]: “Respuesta: Los autores de la clasificación anterior han adoptado unos criterios para seleccionar las situaciones anteriores que no están explicitados. Ello conlleva que se puedan añadir nuevas categorías.”

- Experto 6

[P1]: “PUNTO 1

Algunas situaciones de uso del algoritmo de la multiplicación:

a) Situaciones en las que, por carecer de lápiz y papel y de calculadora, se reproduce mentalmente el algoritmo. Estas situaciones están limitadas por el tamaño de los factores.

b) Uso parcial del algoritmo. El algoritmo se aplica con algunos dígitos de los factores y se completa después. Por ejemplo, si alguno de los factores termina en uno o más ceros, si los factores son excesivamente grandes y hay que realizar productos parciales,...

c) Situaciones de comprobación. El algoritmo se utiliza para comprobar la veracidad del resultado de otro algoritmo (por ejemplo en la división o en la raíz cuadrada), o bien para verificar una solución encontrada (en la situación S4 una vez alcanzados los posibles valores hay que realizar el producto para certificar la bondad de la solución).

e) Hay situaciones, como por ejemplo “encontrar los valores de las letras para que se verifique $C U A T R O \times 5 = V E I N T E$ ”. Son situaciones que combinan propiedades de la multiplicación con el estudio de posibilidades.

f) Si se contempla el uso del algoritmo para expresiones decimales, hay una situación en la que uno o los dos factores son periódicos en los que el algoritmo se va readaptando a nuevos factores en busca del período del resultado. Es una situación en la que los factores no son estáticos, sino que tienen un número variable de cifras decimales; el algoritmo se mantiene con algunas cifras y se van modificando otras.”

[P2]: “PUNTO 2

Las categorías no me parecen excluyentes. La S1 está incluida en la S2, S3 y S4. Entiendo que en situaciones problemáticas el resolutor decide que hay que utilizar el producto de dos números, y en ese momento pone en funcionamiento el algoritmo de cálculo descontextualizado; una vez obtenido el resultado ya lo contextualizará en el ámbito del problema.”

[P3]: “PUNTO 3

La situación S5, en mi opinión, no requiere la utilización del algoritmo, simplemente indaga sobre algunos aspectos de su funcionamiento. En este sentido también cabría preguntar, por ejemplo, ¿por qué se empieza por la derecha? y en este caso queda claro que no se hace uso del algoritmo.

Las situaciones S5, S6 y S7 tienen límites difusos. No aprecio distinciones tan evidentes como para hacer categorías diferentes. Me parece que abordan distintos aspectos parciales del algoritmo.

ALGUNAS OTRAS CONSIDERACIONES

La clasificación no se especifica si tiene en cuenta los conocimientos de los usuarios. Así, la situación S7 puede abordarse sin aplicar el algoritmo de la multiplicación, bastan ideas sobre el sistema de numeración y sobre el cuadrado de un binomio: $(80+5)^2 = 6400 + 800 + 25 = 7200 + 25 = (8 \times 9) \times 100 + 25$

Me parece que hay una distinción muy perceptible entre las situaciones S1 a S4 y las otras situaciones S5 a S7. Las primeras hacen uso del algoritmo completo, mientras que las segundas hacen usos parciales.

Se me ocurren dos situaciones que no sé cómo encajarlas en la clasificación:

I. El producto de dos números consecutivos es 23.256. Encuéntralos.

Puede resolverse por técnicas de ensayo y error utilizando el algoritmo; pero puede resolverse haciendo la raíz cuadrada del número y ajustando el resultado; y también puede hacerse planteando una ecuación.

Si se utiliza el algoritmo hay que hacerlo aplicando aspectos parciales del mismo (si el producto termina en 6 uno de los factores debe acabar en 2 y el otro en 3), hacer estimaciones (para que salgan 5 cifras en el resultado deben tener 3 cada uno de los factores, pero no pueden ser mayores de 400 porque su producto tendría 6 cifras), y evaluar el tamaño del resultado para modificar el de los factores ($232 \times 233 = 54056$, los factores tienen que ser menores).

II. Encuentra reglas que permitan conocer el resultado de multiplicar cualquier número por 9; ídem al multiplicar por 99; ídem al multiplicar por 999,...

Se puede utilizar el algoritmo de la multiplicación, de forma sistemática, para encontrar regularidades; pero también se puede resolver aplicando la propiedad distributiva (multiplicar un número por 10 y restarle dicho número); o abordarse desde el álgebra.

Si se usa el algoritmo de la multiplicación simplemente hay que hacer productos sobre números consecutivos y buscar regularidades en el resultado: $1 \times 99 = 99$, $2 \times 99 = 198$, $3 \times 99 = 297$,...

No sabría en cuál de las categorías señaladas habría que incluir el uso del algoritmo. Sí que me parece claro que, en estas situaciones, el uso del algoritmo no es el único camino; y que el algoritmo tiene distintos usos según la finalidad del problema.”

- Experto 7

“Respuesta: Situaciones donde interviene el algoritmo no contempladas son: En álgebra elemental al multiplicar polinomios.

Comentarios. En mi opinión el algoritmo sólo interviene en las situaciones en las que hay que multiplicar números. Ahora bien, se puede distinguir entre casos, a saber: números determinados y enteros con al menos uno de ellos de más de una cifra (24×36), números determinados no enteros de la forma ($24,5 \times 36,7$), números complejos $(a+bi)(c+di)$ y números indeterminados expresados en forma polinómica $(ax+b)(cx+d)$. Otra cosa diferente son los contextos en los que se utiliza o aparece el algoritmo y en ese caso se puede hablar de contextos escolares y no escolares como los señalados.”

- Experto 8

[P1]: “No es exhaustiva; hay situaciones que creo no están contempladas (comento sólo las que recuerdo haber visto en algún libro o artículo):

a) Uso del algoritmo con otros sistemas de numeración posicionales; son situaciones diferentes, en cuanto a la comprensión, pues se producen algunas variaciones en las reglas: tipo de dígitos y cantidades que se llevan. Incluso recuerdo haber visto el algoritmo aplicado a la numeración romana.

b) Uso del algoritmo para justificar otros algoritmos: por ejemplo, justificar el algoritmo de “la copa” o el algoritmo de “la celosía” en base al algoritmo estándar; esto lo hago yo en mis clases.

c) Uso del algoritmo como algoritmo de cálculo mental.

d) Uso del proceso general del algoritmo para elaborar un programa informático que presente el proceso en pantalla; requiere un análisis general del algoritmo que contemple todas las posibilidades; este uso, quizás podría ubicarse en la categoría S6.

e) Uso del algoritmo para plantear problemas de carácter algebraico o prealgebraico: recuerdo uno parecido a lo siguiente:

AMOR
X AMOR

MATRIMONIO (algo parecido a esto)”

[P2]: “Creo que están bien definidas y son excluyentes, salvo lo que se dice en la pregunta siguiente.”

[P3]: “Si el objetivo de la investigación está definido y según parece es “la comprensión del algoritmo estándar escrito de la multiplicación” no hay razón para diferenciar entre la categoría S2 y S3; aún siendo situaciones distintas no lo son en cuanto a la comprensión del algoritmo.”

- Experto 9**[Notas previas]:**

(S1)

“* Se pide que el algoritmo se aplique directamente.

* Números naturales de una, dos, tres o más cifras.”

(S2)

“* Se espera que el problema sea resuelto aplicando el algoritmo de la multiplicación.

* Este problema puede resolverse por sumas reiteradas, o también sumando a 120, 60, por otra parte es un problema bastante descontextualizado, normalmente no se colocan los libros en los estantes contándolos y por otra parte parece que la pregunta debería ser ¿Cuántos libros puso Juan en los estantes?”

(S3)

“* Falta un ejemplo. Supongo que lo que se quiere decir es que en una situación se obtiene (o puede obtenerse) una solución numérica aplicando el algoritmo de la multiplicación.”

(S4)

“* Reconstrucción del algoritmo efectuado, utilizando procedimientos inversos –por lo menos en parte – al aplicar directamente el algoritmo.

No me parece una aplicación analítica del algoritmo o no más que la aplicación directa del algoritmo.

******Aquí hay un cambio de registro de las preguntas.*

Parece que ahora interesa no la aplicación correcta o no del algoritmo, sino las propiedades de la operación implícitas en la elaboración del algoritmo. Convendría especificar de las que intervienen cuáles son las que se investigan.”

(S5)

“ ¿Por qué cuatro dosis? Si se pide la 2ª fila podrían darse los demás números? Me parece que el enunciado queda difícil o poco claro sin que parezca necesario.”*

(S6)

“ ¿Qué se quiere decir con “justificación verbal del funcionamiento”? ¿Qué al hacer el algoritmo ya no escribimos el cero en el sitio que siempre “hay” un cero?*

Por estructura interna entiendo la identificación de las propiedades de la multiplicación de números naturales.”

(S7)

“ En realidad para descubrir este nuevo algoritmo no hace falta hacer referencia al algoritmo de la multiplicación pero sí que hay que aplicar diferentes propiedades de la multiplicación como la distributiva – mejor se trata de sacar factor común más difícil de ver, en general que la aplicación directa de la distributividad -, pero también la conmutativa y la asociativa.”*

[P1]: *“Creo que no.*

En principio para hablar de una clasificación exhaustiva de lo que podríamos llamar problemas de multiplicación necesitaríamos saber las edades de los alumnos a los que nos estamos refiriendo.

Falta incluir una categoría de problemas en que se va introduciendo el algoritmo, si estamos hablando de alumnos de primaria.

Así como problemas en que se deba hacer una traducción de un gráfico rectangular, un árbol, a una expresión multiplicativa.(¿ O se consideran incluidos en S2?)

Problemas que relacionen números con geometría: cambios de unidades, cambios de escala, cálculo de área o de volumen.

Descomposición de números en factores.

Resolución de compensaciones multiplicativas:

$$25 \cdot x = 50 \cdot 3$$

Problemas en que la multiplicación de dos números naturales se combina con otras operaciones....”

[P2]: *“Lo primero que hay que tener en cuenta es que unas preguntas hacen referencia a la corrección en la utilización del algoritmo y otras a la comprensión de las propiedades de la operación que se ponen en acto en el algoritmo.*

En los problemas anteriores parece que la categoría S1 está incluida en los demás – casi todos -

También S5 es un caso particular de S6.”

[P3]: *“Lo más importante es diferenciar las preguntas en que se quiere averiguar algo sobre la aplicación del algoritmo y cuando es necesario conocer y especificar las propiedades de la multiplicación y de nuestro sistema de numeración.*

Sugiero redactar una lista de situaciones o problemas, especificando qué se espera del alumno en cada caso. O mejor qué respuestas diferentes puede dar un alumno.

Quizás iría bien estructurar la lista en forma de diagrama en árbol lo que tiene la ventaja de que permite situar cada entrada en el nivel de la clasificación que le corresponde y estudiar alguna de las ramas con más detalle sin que comprometa otras partes del estudio.”

- **Experto 10**

[P1]: “Una situación que se echa en falta es aquella en la que el algoritmo de la multiplicación se emplea como herramienta o útil en el desarrollo de otras operaciones —división, potenciación, radicación...—

Otra situación que no aparece y la considero fundamental, es la que se denomina situación-problema en la literatura francesa, ya que cumple la característica de no aparecer en ella, de modo explícito, el algoritmo de la multiplicación y, sin embargo, es necesario emplearlo para resolver dicha situación —por ejemplo en una suma reiterada con un número muy elevado de sumandos—

Incluso en otros algoritmos sobre la multiplicación —el método del enrejado, por ejemplo—, es necesario como útil el algoritmo estándar.”

[P2]: “Tal y como se plantea esta cuestión, creo que la situación 6 puede incluirse tanto en la situación 5 como en la 7, puesto que en ambos casos ha de justificarse el algoritmo estándar de la multiplicación. Ahora bien, otra cosa es que la justificación puede hacerse, o bien de modo verbal —sistema de representación semiótica verbal, basada en el lenguaje natural—, o bien de modo analítico con lenguaje formal matemático. Así, la cuestión 7 podría contestarse de una forma u otra, sin alterar su esencia. En la cuestión 5 se efectúa un discurso semiótico analítico, pero la justificación que se pide puede hacerse con un sistema u otro, o ambos.”

[P3]: “Yo lo interpreto de la forma siguiente:

En las situaciones 1 y 4 se utiliza el algoritmo de la multiplicación como objeto de conocimiento en sí mismo, ya que lo que se pretende es evaluar si se domina, o no, el algoritmo. Lo que distinguiría a una de otra es el carácter analítico, la 4, o no analítico, la 1.

Las situaciones 2 y 3 corresponden, en cambio, al uso del algoritmo de la multiplicación como útil, al modelizar matemáticamente situaciones. Lo que distingue a ambas es que una, la 2, se presenta en un contexto escolar y la otra, la 3, en un contexto no escolar. Hay que pensar en lo deslizante de esos términos: escolar o no, porque ¿corresponde la situación 2 a un contexto necesariamente escolar?, ¿no se le puede presentar a Juan en su casa? A lo mejor las situaciones escolares habría que comenzarlas por algo así como: “Supongamos...”

Algo que creo queda en el aire es el uso del algoritmo en situaciones geométricas, de medida, de combinatoria ... ¿son escolares o no?”

- **Experto 11**

[P1]: “No. Me hubiera gustado encontrar alguna indicación sobre las tablas de multiplicar y sobre las sumas reiteradas.”

[P2]: “No. Lo procedimental es algo incómodo para establecer clasificaciones o categorizaciones. Puedo resolver S4 al estilo de S5:

$(10x + 3) \times 6 = 208 + 10y \dots 6x - y = 19. (\dots) x = 4$ e $y = 5$, dado que $(1 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9)$, etc. (No necesito saber ecuaciones diofánticas para hallar la o las soluciones de $6x - y = 19$, ya que el conjunto de posibles soluciones es muy reducido y puede obtenerse por ensayo y error).

Por otra parte, no soy capaz de decidir si en S6 se incluye el cálculo aproximado (estándar escrito). Por ejemplo: 198×159 . Un poco menos de $200 \times 160 = 32000$. (200×160 se supone que lo hago con papel y lápiz).”

[P3]: “No. Quisiera hacer un comentario sobre lo que se entiende por “algoritmo estándar escrito de la multiplicación”. Incluso si con la palabra “estándar” se quiere

dar a entender “lo que me enseñaron”, hay un problema: que no es un algoritmo mientras no se tengan “a la vista” las tablas de multiplicar de los números que aparecen en el multiplicando y el multiplicador. Dicho de otro modo: la obligación de “memorizar” las tablas no forma parte del algoritmo y le quita ese carácter algorítmico. Pienso, por ejemplo, en la multiplicación de “FAB” por “349” en base dieciséis. Sobreentendemos que la base es diez e imponemos la memorización de las tablas, pero esta memorización (a) no forma parte del algoritmo y (b) lo destruye o se apoya en la creencia (innecesaria) de que no habrá fallos en la memoria.

En “calcular 51×2 ” (vuestro primer ejemplo de S1), la primera etapa del algoritmo debería consistir en “extraer, de la tabla del 2, los productos 2×1 y 2×5 ”.

- **Experto 12**

[P1]: “Creo que es bastante amplia aunque pueden haber otras situaciones que no sé si entrarían en el nivel de trabajo en el que ustedes han situado la investigación. Por ejemplo:

Situaciones en la que es necesario modificar el algoritmo propuesto a efectos de economizar el cálculo, por ejemplo, son situaciones que irían desde:

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 \times 168 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 168 \\
 \times 25 \\
 \hline
 \end{array}$$

Hasta situaciones del tipo

$$\begin{array}{r}
 246 \\
 \times 1,2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 246 \\
 \times 10 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 246 \\
 \times 12 \\
 \hline
 \end{array}$$

 :10

[P2]: “Todas las categorías que proponen son diferenciables, tal vez el punto de partida podría ser diferenciar inicialmente los aspectos conceptuales y los procedimentales, y sus intersecciones, en el algoritmo estándar.”

[P3]: “Insistiendo en la idea anterior, en la clasificación que proponen parecería necesario distinguir las situaciones relativas a las cuestiones de comprensión conceptual del algoritmo de la de procedimientos estrictamente de cálculo. Y en estos tipos de situaciones precisar los fenómenos. Por ejemplo, en la situación 2, las situaciones escolares a resolver con el algoritmo de multiplicar son múltiples, o en el caso de la situación 5, ocurre igualmente, el ejemplo que ustedes proponen se refiere a la descomposición del valor posicional de las cifras de los factores, también podríamos haber descompuesto sólo el primer factor o el segundo. O haber recurrido únicamente al orden de unidades, procedimientos todos ellos que fundamentan el algoritmo estándar.”

A.1.4 Análisis de la información recopilada

Las distintas observaciones y comentarios proporcionados por los expertos son analizados en este apartado con el propósito fundamental de ajustar y completar las categorías y situaciones presentadas inicialmente. A través del diálogo indirecto establecido con los expertos se procura subrayar las sugerencias y recomendaciones de interés, así como las dudas y ambigüedades detectadas, sobre todo terminológicas, contrastar e interpretar las situaciones sugeridas con las categorías ya reconocidas, considerar e integrar nuevos tipos de situaciones e identificar todos aquellos otros aspectos que aporten soluciones al problema de la determinación, ordenación y

selección de situaciones vinculadas al algoritmo estándar escrito del producto. El análisis de respuestas se desarrolla siguiendo el orden asignado a los expertos en el apartado A.1.3:

-Experto 1:

No realiza ninguna aportación destacable.

-Experto 2:

Hablamos del uso del algoritmo estándar escrito (representación externa) y no de su representación mental interna. En cualquier caso, incluiríamos la reproducción mental dentro de S1, o mejor dicho, en la categoría de uso técnico del algoritmo. La entrevista podría ser un medio adecuado para determinar con ciertas garantías si realmente el sujeto realiza el cálculo mental con el algoritmo o empleando otra estrategia.

-Experto 3:

Se sugiere la necesidad de revisar libros de texto y de considerar las tareas que intervienen en las secuencias de enseñanza del algoritmo: “...*Hay una serie de tareas encaminadas a enseñar gradualmente el algoritmo*”; “*supongo que vosotros tendréis muchas [tareas] de los textos españoles*”. Esta sugerencia nos hace pensar en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983).

En este orden de reflexión, se duda entre S1 y S4 a la hora de posicionar las tareas que se plantean en la escuela para aprender el algoritmo: “*Me pregunto si estas situaciones pueden interpretarse como S1 (es escolar descontextualizada, cuyo único fin es el ejercitar en el algoritmo), o como S4 (uso analítico del algoritmo)*”.

Por otra parte, se aconseja escribir con más precisión las situaciones, “*para lo que podría ser útil determinar algunas dimensiones que permitan colocar cada situación en relación a estas dimensiones*”. Señala a modo de ejemplo dos posibles dimensiones:

(a) Contexto de aparición de las situaciones:

- Situaciones escolares en enseñanza obligatoria: S1, S2, S4 y S7
- Situación no escolar básica: S3
- Situaciones propias en asignaturas de formación de profesores en didáctica de la matemática: S5 y S6

Esta dimensión podría entenderse como un análisis fenomenológico centrado en el medio.

(b) Grado de conciencia de lo que se hace: “*que iría de la S1 a la S6, aunque las S4, S5 y S6 no están necesariamente ordenadas de manera jerárquica, sino que obligan a diferentes destrezas interpretativas*”.

-Experto 4:

Los diversos comentarios que realiza no siguen el orden de las cuestiones planteadas, a pesar de lo cual podemos identificarlos y asociarlos con cada una de las preguntas.

Respecto a la primera cuestión, se afirma: “...*los problemas o situaciones en los que no se dice explícitamente que debe usarse el algoritmo no deberían ponerse*”. El experto reduce, por tanto, el campo de situaciones en las que aparece el algoritmo a aquellas en las que este método de cálculo se hace imprescindible. En parte tiene razón, ya que en nuestro trabajo hemos advertido la necesidad de proponer en las experiencias empíricas tareas que obliguen a los sujetos a emplear el algoritmo. Ahora bien, el análisis sería incompleto si nos restringiéramos únicamente a las situaciones problema donde se diga explícitamente que debe utilizarse el algoritmo. Asimismo, cabe

preguntarse por tales situaciones, de las que pensamos que sólo S1 cumple con los requisitos porque en las demás tareas no se afirma nada similar a: “utiliza el algoritmo estándar escrito de la multiplicación para...”.

Según este experto, una situación no contemplada es la de comparar el algoritmo estándar con otros algoritmos o representaciones (método de celosía,...). Situaciones del tipo: “... si 22×11 sé que son 242, 22×22 son 484. Y preguntar: ¿qué se ve en este procedimiento que no se ve en el otro? Explica diferencias entre el método de rejilla y el tradicional”.

Consideramos que todas estas situaciones entrarían dentro de S7, ya que exigen una toma de conciencia importante. En cualquier caso, para el tema de la comparación de algoritmos puede ser útil extraer algunas ideas de Morrow y Kenney (1998).

Otra situación no considerada: “...aparece una idea “más” que es la de reconocer lo que podemos ver a partir del algoritmo. Una vez escrito, cuánto sería 22×20 ? y 22×200 ? o escribe qué operaciones ves inmediatamente a partir de la escritura de la multiplicación?...Encuentro que falta la idea de crear igualdades que puedes escribir en cualquier algoritmo”. (Recomienda un libro suyo sobre cálculo en la escuela).

No llegamos a establecer con precisión la relación que puede existir entre el uso del algoritmo y este último tipo de tareas. Es más, no entendemos bien las tareas que sugiere. Habría que ir tarea por tarea analizando la utilización que en ella se hace del algoritmo al intentar resolverla. Una vez hecho este análisis, probablemente la tarea podría incluirse en alguna de las categorías que hemos establecido.

Comentarios como: “No entiendo el trasfondo de la clasificación. De hecho, si el objetivo es la reflexión y el trabajo con sentido numérico faltaría el trabajo de aproximación simple. No estaría bueno basarse en eso?”, o también, “¿No habría que relacionar esquema multiplicativo con división? o vamos de nuevo a relegar un contenido a “él mismo” sin relacionarlo con otros?”, denotan que el experto no ha entendido por completo lo que pretendemos con la consulta. El nuestro no es un trabajo sobre el sentido numérico ni sobre el concepto de multiplicación, no nos interesa la aproximación simple o la estimación en cálculo, tampoco relacionar la multiplicación con la división. Asimismo, consideramos que un conocimiento no puede aislarse para su estudio del resto de conocimientos con los que está relacionado de modo que no estamos relegando un contenido (en este caso, el algoritmo estándar escrito para multiplicar números naturales) a “él mismo” sin relacionarlo con otros. No obstante, debemos concretar unos límites y acotar el estudio; puestos a relacionar, podemos establecer conexiones entre el algoritmo del producto y otros contenidos que no nos interesan estudiar, por ejemplo la integral definida (situaciones de vinculación indirecta con el algoritmo).

-Experto 5:

Este experto considera que la clasificación no es ni puede ser exhaustiva: “El algoritmo de la multiplicación es un procedimiento de cálculo y, por tanto, es un instrumento o una herramienta. Como toda herramienta las situaciones en las que se emplea sólo están limitadas por la capacidad de imaginación humana”.

Estamos de acuerdo con esta afirmación; sin embargo, hemos de aclarar que aunque las situaciones sean infinitas no lo son los tipos de utilización del algoritmo que se hace en ellas (por ahora, intuimos tres facetas epistemológicas: técnica, analítica y formal). De hecho, las situaciones que propone el experto como ejemplo para evidenciar la no

exhaustividad de la clasificación, o bien se pueden incluir en alguna de las tres facetas mencionadas, o bien se deben descartar porque en ellas no interviene el algoritmo estándar de la multiplicación:

- Realización de cálculos largos con calculadora. Entendemos que se refiere a realizar con ayuda de la calculadora multiplicaciones con números grandes. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 253468372921048203827 \\ \times \quad 32897328729787212 \\ \hline \end{array}$$

Esta tarea la incluiríamos en la faceta de uso formal del algoritmo ya que requiere descomponer los factores (dominio del sistema de numeración posicional) y aplicar la propiedad distributiva.

- Modelización del algoritmo empleando modelos manipulativos u otro tipo de modelos. Son tareas de la esfera analítica o formal (dudamos). Habría que precisar más la tarea que propone el experto para decidir la faceta donde ubicarla.

- Comprobar propiedades como el cuadrado de un binomio. No entendemos qué quiere decir con esto, si se refiere a la demostración algebraica de la propiedad (dados $a, b \in \mathfrak{R}$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$) o a la comprobación en un caso particular (por ejemplo, $(15+3)^2 = 15^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 15$). En el primer caso, no vemos dónde interviene el algoritmo. En el segundo caso, el algoritmo se emplearía de forma técnica.

- Explorar patrones con cuadrados numéricos. De nuevo, habría que precisar más la tarea. Si ésta es por ejemplo:

Comprueba el siguiente patrón y determina su campo de validez:

$$\begin{array}{l} 11^2 = 121 \\ 111^2 = 12321 \\ 1111^2 = 1234321 \\ 11111^2 = 123454321 \end{array}$$

(adaptado de Gómez (1988))

La incluiríamos en la faceta técnica de empleo porque, de utilizar el algoritmo, sería para calcular las multiplicaciones 11×11 , 111×111 , ..., simples ejercicios de multiplicar.

- Distraerme cuando estoy aburrido ensayando variantes del algoritmo. Estas tareas corresponderían a la faceta formal de uso del algoritmo.

En otro orden de reflexión, este experto no considera distintas las situaciones S2 y S3 con respecto al algoritmo de la multiplicación. Tiene razón en parte: si bien S2 y S3 pertenecen a la faceta técnica del algoritmo, consideramos que el grado de conciencia que debe tener el sujeto del algoritmo como método de cálculo que permite la resolución difiere en ambas situaciones.

El papel que desempeña el algoritmo en S2 y S3 es el mismo siempre que consideremos las situaciones con independencia del sujeto que las resuelve. En el momento en que hacemos intervenir al individuo la situación cambia. Consideramos que la comprensión del algoritmo que manifiesta el sujeto al resolver S2 sería distinta de la que muestra al resolver S3.

No hay que olvidar tampoco la diferencia que establecen autores como Verschaffel y De Corte (1996, 1997) entre problema estándar o rutinario (por ejemplo, un PAEV de estructura multiplicativa) y el problema no rutinario o no estándar, donde se tiene en cuenta seriamente la realidad del contexto evocado por el enunciado. Los problemas escolares y las situaciones problema de la vida real son diferentes.

Por otra parte, conviene hacer una aclaración respecto a la siguiente afirmación del experto: “...debo advertir que el resolutor cuando resuelve un problema no establece la relación entre la situación problema y el algoritmo, sino entre la situación problema y el concepto de multiplicación”. En realidad, se establecen dos relaciones:

- 1) Entre la situación problema y el concepto de multiplicación.
- 2) Entre el concepto de multiplicación y el algoritmo estándar escrito del producto como método de cálculo.

Precisamente, debido a que sólo nos interesa analizar la segunda relación, convendrá utilizar en los estudios empíricos, en principio, PAEV de los más simples atendiendo a la clasificación semántica existente para estos problemas (por ejemplo, de isomorfismo de medida).

Respecto a la observación: “*Los criterios para seleccionar las situaciones anteriores no están explicitados. Ello conlleva que se puedan añadir nuevas categorías*”. Nos parece que el criterio es claro: el tipo de utilización que se hace en ellas del algoritmo. No obstante, es posible que no sea el único.

Creemos que ha habido una confusión entre, por un lado, las situaciones y los contextos donde interviene el algoritmo (que podrían ser infinitos), y por otro, el modo de emplearlo en esas situaciones (que dan lugar a las facetas, dimensiones o categorías).

-Experto 6:

Surgen dudas sobre la información presentada, principalmente acerca de los términos situación, uso y algoritmo de la multiplicación.

Asimismo, se enumeran algunas situaciones de uso del algoritmo:

(a) Reproducción mental del algoritmo. Ya la hemos comentado al analizar las respuestas del experto 2.

(b) Uso parcial del algoritmo. “*El algoritmo se aplica con algunos dígitos de los factores y se completa después. Por ejemplo, si alguno de los factores termina en uno o más ceros, si los factores son excesivamente grandes y hay que realizar productos parciales...*”. Habría que precisar más la situación problema para decidir de qué tipo es. El 1^{er} ejemplo se trata de una propiedad o regularidad (multiplicar por la unidad seguida de ceros $100\dots0 \times 2 = 200\dots0$) que puede detectarse realizando algunos ejercicios de multiplicar. En principio, consideraríamos estas actividades como propias del uso técnico del algoritmo aunque autores como Freudenthal (1983) ni tan siquiera consideran estas actividades como de empleo del algoritmo. Para este autor en concreto las primeras multiplicaciones en columnas son las de tamaño 2×1 : $24 \cdot 2$ ó $24 \cdot 8$ (p. 127).

En cambio, el 2º ejemplo, mencionado también por el experto 5, lo incluiríamos en la faceta de uso analítico o formal, si bien se requiere mayor precisión en el enunciado de la tarea.

(c) *Situaciones de comprobación*. En principio son características de un empleo técnico del algoritmo. El contexto sería escolar y diferente por ejemplo del de un PAEV. De nuevo conviene distinguir los contextos y situaciones del tipo de uso del algoritmo.

(d) “Encontrar los valores de las letras para que se verifique CUATRO x 5 = VEINTE”. Esta situación no la habíamos contemplado aunque a priori puede entenderse como de uso analítico del algoritmo.

Respecto a la propuesta (e) hemos de decir que no contemplamos el algoritmo para expresiones decimales, sólo para números naturales.

En otro orden de cosas, las últimas consideraciones expuestas en torno a dos situaciones que supuestamente no encajan en la clasificación resultan relevantes para nuestro estudio. Así, aparecen situaciones que dependiendo de cómo las resuelva el sujeto podrán situarse en una u otra categoría e incluso considerarse situaciones ajenas a la fenomenología del algoritmo. Este hecho, nos hace plantearnos la posibilidad de considerar desde una perspectiva fenomenológica, un tipo de situaciones ‘no exclusivas’ o de ‘estrategia múltiple’, donde el algoritmo ‘compite’ con otros conocimientos en la resolución de la tarea, siendo el sujeto el que decide los distintos usos en cada caso.

Por otra parte, de la consideración hecha por el experto acerca de que las categorías no son excluyentes extraemos la consecuencia de que en una MCCD es posible la utilización técnica y analítica del algoritmo. Esto es, deberíamos reconocer el hecho de que existen situaciones que podrían incluirse en varias categorías, constituyéndose entonces como situaciones ‘frontera’ o ‘periféricas’.

De otro lado, el experto no ha logrado entender el sentido dado al término ‘utilización’. Nos parece que interpreta el uso del algoritmo sólo en el sentido técnico, mecánico o utilitario: *“La situación S5, en mi opinión, no requiere la utilización del algoritmo, simplemente indaga sobre algunos aspectos de su funcionamiento. En este sentido también cabría preguntar, por ejemplo, ¿por qué se empieza por la derecha? Y en este caso queda claro que no se hace uso del algoritmo.”* En este caso particular, sí se hace uso del algoritmo, sólo que un uso más bien formal, diferente al técnico o al analítico. En S7 también consideramos que se emplea el algoritmo de un modo formal.

Además, el experto distingue entre situaciones donde se hace un uso completo del algoritmo (S1 a S4) y un uso parcial de éste (S5 a S7). Debemos destacar que ésta es otra dimensión distinta a la propuesta por el experto 3.

En realidad, indirectamente se está apoyando la categoría de uso formal del algoritmo al considerar difuso el límite entre S5, S6 y S7: *“No aprecio distinciones tan evidentes como para hacer categorías diferentes. Me parece que abordan distintos aspectos del algoritmo”*. En efecto, S5, S6 y S7 pertenecen a la misma categoría (la formal); y en este sentido hay que verlas como diferentes tareas que nos permiten extraer información acerca del empleo formal del algoritmo en los sujetos.

-Experto 7:

Para este experto, multiplicar polinomios en álgebra elemental es una situación donde interviene el algoritmo que no se ha contemplado. Esto es cierto, por lo que hay que aclarar que sólo nos interesa el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Por tanto, quedan excluidas en nuestro estudio las multiplicaciones

con números decimales (25,4 x 36,7), con números complejos ((3+5i) x (2+i)) y con números indeterminados expresados en forma polinómica: (aX+b)(cX+d).

La idea que se desprende de la afirmación: “*En mi opinión el algoritmo sólo interviene en las situaciones en las que hay que multiplicar números*”, coincide en parte con la del experto 4 y además pensamos que el término ‘utilización’ lo identifica, al igual que el experto 6, con la utilización mecánica o técnica, considerando sólo el aspecto utilitario del algoritmo.

Por otra parte, este experto está diferenciando entre situación y contexto:

- Una misma situación: multiplicar números.
- Contextos en los que se emplea o aparece el algoritmo: “*...en ese caso se puede hablar de contextos escolares y no escolares como los señalados*”

En nuestro caso hablamos de tipos de utilización por un lado y de situaciones y contextos por otro. Parece ser que este experto identifica los tipos de utilización (único, según él) con la situación, siendo los contextos otro aspecto diferente. En este sentido, será necesario aclarar el significado que le demos en el estudio a las expresiones categorías de empleo del algoritmo, situación, contexto o indicador de comprensión, entre otras.

-Experto 8:

La mayoría de la información que aporta este experto viene recogida en las respuestas proporcionadas por los expertos anteriores. Aún así, interesa analizarla:

Considera que la clasificación no es exhaustiva: “[...] *hay situaciones que creo no están contempladas (comento sólo las que recuerdo haber visto en algún libro o artículo:*”

(a) Uso del algoritmo con otros sistemas de numeración posicionales.

Estas situaciones las incluiríamos en la faceta de utilización formal. Para resolver el producto:

$$\begin{array}{r} 52_{(6)} \\ \times 3_{(6)} \\ \hline 240_{(6)} \end{array}$$

hay que conocer los principios en los que se fundamenta el algoritmo (sistema de numeración posicional y propiedad distributiva).

$$\begin{array}{r} 52_{(6)} \\ \times 3_{(6)} \\ \hline 240_{(6)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 5 \cdot 6 + 2 \\ \times 3 \\ \hline 230_{(6)} + 10_{(6)} \end{array} = 240_{(6)}$$

No obstante, hemos de recordar que nuestro estudio se restringe al algoritmo estándar escrito para multiplicar números naturales (base 10).

(b) Uso del algoritmo para justificar otros algoritmos.

Otros expertos también han señalado las tareas de comparación de algoritmos (por ejemplo, comparar el algoritmo estándar con el de rejilla o celosía). Estas situaciones requieren una toma de conciencia importante sobre el funcionamiento y estructura interna del algoritmo; por tanto, las incluimos dentro de la faceta de uso formal del algoritmo, en S6 o S7.

(c) Uso del algoritmo como algoritmo de cálculo mental.

Los expertos 2 y 6 también destacan este uso del algoritmo. Todos los comentarios realizados entonces se pueden trasladar aquí.

(d) Uso del proceso general del algoritmo para elaborar un programa informático. Esta tarea correspondería a la categoría de uso formal del algoritmo.

(e) Uso del algoritmo para plantear problemas de carácter algebraico o pre-algebraico: AMOR x AMOR = MATRIMONIO.

Ya hemos comentado esta situación al analizar las sugerencias del experto 6: puede ubicarse en la categoría de uso formal (al menos, a priori).

S2 y S3 se consideran idénticas en cuanto a la comprensión del algoritmo, aunque para el autor son situaciones distintas (no especifica las diferencias): “*Si el objetivo de la investigación está definido y según parece es “la comprensión del algoritmo estándar escrito de la multiplicación” no hay razón para diferenciar entre la categoría S2 y S3; aún siendo situaciones distintas no lo son en cuanto a la comprensión del algoritmo*”.

Esta opinión viene a reforzar la diferencia entre categoría y situación. S2 y S3 pertenecen a la misma categoría (técnica) pero son situaciones diferentes.

- Experto 9:

De entrada, este experto diferencia entre la aplicación del algoritmo y la comprensión de las propiedades en las que se fundamenta. Comienza con la siguiente anotación: “*Investigación sobre la aplicación del algoritmo de la multiplicación y la comprensión de las propiedades de la multiplicación que permiten generar este algoritmo*”.

Además de responder a las tres cuestiones, previamente hace algunos comentarios para cada situación Si:

- En S2 critica el enunciado del PAEV que ponemos como ejemplo. Hemos de decir que este problema está copiado textualmente de Puig y Cerdán (1988) (p. 130). Sólo hemos cambiado las cifras.

- El experto no entiende lo que hemos definido como utilización analítica del algoritmo (S4), al menos para el caso de la MCCD:

“*Reconstrucción del algoritmo efectuado, utilizando procedimientos inversos – por lo menos en parte – al aplicar directamente el algoritmo.*

No me parece una aplicación analítica del algoritmo o no más que la aplicación directa del algoritmo”.

Debería haber aclarado lo que él entiende por aplicación analítica del algoritmo. Pareciera como si lo analítico lo identificara con lo formal.

- En el paso de S4 a S5 identifica un cambio de registro en las preguntas. De nuevo menciona la diferencia entre aplicación del algoritmo y el conocimiento de las propiedades de la operación implícitas en la elaboración del mismo. Hemos de añadir que no sólo intervienen propiedades de la operación (distributiva, conmutativa y asociativa) sino también el dominio del sistema de numeración posicional.

La siguiente sugerencia es interesante: “*Convendría especificar de las [propiedades] que intervienen cuales son las que se investigan*”. Hasta ahora no habíamos pensado en ello; dábamos por supuesto que las abordaríamos todas o al menos las dos que siempre hemos tenido en mente: sistema de numeración posicional y propiedad distributiva.

- En la situación S5, el experto entiende que el enunciado del ejemplo queda difícil o poco claro, aunque no justifica su opinión. De todos modos, habrá que tener en cuenta la observación.

- Vuelve a mencionar una y otra vez la importancia de las propiedades de la multiplicación para resolver las situaciones S5, S6 y S7 (categoría de uso formal). Tanto

las subraya que olvida mencionar el importante papel que desempeña el sistema de numeración posicional en la constitución del algoritmo.

No considera que la clasificación sea exhaustiva: “[...] para hablar de una clasificación exhaustiva de lo que podríamos llamar problemas de multiplicación necesitaríamos saber las edades de los alumnos a los que nos estamos refiriendo”.

Está claro que las edades de los alumnos puede ser un criterio para reducir el campo de situaciones en las que aparece el algoritmo. Sin embargo, hemos prescindido de él en el análisis fenómeno-epistemológico previo que estamos llevando a cabo. Estamos de acuerdo en que habrá que tener en cuenta la edad de los alumnos a la hora de diseñar los instrumentos de recogida de datos, que sin duda contendrán situaciones que requieran del uso del algoritmo.

Por otra parte, echa en falta algunas situaciones mencionadas también por otros expertos:

(a) Problemas en los que se va introduciendo el algoritmo en Primaria (fenomenología didáctica de Freudentahl (1983)). Categoría de uso técnico; S1.

(b) Problemas de traducción de un gráfico rectangular, un árbol a una expresión multiplicativa. Categoría técnica; S2.

(c) Problemas que relacionen números con geometría: cambios de unidades, cambios de escala, cálculo de área o de volumen. Habría que precisar más la situación concreta. En principio, categoría técnica; S2.

(d) Descomposición de números en factores; resolución de compensaciones multiplicativas: $25 \times \quad = 50 \times 3$; problemas en los que la multiplicación de dos números naturales se combina con otras operaciones.... Categoría técnica; S2.

Asimismo, vuelve a aparecer la distinción que agrupa S1, S2, S3 y S4 en un bloque y S5, S6 y S7 en otro: “Lo más importante es diferenciar las preguntas en que se quiere averiguar algo sobre la aplicación del algoritmo y cuando es necesario conocer y especificar las propiedades de la multiplicación y de nuestro sistema de numeración”.

Con los comentarios de éste y otros expertos, podemos concluir que la categoría formal está claramente delimitada.

La última sugerencia de este experto resulta interesante y por tanto habrá que considerarla:

“ Sugiero redactar una lista de situaciones o problemas, especificando qué se espera del alumno en cada caso. O mejor, qué respuestas diferentes puede dar un alumno.

Quizás iría bien estructurar la lista en forma de diagrama en árbol lo que tiene la ventaja de que permite situar cada entrada en el nivel de la clasificación que le corresponde y estudiar alguna de las ramas con más detalle sin que comprometa otras partes del estudio”.

-Experto 10

Este experto echa en falta dos situaciones. Una, “...en la que el algoritmo de la multiplicación se emplea como herramienta o útil en el desarrollo de otras operaciones –división, potenciación, radicación... –“ y otra, que considera fundamental, donde no aparece de modo explícito el algoritmo de la multiplicación pero es necesario emplearlo para resolver esa situación. Para este último caso, pone como ejemplo una suma reiterada con un número elevado de sumandos.

Por nuestra parte, consideramos que ambos tipos de situaciones se pueden incluir dentro de la categoría S2 o S3 dependiendo del contexto, en particular la segunda situación. La diferencia entre la 1^{era} y 2^a situación planteadas se basa únicamente en el grado de explicitación: en una se conoce de antemano que hay que emplear el algoritmo y en la otra no. Para esta última, el algoritmo no tiene por qué ser el único método de resolución posible. En este sentido, entendemos que es una situación idéntica a la proporcionada por un PAEV.

De otro lado, considera que S6 puede incluirse en S5 o S7 “...puesto que en ambos casos ha de justificarse el algoritmo estándar de la multiplicación”. En efecto, la explicación verbal sólo es una de las formas que puede emplearse para justificar el funcionamiento y la estructura interna del algoritmo estándar del producto. Esta justificación también podría hacerse de forma escrita o mediante un lenguaje formal matemático. En cualquier caso, S5, S6 y S7 forman parte de la categoría que venimos denominando formal.

Se propone otra clasificación: el algoritmo como objeto de conocimiento (S1 y S4) y como útil (S2 y S3). El carácter analítico de S4 lo distinguiría de S1. La diferencia entre S2 y S3 estaría en el contexto. No obstante, advierte sobre la dificultad que supone considerar una situación como escolar o no escolar. En tal sentido, afirma lo siguiente: “Hay que pensar en lo deslizante de esos términos: escolar o no, porque ¿corresponde la situación 2 a un contexto necesariamente escolar?, ¿no se le puede presentar a Juan en su casa? A lo mejor la situaciones escolares había que comenzarlas por algo así como: “Supongamos...””.

-Experto 11:

A diferencia de lo que opina el autor, en el aprendizaje de las tablas de multiplicar no consideramos la presencia del algoritmo estándar escrito de la multiplicación, si bien es cierto que su dominio constituye un requisito previo para emplear el algoritmo, al igual que la lectura y escritura de los números o el concepto de multiplicación como suma reiterada. Podemos afirmar que el algoritmo se constituye en base a estos conocimientos pero ellos por sí solos son independientes de éste. En consecuencia, no vemos en qué categoría del algoritmo se podrían situar estas condiciones previas.

Ahora bien, un caso distinto es el mencionado por el experto anterior (experto 10) cuando proponía una tarea donde el sujeto debía realizar una suma con múltiples sumandos iguales. Esta situación de suma reiterada se incluiría en la categoría S2 o S3, en función del contexto donde surja.

Este experto vuelve a destacar el caso de una situación problemática susceptible de poder resolverse de varias formas, lo que provoca que sea difícil de clasificar en una determinada categoría. En concreto, pone el ejemplo de la MCCD de S4 resuelta al estilo de S5, a partir del conocimiento de los principios en los que se sustenta el algoritmo. Tal como hemos mencionado ya, parece ser que hay situaciones que pueden incluirse en más de una categoría en función de cómo sea resuelta por el alumno y en tal caso convendrá tenerlas presente de cara a la categorización del campo situacional

Acerca del comentario “Por otra parte, no soy capaz de decidir si en S6 se incluye el cálculo aproximado (estándar escrito). Por ejemplo: 198×159 . Un poco menos de $200 \times 160 = 32000$. (200×160 se supone que lo hago con papel y lápiz)”, conviene decir

que el ejemplo propuesto lo situaríamos más bien en S2 o S3, puesto que en realidad se aplica el algoritmo de forma técnica para resolver un problema de estimación o, para ser más precisos, del que se decide que basta resolverlo de forma aproximada.

Por otra parte, el experto considera que el algoritmo estándar escrito de la multiplicación no constituye verdaderamente un algoritmo “*mientras no se tengan “a la vista” las tablas de multiplicar de los números que aparecen en el multiplicando y el multiplicador. Dicho de otro modo: la obligación de “memorizar” las tablas no forma parte del algoritmo y le quita ese carácter algorítmico*”. Continúa aclarando: “*En “calcular 51x2” (vuestro primer ejemplo de S1), la primera etapa del algoritmo debería consistir en “extraer, de la tabla del 2, los productos 2x1 y 2x5”*”. Esta apreciación está relacionada con los comentarios sobre las tablas de multiplicar. En nuestra opinión, el algoritmo estándar escrito para multiplicar números naturales es un procedimiento complejo constituido por subprocedimientos más simples conectados entre sí formando parte de la sucesión de pasos que conduce a la solución. Uno de estos subprocedimientos consiste en calcular productos de números de una cifra, que pueden hacerse: (a) de forma inmediata, si previamente se han memorizado todas las posibilidades, o como dice el experto, se consultan los resultados en un documento impreso o (b) utilizando otros métodos diferentes cada vez que surja la necesidad de realizar esos cálculos (sumar reiteradamente en el papel $2 \times 5 = 2+2+2+2+2 = 10$; emplear los dedos;...).

En cualquier caso, el proceso completo lo entendemos como un verdadero algoritmo al cumplir los requisitos de las distintas caracterizaciones dadas para la noción de algoritmo, entre ellas las propuestas por Ifrah (1998) que tomamos como referencia.

-Experto 12

Este experto, por su parte, añade aquellas situaciones “*en las que es necesario modificar el algoritmo propuesto a efectos de economizar el cálculo...*”. Se refiere a modificaciones del tipo:

$$\begin{array}{r}
 25 \quad \longrightarrow \quad 168 \\
 \times 168 \quad \quad \quad \times 25
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 246 \xrightarrow{\times 10} 246 \\
 \times 1,2 \quad \quad \times 12 \quad \longrightarrow \quad \times 12
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{r}
 246 \\
 \times 12
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \text{Poner una coma} \\
 \text{entre las decenas y} \\
 \text{las unidades del} \\
 \text{resultado obtenido}
 \end{array}$$

Estos cambios iniciales no los hemos contemplado porque pensamos que no forman parte del algoritmo en sí. Como respuesta a la duda planteada por el propio experto, consideramos que estas alteraciones previas no entran en el nivel de trabajo en el que situamos la investigación.

El experto entiende que en la clasificación propuesta es necesario distinguir entre situaciones donde se requiere una comprensión conceptual del algoritmo y situaciones donde simplemente se necesita conocer el procedimiento para operar de un modo mecánico. Dentro de cada uno de estos grupos iniciales, habría que precisar cuáles son las distintas situaciones o fenómenos que pueden incluirse. Pone el ejemplo de S2 y de la cantidad de situaciones escolares que pueden resolverse con el algoritmo estándar de multiplicar.

Por nuestra parte, esta circunstancia ya la conocíamos puesto que hablábamos de categorías (técnica, analítica y formal) y de situaciones dentro de cada categoría. También es verdad que habrá que precisar más para intentar elaborar unas

categorías/dimensiones que nos permitan obtener unos indicadores adecuados de comprensión y agrupar la variedad de situaciones de un modo certero.

ANEXO II

SEGUNDO ESTUDIO EXPLORATORIO

A.2.1 Introducción

En este Anexo se recoge la transcripción completa de cada una de las entrevistas realizadas en el segundo estudio exploratorio descrito en el capítulo VII. Las entrevistas se presentan agrupadas siguiendo los tres bloques destacados en el apartado 7.3.3.2.

Por cada entrevista desarrollada se exponen:

- los datos del estudiante participante (nombre, curso y centro) y la fecha de realización de la entrevista.
- la producción escrita del alumno por tarea presentada y el diálogo establecido tras el intento de resolución de la misma.

A.2.2 Transcripción de las entrevistas del segundo estudio exploratorio

A.2.2.1 Primer bloque de entrevistas (A)

Entrevista A-1:

Alumno: Álvaro.

Curso: 1º Bach (16-17 años)

Fecha de la entrevista: 25/02/2002

Centro: I.E.S de Almería Capital

Tarea 1

A.- Producción escrita del alumno:

El producto de dos números consecutivos es 156. Encuétralos.

$$\begin{array}{r} 20 \\ - 4 \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ - 13 \\ \hline 24 \\ - 12 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Álvaro.- ¿Cómo que el producto...consecutivos? ¿Dos números que al sumar te dan 156 o dos números seguidos...?

Investigador.- Claro, el producto de dos números consecutivos es 156, ¿cuáles son esos dos números?

Alv.- Esto con una ecuación, ¿no?

I.- El producto es la multiplicación, ¿no?

Alv.- Claro.

I.- Pues, la multiplicación de dos números consecutivos es 156.

Alv.- ¿Puedo usar calculadora?

I.- No, la calculadora no la puedes utilizar.

Alv.- ¡Ah! Entonces, la multiplicación de dos números es 156, ¿no? Entonces... ¡esto es muy difícil!

I.- A ver, ¿qué se te ocurre?

Alv.- 20 por... ¡no! 20 por 10, 200; 20 por 8... ¿puede ser? 8 por 0, 0...no. 8 por 2, 16. 8 por siete..., 20 por 7. ¡¿No?! ¿Puede ser o no?

I.- Puedes escribir.

Alv.- ¿Pero sería así, multiplicando un número por otro para que te dé 156...o no?

I.- Multiplicando un número por otro para que te dé 156.

Alv.- ¿O cómo es? ¡Es que no comprendo el enunciado!. Porque dice el producto de dos números consecutivos... ¿El producto de dos números consecutivos, de dos números seguidos?

I.- Claro, consecutivos son seguidos.

Alv.- ¿Dos números seguidos que al multiplicarse por sí mismo...?

I.- Que al multiplicarlos dan 156.

Alv.- [Unos instantes en silencio] Así sería, ¿no? 12 por 13. [Realiza el cálculo en silencio].

I.- Explica un poco cómo has obtenido esos dos números.

Alv.- ¡De cabeza, buscando!

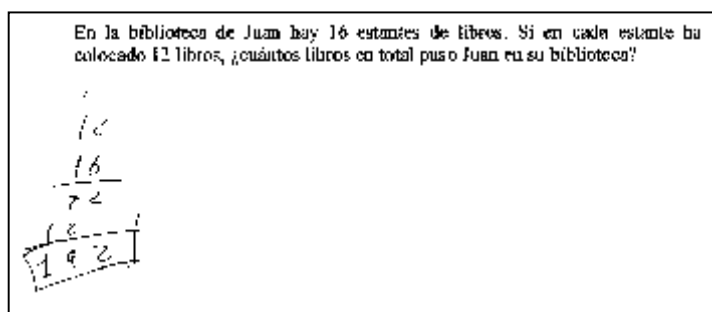
I.- ¿Sí?

Alv.- 10 por 11 da 110, pues, más o menos aproximándote...pues, 12 por 13, 156... ¿No?, ya está.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:



B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Alv.- ¡Oh, esto es de tontos! Hombre, ¡16 por 12! [Sonríe y calcula el producto empleando el algoritmo estándar escrito]. 192.

I.- ¿192?

Alv.- Sí..., ¿no?

I.- ¿Y qué es lo que has hecho?

Alv.- Pues, he multiplicado los libros que hay por cada estante, por el número de estantes que hay en total y lo multiplicas.

I.- Ajá.

Alv.- Ya está, 192.

I.- De acuerdo.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula la siguiente suma:	$ \begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ + 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ \hline 34 \end{array} $
----------------------------	--

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Ya la has terminado? ¿Qué es lo que has hecho?

Alv.- Sumarlo.

I.- Sumarlo.

Alv.- Pues, 2 y 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Me llevo una, 1, 2, 3, 4,...

I.- Ya, entiendo.

Alv.- ¡A ver qué apuntas tú ahí! [En referencia a las notas del Investigador].

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:

Comprueba con un ejemplo que se verifica la propiedad conmutativa del producto.

$5 \cdot 2 = 10$
 $2 \cdot 5 = 10$

1 8	
2 4 8	
2 4	

4 9 6	

5 0 5 2	

3 4	
2 4 8	
1 9 ?	

9 6	

4 9 6	

5 0 5 2	

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Alv.- ¡Uhh!, esto lo dí yo en Primero de EGB....¿Cuál es la propiedad conmutativa?

I.- ¿La propiedad conmutativa? Lo que dice la propiedad conmutativa es que da igual cómo multipliques dos números, es decir, es lo mismo multiplicar el primero por el segundo que el segundo por el primero.

Alv.- Vale, 5 por 2, 10 y 2 por 5, 10. ¡Es lo mismo! Ya está, es un ejemplo, ¿no?

I.- Escríbelo. Me interesa que lo escribas.

I.- [Tras escribir el ejemplo] ¿Y funcionará también para números de dos cifras? Porque tú has utilizado números de una cifra.

Alv.- 248 por 24... [Realiza el producto empleando el algoritmo estándar escrito].

Alv.- [Después de unos 45'' en silencio] Ahora, 24 por 248... [También afronta este producto con el algoritmo estándar escrito de la multiplicación].

I.- [Tras 55'' (aprox.) de intentos] ¡No escribas en la mesa, hombre!

Alv.- ¡Joeer!

I.- Todos los cálculos házlos en el papel. Si necesitas más, te doy.

Alv.- [Tras unos instantes de silencio] No puede ser, sale mal. Fíjate.... ¿Qué apuntas por ahí?

I.- Tú dedícate a la tarea.

Alv.- [Después de 1' 20'' (aprox.) de intentos y correcciones en los cálculos] ¡Ahora sí! Ya está.

I.- Ya está.

Alv.- Esto es un 8 [Refiriéndose al resultado del 3^{er} producto parcial].

I.- Eso es un 8, ¿no? Muy bien.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 5

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula el resultado de la siguiente expresión.

$$25 \times (7 + 15) + 17^2$$

Handwritten work includes:

$$23 \times 25$$

$$165 \times 5$$

$$17 \times 17$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- [Después de unos segundos de observar las acciones del alumno] *Perdona, esto es un signo "por" [la "x"]*.

Alv.- *Ya, estoy multiplicando.*

I.- *Creí que habías entendido que era una equis.*

Alv.- *¡Nooo!*

I.- *Es un signo "por".*

Alv.- *¡Ah, que esto es un signo "por"! Creí que era una incognita.*

I.- *No, no. A lo mjeor es que está mal puesto. Bueno, lo anotaré aquí.*

Alv.- *¿Pero qué es, una incognita o no?*

I.- *No, no, es un signo "por".*

Alv.- *¡Ahhh!.... ¡Ah!, vale.*

Alv.- [Tras unos 55" de cálculo en silencio] *Te da igual que ponga las cuentas en sucio, ¿no?*

I.- *Sí, claro. Haz los cálculos que quieras y pónlos donde quieras.*


I.- [Transcurridos 45" aprox.] *Ya está, ¿no? No importa que tengas las cuentas en sucio.*

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 6

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula el área del siguiente triángulo:



Altura = 12 cm

Base = 12 cm

Recuerda que Área = $\frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2}$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{12 \times 12}{2}$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{144}{2} = 72 \text{ cm}^2$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Alv.- Pero esto qué es, que tengo que hacerlo en poco tiempo o qué.

I.- No, tenemos todo el tiempo. No te preocupes por el tiempo; ve haciéndolo tranquilamente y ya está.

Alv.- [Transcurridos 1' 10" (aprox.) de trabajo en silencio] Cuadrado... 66 centímetros cuadrados...el área....

I.- El área sí, cuadrada.

Alv.- Eso me lo has dicho tú.

I.- ¿Qué?

Alv.- Eso me lo has dicho tú, a ver si va a estar mal y...

I.- No, no.

Alv.- ¡Venga... la siguiente, profe!

I.- Vamos a ver...

Alv.- ¡Que estoy operativo!

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 7

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 703 \\ \times 36 \\ \hline 4218 \\ 2109 \\ \hline 25308 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Nada destacable. El alumno resolvió correctamente la tarea sin hacer ningún comentario adicional. Tampoco vimos la necesidad de insistir más. La falta de tiempo nos hizo pasar directamente a la tarea 9 de resolución de MCCD.

Tarea 9

A.- Producción escrita del alumno:

Encuentra las cifras que completen la multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 \times \square 7 \\
 \hline
 \square \square 5 \\
 2\square 5 \\
 \hline
 \square \square 9 5
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Alv.- 7 por 5, 35, ¿no? Sí. ... ¡esto es muy difícil!

I.- Entiendes la tarea, ¿no? Lo que hay que hacer.

Alv.- Sí, este de aquí yo creo que sería un 5... ¿no?

Alv.- [Pasados 1'40'' (aprox.) de reflexión en silencio] No sé, esto es muy difícil.

I.- ¿Sí?

Alv.- Para que salga el 5 tiene que ser 7 por 5... el que sólo acaba en 5. 7 por 5, 35, me llevo 3. Y ahora, para que salga un número que acabe en 4 sumándole 3 pues...

I.- Si quieres te pongo... [nuestra intención era cambiar la MCCD por otra más sencilla].

Alv.- No, espérate... 7 por 3. 7 por 3, 21 más 3... y ya está. 4 y 5, 9. Ahora, aquí cuál sería para que diese... [Tras unos instantes en silencio] 5 por 5, 25... Tú lo tienes hecho ya aquí, o qué.

I.- No, no.

Alv.- [Pasados unos 20'']. Sería otro 7: 7 por 5, 35. Me llevo 3. 7 por 3, 21, 22, 23 y 24.

I.- [Al finalizar de sumar] Ya la has terminado ¿Podrías para concluir explicarme cómo lo has hecho?

Alv.- ¡Voy buscando! Un número que al multiplicarse por éste [el 7] dé 5 y luego, al multiplicarse por éste [decenas del 1^{er} factor] dé... sumándole lo que te sobra, un número acabado en 4... Claro, un número que al sumarse con éste [el 5 del resultado del 2^o producto parcial] dé éste más éste...

I.- Un lío...

Alv.- Sí.

I.- Bueno, pues ya está. Lo dejamos aquí. [Finalizó el tiempo de recreo previsto para la entrevista].

Alv.- ¡No, dame otro más!

[Fin de la entrevista]

Entrevista A-2:

Alumnos: Beatriz y Esteban
Fecha de la entrevista: 05/03/2002

Curso: 1º Bach (16-17 años)
Centro: I.E.S de Almería Capital

Tarea 1

A.- Producción escrita del alumno:

El producto de dos números consecutivos es 156. Encuétralos.

$$x(x+1) = 156$$

$$x^2 + x - 156 = 0$$

$$a = 1, b = 1, c = -156$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-156)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 624}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 25}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 25}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-1 - 25}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$

Los números son 12 y 13.

Producción escrita de Bea.

El producto de dos números consecutivos es 156. Encuétralos.

$$x(x+1) = 156$$

$$x^2 + x - 156 = 0$$

$$a = 1, b = 1, c = -156$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-156)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 624}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 25}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 25}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-1 - 25}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$

Los números son 12 y 13.

Producción escrita de Est.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Beatriz.- Ya está.

Investigador.- ¿Ya la has resuelto tú?

Bea.- Sí.

I.- Explícame cómo lo has hecho.

Bea.- Pues, una incógnita x y el siguiente número consecutivo sería $x+1$. Igualo a 16 y quitamos paréntesis, sumamos la x , el 1 pasa al otro lado restando y aquí igual a 155 partido 2.

I.- ¿Y te da de resultado? Esos dos números consecutivos...¿cuáles son?

Bea.- Da $x...$ y $x+1$ sería $78,5$.

Bea.- [Est. se inclina para observar cómo Bea. ha resuelto la tarea] ¡Tú no me mires a mí! Házlo a tu manera.

Esteban.- Yo tengo otra manera. Me he complicado la vida.... Es que he hecho una ecuación y me he complicado la vida.

Bea.- Que esté mal o esté bien, es otra cosa.

Est.- ... no vamos a terminar... [fragmento ininteligible].

Bea.- Se comprueba si está bien.

I.- [Después de unos 25''] Bueno Est., ¿tú cómo lo has hecho?

Est.- Es que me he equivocado. Es que he cogido $x+1$ y $x+2$ y es... no es ya dos números, he cogido una x fuera.

I.- ¿Ya lo tienes tú? [Refiriéndose a Bea.]

Bea.- Si, y da.

I.- Y da, ¿no? Vale, de acuerdo.... El producto de dos números consecutivos es 156, encuéntralos. Esos dos números consecutivos son el 77,5 y el 78,5.

Bea.- Y da.

I.- [Pasados unos segundos] Vamos a esperar un momento a que termine...

Bea.- Da igual.

I.- ... a que termine Est.... Con tranquilidad, ¿eh? Hasta donde llegemos y ya está. Tampoco pasa nada.

Bea.- ¡No!, si ya...

Est.- [Tras 40'' aprox.] Creo que ya está.

Bea.- ¡La Virgen, lo que ha liado!

Est.- Bueno, me he equivocado al principio porque he sumado 1 y el $x+2$, y es x por $x+1$...porque es el producto, por eso hago la multiplicación.

Bea.- ¡Anda, pues es verdad!

Est.- Entonces, pues he cogido... y he puesto x por $x+1$, o sea, un número cualquiera por otro número cualquiera pero más 1; o sea, el mismo número más 1... que es igual a 156. Entonces, esa es una ecuación de segundo grado. En la que te sale 18 y -12. Vamos a probar... 18 por 19 sería...por 20, 360. 360 le quitas... no me sale. Es que no me sale.

Bea.- Que es el producto, no la suma.

I.- ¡Ah, que tú habías puesto la suma!

Bea.- Claro.

Est.- Esta no puede ser. 18 no puede ser porque te sale 18 por 19 y te salen ya...umm, 341. Por tanto, no es. La otra te da, -12 por -13, te sale...

Bea.- -11.

Est.- No, -12 por -13, porque -12 es x .

Bea.- x más 1...

Est.- ¡Ehh...!

Bea.- x más 1, -12 más 1, -11.

Est.- Pero en este caso...

Bea.- Vale, yo no me meto que si no...

Est.- En este caso sería así.

Bea.- ¿Por qué?

Est.- Tendría -12 por... -13, ¿sabes?. Es "por", un número siguiente.

Bea.- Pero sí. Si es "por", sí, pero el número siguiente...

Est.- Sí, pero el número siguiente es en forma negativa para atrás.

Bea.- No sé, pruébalo.

Est.- Para atrás.... Es que sí, así sí sale, creo. Porque el 3 por 2 son 6, que sale al final.

Bea.- Sí

Est.- ... 3 y 13, sale. Sale que es 156.

Bea.- Pues, ya está.

Est.- Aunque así me sale -12. Me he hecho un lío al principio pero...

I.- Bueno, muy bien. Lo dejamos entonces. Esta ha sido la primera tarea.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 12 \\ + 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ \hline 84 \\ 12 \end{array}$$

Producción escrita de Bea.

Calcula la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 12 \\ - 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ \hline 36 \end{array}$$

Producción escrita de Est.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Bea.- Hemos coincidido.

I.- Vaya.

Est.- He cogido, he contado cuántos 12 hay y he multiplicado. O sea, como había 7, he dicho, pues 12 por 7 y lo he contado... más fácil.

I.- ¿Y tú?

Bea.- ¡Yo he sumado! [Risas].

I.- Tú has sumado.

Bea.- Los 2: 2, 4, ..., he ido contando de 2 en 2: 2, 4, 6, ..., 14, me llevo 1....¡Como cuando éramos pequeños!

I.- De acuerdo.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

Comprueba con un ejemplo que se verifica la propiedad conmutativa del producto.

$$\begin{array}{l} 20 \cdot 10 = 200 \\ 10 \cdot 20 = 200 \end{array}$$

Producción escrita de Bea.

Comprueba con un ejemplo que se verifica la propiedad conmutativa del producto.

$$\begin{array}{l} 7 \cdot 3 = 21 \\ 3 \cdot 7 = 21 \end{array}$$

Producción escrita de Est.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Bea.- ¿¿Alguien me dice cuál era la propiedad conmutativa?! [Risas] No me acuerdo.

Est.- Pues que... 2 por 3 es igual a 6 y 3 por 2 es igual a 6 [Risas].

Bea.- La distributiva era la otra. Ya está.

I.- Pero.... Bueno, ¿y tú qué opinas?

Bea.- Yo, ¿que no me acordaba cuál era la propiedad conmutativa!

I.- ¿Cuál era?

Est.- Era pues que el orden de los factores...

Bea.- ... no altera el producto.

I.- Y aquí se trata de comprobarlo. Pero tú lo has comprobado con dos números de una cifra.

Est.- Sí.

I.- ¿Y qué pasaría con números de varias cifras? Por ejemplo, de dos cifras.

Bea.- 20 por 10 es igual a 200 y 10 por 20 es igual a 200.

Est.- Es la misma.

I.- O sea, que funciona siempre.

Est.- Que funciona siempre.

Bea.- Por eso es una propiedad.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 703 \\ \times 36 \\ \hline 4218 \\ 21090 \\ \hline 25308 \end{array}$$

Producción escrita de Bea.

Calcula la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 703 \\ \times 36 \\ \hline 4218 \\ 21090 \\ \hline 25308 \end{array}$$

Producción escrita de Est.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Est.- Creo que sí, ¿no? [Risas].

Bea.- Ya está.

Est.- Las multiplicaciones son fáciles.

I.- ¿Ya lo habéis hecho?

Est.- Sí.

Bea.- Sí.

I.- ¿Y estáis de acuerdo?

Bea.- Sí

I.- ¿Os parece fácil o difícil?

Bea.- Fácil.

Est.- Fácil.

Bea.- ¡Aunque hacía tiempo que no la hacíamos!

Est.- ¡Ya ves! No, y además con un 0...

Bea.- ...con un 0 en medio es más fácil todavía.

Est.- ...con un 0 es más fácil todavía.

I.- Coincidís en el resultado, ¿no?

Bea.- Sí

I.- De acuerdo.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 5

A.- Producción escrita del alumno:

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encuentra los errores de las que no lo estén.

$\begin{array}{r} 302 \\ \times 42 \\ \hline 604 \\ 1208 \\ \hline 13104 \\ \hline 12684 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 32 \\ \hline 30 \\ 45 \\ \hline 170 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 780 \end{array}$
---	---	---

Producción escrita de Bea.

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encuentra los errores de las que no lo estén.

$\begin{array}{r} 302 \\ \times 42 \\ \hline 604 \\ 1248 \\ \hline 13104 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 32 \\ \hline 30 \\ 45 \\ \hline 170 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 850 \end{array}$
$\begin{array}{r} 302 \\ \times 42 \\ \hline 604 \\ 1208 \\ \hline 13104 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 32 \\ \hline 30 \\ 45 \\ \hline 170 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 780 \end{array}$

Producción escrita de Est.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Has terminado ya?

Bea.- Sí.

Est.- [Pasados 25'' aprox.] Las tres están mal.

I.- Las tres están mal. Veamos, la primera tarea, la primera multiplicación...

Est.- La primera multiplicación.... Pues, que al multiplicar por 0 ha puesto como si fuera por 1.

Bea.- Claro.

I.- ¿Tú estás de acuerdo?

Bea.- Sí y luego eso hace que la suma ya no quede bien.

I.- De acuerdo...¿y la segunda?

Bea.- Que no se ha llevado el resto. 2 por 5, 10, me llevo 1. 2 por 1, 2 y 1, 3.

I.- ¿Y la tercera, está bien o mal?

Est.- Pues igual, lo que pasa es que no se ha llevado el resto tampoco. En la primera parte no se ha llevado, entonces no da... ¡no espérate!

Bea.- ¡Nooo!, sí se lo ha llevado. Está mal la suma.

Est.- Sí se lo ha llevado. Es la suma, es verdad.

Bea.- Está mal la suma.

I.- ¿Entonces?

Bea.- Que 3 y 5 son 8 y aquí la han tomado como 15, me llevo 1, 7 y el 8.

I.- Se han equivocado en la suma.

Est.- Se han equivocado en la suma.

Bea.- Sí...¿no?

Est.- Sí, sí, sí, sí. Es que...

Bea.- Sí, ¿no?

Est.- Como he cogido antes y no he sumado, pues me... no me he fijado en el resultado...

I.- ¿Pero de qué forma se han equivocado en la suma?

Est.- Porque ha cogido...

Bea.- ... porque, 5 y 3 son 8 y lo que han hecho ha sido multiplicarlo y no sé porqué; porque ellos han querido... 5 por 3 son 15, que es lo que ellos han cogido...¿no? A lo mejor.

I.- Bueno...

Est.- Puede ser.

Bea.- Puede ser.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 6

A.- Producción escrita del alumno:

Encuentra las cifras que completan la multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{2} \boxed{5} \\
 \times \boxed{7} \boxed{7} \\
 \hline
 \boxed{2} \boxed{4} \boxed{5} \\
 2 \boxed{7} \boxed{5} \\
 \hline
 \boxed{2} \boxed{5} \boxed{9} \boxed{5}
 \end{array}$$

Producción escrita de Bea.

Encuentra las cifras que completan la multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{3} \boxed{5} \\
 \times \boxed{7} \boxed{7} \\
 \hline
 \boxed{2} \boxed{4} \boxed{5} \\
 2 \boxed{7} \boxed{5} \\
 \hline
 \boxed{2} \boxed{5} \boxed{9} \boxed{5}
 \end{array}$$

Producción escrita de Est.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Habéis terminado ya?

Bea.- Sí

I.- Venga, explicarme un poco con vuestras palabras qué habéis hecho.

Est.- La multiplicación... los números primos, o sea, el 1, el 3 y el 5 sería, pues, siempre... siempre te daría un guión 5.... Bueno, primero aquí, porque...

I.- ¿Aquí, dónde?

Est.- En el primer 7.

I.- En el 7 por 5.

Est.- Eso es, sería 5 al final... y de los 5 que tiene al final el 7 es el 5. El 7 por 5, 35.... Claro, te llevas 3 y entonces... te llevas 3... y como para que te dé aquí 9 al final, tienes que sumar aquí 4, pues multiplicando he probado el 3. 7 por 3 son 21 más 3, 24 y entonces te sale.

I.- Entiendo, entiendo.

Est.- Entonces luego aquí el 7, o sea, he probado otra vez el 7.... Bueno, primero he probado el 1, el 3, el 5,... pero te tenía que salir aquí un 2 y aquí el 5. O sea, otra vez 7 para que te saliera 5 aquí, un 1, un 3,..., pero como después éstos no lo cumplían pues he seguido subiendo el número. O sea, por impar, entonces te salía otra vez el 7. 7 por 5, 35...

I.- Probando.

Est.- He probado... claro, pero con los impares. No he llegado a probar los pares porque te saldría...

Bea.- 0.

Est.- Te saldría 0.

I.- Ya... ¿y tú qué opinas?

Bea.- Más o menos.

I.- ¿Cómo lo has hecho?

Bea.- No tan enrevesado.... Yo, lo primero aquí un 5 por lo que dice él: el único número que multiplicado por 7 acaba en 5 es el 5. Te llevas 3, entonces ya tienes que sumar: para que aquí te dé 9, aquí tiene que haber un 4 por fuerza, 24. Entonces, buscas el número que multiplicado por 7 más 3 que te llevas, sean 24. Y luego...

I.- ¿Cuál es ese número entonces?

Bea.- 3 por 7.

I.- El 3. Entonces, lo de buscar el 7 ha sido lo que él ha dicho. He empezado... tenía que ser un número por 5 y tenía que acabar en 5; pues, el 1, 3, 5, 7, ..., hasta que lo he encontrado.

I.- Bueno, pues otra tarea más.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 7

A.- Producción escrita del alumno:

Ver tarea 4.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Entendéis la primera pregunta?

Bea.- Sí, que por qué hay que desplazar.

I.- ¿Por qué hay que ir desplazando los productos parciales un lugar hacia la izquierda?

Bea.- Porque esto son unidades y esto son decenas.

Est.- Eso es.

I.- ¿Por qué hay que dejar un hueco?

Bea.- Porque esto son unidades y esto son decenas.

Est.- Sí, pero... estás multiplicando aquí ya decenas...

Bea.- Claro.

Est.- Aquí estás multiplicando ya decenas. Esto son unidades, o sea, que empiezas desde las unidades.

Bea.- Tienes que sumar las decenas.

Est.- Si empiezas por las decenas [haciendo referencia al 3, decenas del segundo factor], empiezas por decenas.

Bea.- Claro.... ¡Nunca me lo había planteado yo eso!

I.- Dame un ejemplo.

Est.- A ver, si tú multiplicas el 6 estás multiplicando ya unidades, no hay decenas. Entonces, multiplicas, empiezas las unidades...

Bea.- Unidades...está multiplicando unidad [el 6] por unidad [el 3], aquí [el 8 del resultado del primer producto parcial]; unidad [6] por decena [0], aquí [1 del resultado del mismo producto parcial]; unidad por... centena [7], aquí [42 del resultado del mismo producto parcial].

I.- A ver, a ver, 6 por 3 es unidad por...

Bea.- Unidad por unidad pero te da...

Est.- Te da una decena, te llevas.

Bea.- ... te da una decena, por eso el 1 va aquí...¿entiendes?

Est.- Pero el 3...

Bea.- Y luego, como aquí ya en el 3 estás multiplicando decenas, pues no puedes ponerlo debajo de las unidades.

Est.- Porque ya son decenas lo que te sale.

I.- ¿Y por qué...?

Bea.- Es como si multiplicaras 30 por 703... y 6 por 703, y luego lo sumas.

I.- ¿Sí?

Bea.- Creo.

Est.- Sí, está muy bien.

Bea.- No lo he hecho nunca.

I.- Y lo de sumar, ¿qué?

Bea.- Pues ya está, porque primero multiplicas 30 por 703 y luego 6 por 703 y lo tienes que sumar.

Est.- Porque aquí coges el... ésta es la multiplicación de 6 [el resultado del primer producto parcial] y ésta es la multiplicación de 30 [el resultado del segundo producto parcial].

Bea.- Sí.

Est.- ¡Claro!, de 30, por eso se deja aquí este 0.

I.- A ver, ¿qué se deja un...?

Bea.- Esto es como si pusieras aquí un 0. [en el hueco del resultado del segundo producto parcial].

Est.- Esto es como si fueran decenas, por eso son decenas esto ya.

I.- ¿El hueco es como si hubiese un 0?

Est.- El hueco es como si hubiese un 0, porque...

Bea.- Claro, 8 y 0, 8.

Est.- ... siempre tiene que estar. Es como si multiplicaras 6 y después solamente 30.

Bea.- Y luego lo tienes que sumar para que te dé el producto final porque tú quieres 36. Por eso se suman.

Est.- Y si hubiera centenas pues sería otro hueco... y fuera nada más como... multiplicamos como si fuera un número por 100.

I.- Ya.

Est.- O sea, va multiplicando unidades primero, después decenas y después las centenas y después las sumas.

Bea.- Creo, porque yo nunca lo he comprobado... Y luego se suman por eso, porque primero tienes la multiplicación del 30...

Est.- Claro.

Bea.- ... luego tienes la multiplicación del 6. Tú quieres la del 36, pues sumas la del 30 y la del 6.

Est.- Es que esto en verdad no es 2109 sino es 21090, por eso la suma...

Bea.- Es que esto no es 2109, es 21090. Lo que él ha dicho.

Est.- Porque si no estarías sumando 4218 y 2109 y en verdad eso sería una multiplicación de 6 y de 3, nada más.

Bea.- ¿Alguna vez habías pensado eso? [Dirigiéndose en voz baja a Est.]

Est.- [Risas]

Bea.- Yo como siempre me la han enseñado así pues no me la había planteado nunca.

[Fin de la entrevista]

A.2.2.2 Segundo bloque de entrevistas (B)

Entrevista B-1:

Alumno: Mirella

Curso: 5º PRI (10-11 años)

Fecha de la entrevista: 19/03/2002

Centro: I.E.S de Almería Capital

Tarea 1

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula la siguiente suma:

$$\begin{array}{r}
 17 \\
 17 \\
 17 \\
 + 17 \\
 17 \\
 17 \\
 17 \\
 \hline
 119
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Investigador.- *¿Ya la has terminado? Bueno, explícame. ¿Cómo la has hecho?*

Mirella.- *Multiplicando.*

I.- *¿Multiplicando? Multiplicando, ¿qué?*

Mir.- *7 por... 7.*

I.- *7 por 7.*

Mir.- *Sí.*

I.- *¿Y después?*

Mir.- *Y después he sumado todo esto [la columna de "1"] por las que me llevaba.*

I.- *Ya... ¿Y lo podías haber hecho de otra forma?... ¿Se te ocurre hacerlo de otra manera?*

Mir.- [Permanece en silencio pensando durante aproximadamente 40'']. *Pues, multiplicando también éste [señala la columna de "1"].*

I.- *¿Qué?*

Mir.- *El 1 también por todos.*

I.- *¡Ahh...!*

Mir.- *Multiplicando todos los números.*

I.- *Ya, ya. De acuerdo, esta ha sido la primera actividad.*

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:

<p>En la biblioteca de Juan hay 16 estantes de libros. Si en cada estante ha colocado 12 libros, ¿cuántos libros en total puso Juan en su biblioteca?</p>	
$16 + 12 = 28$ <i>R= 28 libros</i>	$\begin{array}{r} 16 \\ + 12 \\ \hline 28 \end{array}$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Mir.- *Ya...*

I.- *Ya. A ver, explícame igual que antes.*

Mir.- *Pues... he hecho una suma para saber cuántos libros en total tenía en la biblioteca de Juna. He sumado 16 más 12... y me ha salido el total de libros.*

I.- *Te ha salido el total de libros... ¿Cuántos, 28?*

Mir.- 28.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

Ninguna.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- *¿Entiendes el enunciado?*

Mir.- *Sí. Pero...* [Permanece en silencio pensando durante aproximadamente 55''. A veces realiza algún comentario en voz baja aunque es ininteligible].

Mir.- *¿Qué son consecutivos...?*

I.- *Consecutivos son seguidos.*

Mir.- *Ya... ¿Que tienen que ser seguidos, no pueden... ¿seguidos nada más?*

I.- *¿Cómo?*

Mir.- *¿Son seguidos nada más? Consecut...*

I.- *Consecutivos son...*

Mir.- *...de 156.*

I.- *Son números consecutivos, seguidos, que al multiplicarlos da 156.*

Mir.- *Que al multiplicarlos...* [Permanece en silencio y hablando en voz baja durante 30'' aprox.].

I.- ¿Qué se te ocurre hacer?

Mir.- No sé... [Suspira].

I.- Puedes escribir, ¿eh?... Hacer todas las cuentas que quieras.

Mir.- [Tras permanecer unos 25 '' en silencio] ¿Puedo sumar?... No...

I.- Bueno, esta era un poco complicada.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encierra los errores de las que no lo están.

$\begin{array}{r} 302 \\ \times 42 \\ \hline 604 \\ 1204 \\ \hline 1264 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 33 \\ \hline 45 \\ 450 \\ \hline 495 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ \times 35 \\ \hline 35 \\ 210 \\ \hline 245 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 780 \end{array}$
$\begin{array}{r} 302 \\ \times 42 \\ \hline 604 \\ 1204 \\ \hline 1264 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 33 \\ \hline 45 \\ 450 \\ \hline 495 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ \times 35 \\ \hline 35 \\ 210 \\ \hline 245 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 780 \end{array}$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Mir.- [Al llegar a la tercera multiplicación] 5 por 2, 10. ¡Ah!, ya sé.... Creo que [inapreciable] es al revés.

I.- ¿Qué le pasa a esta multiplicación?

Mir.- Que está mal puesta.

I.- Que está mal puesta.

Mir.- Umm, no sé. Creo que es así [ver en A como multiplica]. Es que no lo sé cómo es. Creo que es así... O del revés, 35 arriba y 2 abajo, pero no lo sé. [Se queda pensando unos 10''] Pero es que... son diferentes.... Al multiplicar por dos cifras no puedes ponerla en.... Cuando terminas de multiplicar esa [3 por 2] se tiene que bajar... abajo. [Abandona y se pasa a corregir la última multiplicación. Continúa haciendo algunos comentarios en voz baja inapreciables].

I.- [Tras finalizar la corrección de las multiplicaciones] Muy bien. ¿Entonces qué pasa? Explícame un poco qué es lo que has hecho.... ¿Te acuerdas de la primera?

Mir.- De ésta... sí.

I.- ¿Qué le pasaba a esa?

Mir.- Pues... porque 2 por 2, 4...eh, 2 por 2 eran 4 y al multiplicar el 0 has puesto un número que no coincidía, eran más cifras.... Entonces yo lo he vuelto a multiplicar y lo he hecho bien.

En la otra [la segunda multiplicación]... porque te tendrías que llevar 1, al multiplicar 2 por 5 te llevabas 1 y has multiplicado 2 por 1 y no se la has puesto, entonces abajo la he puesto bien.

En la otra [tercera multiplicación] porque has multiplicado la misma cifra y no se puede.... Todo por dos cifras. Y en la última [cuarta multiplicación] ...eh, porque han hecho mal la suma.

I.- Abajo han hecho mal la suma.

Mir.- [Asiente].

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 5

A.- Producción escrita del alumno:

Encuentra los ceros que completan la multiplicación.

$$\begin{array}{r}
 \square\square \\
 \times \square 7 \\
 \hline
 \square\square 5 \\
 2\square 5 \\
 \hline
 \square\square 9 5
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Mir.- Una multiplicación... [instantes de silencio]. 7 por 2... [silencio; 10'' aprox.]. 7 por 5, 35... me llevo 3 [silencio; unos 16'']. 7 por 1...[nuevo silencio; 10'' aprox.]. No, me tengo que llevar más todavía... [silencio; unos 25'']. A ver...[instantes de silencio]. ¡Joeer!, esto qué había, se me ha olvidado ya...

I.- Se te ha olvidado ya.

Mir.- Sí, 7 por 5, 35, nos llevamos 3...7...[silencio; 26'' aprox.]. Aquí es un 4... yo creo que me llevo un 3... 7 por...[nuevo silencio; unos 12''] 7 por 6... [silencio; 12'' aprox.]. 7 por 2, 14. [Momentos de silencio]. 15, 16,... y 17 [unos 20'' de silencio]. ¡Eh!, está mal...no es que sobra 1 [nuevo silencio; 32'' aprox.].... ¡Ah, bueno!, es que son 14... a ver... aquí... [silencio; unos 33''].

I.- A ver, explícame un poco. ¿Qué estás haciendo?

Mir.- Buscando en la multiplicación, los números. A ver... 7... [silencio; 10'']. ¡Ahh!, no puede ser. Debe ser la del 2... 2 por 2, 4; 3 por...2, 6; 6 por 2, 12; 7 por 2, 14; 9 por 2, 18; ...[silencio; unos 15'']. No me sale.

I.- Bueno, da igual, no pasa nada. Lo dejamos así.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 6

A.- Producción escrita del alumno:

Ninguna

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Mir.- ¿Por qué hay que ir dejando huecos?

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Cristian.- Ya está.

Investigador.- A ver, explícame qué has hecho.

Cri.- Porque, es... es así muy difícil, 17 más 17.... Pues yo he hecho, yo he contado esto [el 7]: uno, dos, tres, cuatro, ..., que son siete. 17 por 7 y lo he... multiplicado.

I.- ¿Y lo podrías haber hecho de otra manera?

Cri.- Umm... pues.... ¿De otra manera? No sé.

I.- Que no sea multiplicando.

Cri.- No.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:

En la biblioteca de Juan hay 16 estantes de libros. Si en cada estante ha colocado 12 libros, ¿cuántos libros en total puso Juan en su biblioteca?

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 12 \\ \hline 28 \text{ libros} \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Ya has terminado? Explícame cómo la has resuelto.

Cri.- Porque si a ti te dicen en la biblioteca de Juan hay 16 estantes de libros y... en cada estante ha colocado 12 libros y te dicen: ¿cuántos libros en total ha pues... ha coloca... ha... puso Juan en la biblioteca?... pues, si te dan una cosa y te la vuelve a dar, tienes que sumar.

I.- Tienes que sumar.

Cri.- Sí.

I.- ¿Y qué resultado te da?

Cri.- 28 libros.

I.- 28 libros.

Cri.- Sí.

I.- ¿Algo más?

Cri.- No.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

El producto de dos números consecutivos es 156. Encuéntralos.

$$\begin{array}{r}
 5 - 6 \\
 10 \\
 \times 17 \\
 \hline
 70 \\
 170 \\
 \hline
 170 \\
 - 10 \\
 \hline
 156
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- Si no entiendes algo me lo preguntas, ¿eh? Alguna palabra...

Cri.- Yo es que los consecutivos no se me da bien.

I.- Son seguidos. Consecutivos son números seguidos.

Cri.- [Asiente con la cabeza].

I.- Por ejemplo, el 1 y el 2 son números seguidos.

Cri.- Sí... ¡Ah!, ya, ya está, ya está, ya está. ¿Cómo lo hago, lo pongo aquí?

I.- Sí, ahí hay espacio para escribir.

Cri.- Éste [escribe: "5 - 6"].

I.- Explícame. ¿Qué has puesto ahí?

Cri.- Aquí dice que... encuentres dos números, que son seguidos, ¿no?

I.- Sí

Cri.- Pues entonces, aquí como el 1 con el 5 no es seguido, ni el 1 y el 6 es seguido, pues el 5 y el 6.

I.- Mmm... Pero esto [el enunciado de la tarea] te está preguntando que encuentres dos números consecutivos cuyo producto o cuya multiplicación sea 156.

Cri.- ¡Mmmm! Pues... ¡eso sí es difícil!

I.- [Tras 22'' de silencio aproximadamente] ¿Qué se te ocurre hacer?

Cri.- Yo iba a restarle pero... es que no sé cuál número es tampoco. Porque si le resto la mitad pues me daría eso. Me daría la otra mitad. [Silencio; 23'' aprox.]. Esta no se me da muy bien.

I.- Hombre, todas sencillas no las puedo poner. ¿No se te ocurre nada?

Cri.- Mmm...

I.- Algún ejemplo de números consecutivos, números seguidos, que al multiplicarlos dé 156.

Cri.- ¿56? 10 por... ¡ah!, 10 por 17. Creo, yo creo.

I.- Bueno, puedes escribir todo lo que quieras.

Cri.- [Permanece en silencio calculando durante unos 68''. A veces rompe este silencio con breves comentarios en voz baja y algunas palabras más claras pero sueltas] Ya está.

I.- Ya está. Explícame que has hecho ahí.

Cri.- Porque yo he calculado, ¿no? Entonces he hecho 10 por 17, más o menos. Entonces... pensaba que no me iba a dar pero como... eh... me ha dado 170, he contado hasta el número, hasta 56 y me ha dado 14. Entonces, lo he restado y me ha dado 156.

I.- ¿Y los dos números consecutivos cuáles son?

Cri.- ¿Los dos números? Pues... ¡éste!, el 0 y el 1.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encuentra los errores de las que no lo estén

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Cri.- Aquí [primera multiplicación]. *Esto está mal, voy a poner mal y ahora voy a... corregir los errores.* [Permanece en silencio durante aprox. 28'']. *Ya está. ¡Ehhh!...no, sigo, sigo.* [Continúa en silencio unos 15'']. *¡Esto está mal!* [tercera multiplicación]. *Porque no se puede poner un número aquí más... pequeño, arriba. Lo otro sería 5 por 2, 10, me llevo 1 y aquí no tengo. 5 por...*

I.- Entonces, la tercera está mal. ¿Cómo tendría que ser?

Cri.- No, pero... puede ser bien, puede estar bien.

I.- Puede estar bien.

Cri.- Porque si aquí es 5 por 2, 10, y 3 por 2, 6 y 1, 7, podría estar bien. Pero yo creo...yo creo que sería éste aquí y éste aquí, 2 por 5.... Pero está bien, por mí está bien.

Y la última... [permanece en silencio unos 20'']. Ya está.

I.- A ver, explícame. ¿Aquí [primera multiplicación] dónde estaba el fallo?

Cri.- Aquí porque... en la segunda. 4 por 2, 8, no me llevo nada y 4 por 0 no son 4. 4 por 0 son 0 y luego ya 4 por 3, 12.... Y aquí [la suma de la primera multiplicación]: 4...; 10, me llevo 1; 6 y 1, 7, no me llevo ninguna; aquí han puesto 13 y lo he corregido y he puesto 12.

Aquí [segunda multiplicación] he encontrado el fallo en 2 por 5, 10, me llevo 1; 2 por 1, 2 y 1, 3 y habían puesto un 2. Y en la suma, era...0, como lo he corregido era un 8 y ya está.

En la tercera... es que... sí, en la tercera puede estar bien porque 5 por 2, 10, me llevo 1 y 3 por 2... 3 por 2, 6 y 1, 7, puede estar bien.

En la cuarta, he encontrado el fallo en la suma porque si son 0, habían puesto un 5, son un 8 y aquí [centenas del resultado total] habían puesto un 8 y es un 7.

I.- De acuerdo. Entonces, esta última está mal también.

Cri.- Sí, está mal.

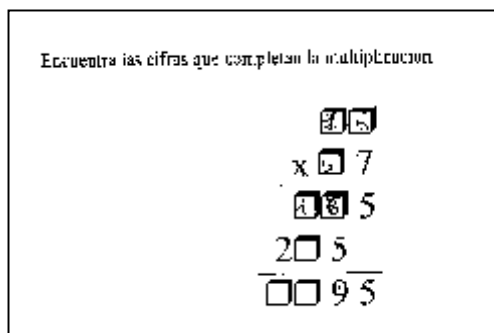
I.- Y la tercera quedamos en que está bien.

Cri.- Sí.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 5

A.- Producción escrita del alumno:



B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- [Tras 3' y 15'' aprox. de reflexión en silencio e intentos de resolución de la tarea por parte del alumno]. *¿Qué pasa?*

Cri.- *Pues es que no me da. Con el único 7 que puedo multiplicar es el 7 por 5 que es 35, lo pongo aquí el 5. Aquí tiene que ser un 4 y un 5 para dar un 9. Y si hago 7 por 5, 35, me llevo 3 y 7 por 1, 7, 8, 9 y 10... 0 y 5 pues ya es que no puedo.*

I.- [Después de unos segundos de espera] *Bueno, ¿pasamos a otra?*

Cri.- *Pasamos a otra porque...*

I.- *Esta está muy liosa.*

Cri.- [Asiente con la cabeza] *No consigo que me dé 9.*

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 6

A.- Producción escrita del alumno:

Ninguna

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- *¿Entiendes la primera pregunta?*

Cri.- *Espérate... Espérate, es que dice: "es decir..." ¡Ah!*

I.- *Se trata de esto. Fíjate que has corregido esta multiplicación [la segunda multiplicación de la tarea 4]. ¿Por qué hay que dejar aquí [señalando al resultado del segundo producto parcial] un hueco? ¿Por qué hay que ir desplazando esto hacia la izquierda? Y si hubiese otro [resultado parcial] lo tendrías que poner más a la izquierda. ¿Esto por qué?*

Cri.- *Porque si no... porque si no entonces tú harías 2 por 5, 10, ¿no?; entonces me llevo 1. 2 por 1, 2 y 1, 3. 3 por 5...15, es que hay que dejar huecos porque hay que ponerse debajo del número de lo que estás.*

I.- *En este caso.*

Cri.- *En este caso, hay que dejar este hueco y ponerlo aquí porque este número va con éste que lo tiene que multiplicar y que te daría éste...Entonces, si lo pusieras aquí ya te daría un 4 y fuera un lío. Pero que hay que ponerse detrás del número el que va, por orden... más o menos.*

I.- *Entiendo, entiendo. ¿Y la segunda pregunta?*

Cri.- *¿Por qué suman al final los productos...?*

I.- *¿Por qué se suma al final?*

Cri.- ¡Ah!, ¿por qué se suma? Para dar el resultado, para dar la suma total. Si no, entonces ya estarías y dices: ¿esto qué es?. Entonces, lo tendrías que sumar por fuerzas.

I.- Y digo yo que se podría también restar, ¿no?

Cri.- ¿Restar? No. Porque siempre en una multiplicación tienes que sumar.... Claro, porque si no dirías: ¿esto qué es?, un 30 y un 45. Esto no es nada; habrá que sumarlo y ya está, tú mismo lo sumarías... por eso así se...

I.- Bueno, pues ya hemos terminado.

[Fin de la entrevista]

Entrevista B-3:

Alumno: Silvia

Fecha de la entrevista: 19/03/2002

Curso: 5º PRI (10-11 años)

Centro: I.E.S de Almería Capital

Tarea 1

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula la siguiente suma:	7
	17
	17
	17
	- 17
	17
	17
	17
	17
	49

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Investigador.- Explícame. ¿Cómo la has hecho?

Silvia.- Pues he multiplicado así: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... 7 por 7, 49. Entonces, 49.

I.- ¿Y después con los "1"?

Sil.- Pues, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,... 1 por 7 y entonces le he sumado 4.

I.- Y te da...

Sil.- Once.

I.- Te da once.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:

En la biblioteca de Juan hay 16 estantes de libros. Si en cada estante ha colocado 12 libros. ¿cuántos libros en total puso Juan en su biblioteca?

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 12 \\ \hline 32 \\ 160 \\ \hline 192 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Sil.- Esto no lo he hecho yo nunca.

I.- No lo entiendes... ¿qué problema hay? Dice: "en la biblioteca de Juan hay 16 estantes de libros..." ¿Sabes lo que es un estante de libros?

Sil.- Una estantería.

I.- Una estantería. Pues hay 16. Si en cada estante ha colocado 12 libros, ¿cuántos libros en total puso Juan en su biblioteca?

Sil.- [Tras unos instantes de silencio] ...16 menos 12.

I.- Puedes escribir aquí todo lo que sea.

Sil.- [Tras realizar la resta en silencio en unos 15''] Umm, no...

I.- ¿No te convence? ¿Qué puedes hacer? ¿Qué se te ocurre hacer?

Sil.- [Reflexión en silencio durante 12'' aprox. antes de responder] 16 por 12.

I.- 16 por 12.

Sil.- [Realiza la multiplicación 16 x 12 en unos 30'' aprox.]

I.- 16 por 12. ¿Y cuánto te da?

Sil.- 192.

I.- 192... ¿podías haber resuelto de otra forma el ejercicio?

Sil.- [De nuevo silencio durante 23'' aprox.] Sería 12 por 16.

I.- 12 por 16. Bueno, pues vamos a pasar ya a la tarea número 3.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

El producto de dos números consecutivos es 156. Encuéntralos.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline 36 \\ 156 \\ \hline 192 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Sil.- ¿El producto de dos números consecutivos es 156?

I.- Entiendes... El producto es la multiplicación. La multiplicación de dos números seguidos es 156, se trata de encontrar esos números seguidos. Por ejemplo, el 1 y el 2 son números seguidos... ¿no son números seguidos el 1 y el 2?

Sil.- [Asiente con la cabeza]

I.- Sí... y al multiplicarlos, ¿cuánto da?

Sil.- ¿1 por 2?

I.- ¿Cuánto da 1 por 2?

Sil.- 2.

I.- 2. Ahora, tú tienes que encontrar dos números seguidos que al multiplicarlos dé 156.

Sil.- ¡Dios, qué difícil!... Multiplicarlos, ¿no?

Sil.- [Tras unos 35'' de reflexión en silencio] ¿Hay que poner 156 aquí...?

I.- Tú puedes escribir lo que quieras. He dejado un espacio para que escribas.

Sil.- [Permanece en silencio durante 45'' aprox. realizando cálculos]

I.- ¿Qué estabas pensando? Explicame un poco qué estabas intentando.

Sil.- Pues, [fragmento ininteligible; problemas de vocalización] ...por 6, entonces si... dos por... espérate. 2 por 4, te tienes que llevar 1 para que te dé 0... ¡No me sale!

I.- ¿No te sale? Tú has puesto 2 por 3. ¿Por qué has puesto el 2 y el 3?

Sil.- [Instantes de silencio] Porque he ido multiplicando haber lo que me salía...

I.- Para que diera...

Sil.- Sí.

I.- Para que diera 6.

Sil.- O 16... espera.

I.- O 16.

Sil.- [Tras un minuto aprox. de reflexión en silencio]. ¡No me sale!

I.- ¿No? Bueno, no te preocupes. Lo dejamos aquí.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encuentra los errores de las que no lo están.

$\begin{array}{r} 31 \cdot 2 \\ \times 12 \\ \hline 624 \\ 1248 \\ \hline 13104 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 12 \\ \hline 30 \\ 45 \\ \hline 470 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \times 38 \\ \hline 70 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 92 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 850 \end{array}$
$\begin{array}{r} 202 \\ - 8 \cdot 22 \\ \hline 1202 \end{array}$	$\begin{array}{r} 65 \\ - 150 \\ \hline -185 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ - 20 \\ \hline 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ - 22 \\ \hline 23 \end{array}$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Sil.- *¿Tengo que corregir las cuentas?*

I.- *Sí.*

Sil.- *Y las pongo aquí abajo.*

I.- *Como quieras. Sí, las puedes escribir abajo.*

Sil.- [Tras 1' y 45'' aprox. realizando la tarea en silencio] *¡Ya!*

I.- *¿Ya has terminado? Explícame... La primera [multiplicación], ¿está bien o mal?*

Sil.- *Está mal.*

I.- *Está mal.*

Sil.- *Porque...aquí es 4 por 0 y ha puesto 2 y debería ser 0.*

I.- *La primera está mal. ¿Y la segunda?*

Sil.- *Tampoco, porque... se ha comido... se llevaba 1 y no...*

I.- *Se llevaba 1.*

Sil.- *... y no la ha puesto.*

I.- *También está mal. ¡La tercera!*

Sil.- *Esta sí está bien.*

I.- *La tercera está bien... ¿y la cuarta?*

Sil.- *Está mal.*

I.- *Está mal.*

Sil.- *Porque hay que multiplicar... [disminuye progresivamente el tono de voz hasta quedarse en silencio].*

I.- *¿Qué es lo que se ha hecho ahí?*

Sil.- *Porque... 5 y 3 son 8 y aquí ha puesto el 5 y eso suma 1.*

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 6

A.- Producción escrita del alumno:

Ninguna.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- *¿Entiendes la primera [cuestión]?*

Sil.- [Tras unos instantes de silencio] *Sí, sí, pero es que no sé explicarlo.*

I.- *¡Ah, ya!. Se trata de ... ¿por qué se deja aquí un hueco? [Señalando al resultado del segundo producto parcial de la primera multiplicación de la tarea 4]. ¿Por qué esto [ese mismo resultado] se va desplazando a la izquierda? Esta fila y cada vez, cada vez más...*

Sil.- *Porque... por ejemplo, si tú sumas un número tiene que estar debajo del que está multiplicando.*

I.- *Aquí, por ejemplo [en la primera multiplicación de la tarea 4].*

Sil.- *Por ejemplo, debajo del 2 pues tienes que escribir... el principio, 2 por 2, 4 y tienes que...al principio, el 2. Y el segundo pues lo mismo, debajo del 4...*

I.- *Debajo del...*

Sil.- *... y lo multiplicas del 2.*

I.- *Y si hubiese otra fila...si hubiese aquí otro número [señalando a las centenas del segundo factor].*

Sil.- *¡Claro!, pues aquí empezarías... debajo de este número [el 0 que aparece en el resultado del segundo producto parcial de la primera multiplicación].*

I.- Ya, entiendo. Y...

Sil.- ¿Por qué se suman al final los productos parciales? ¿Esto? [Señala los productos parciales].

I.- Sí, esto. ¿Por qué al final hay que sumar?

Sil.- [Instantes de silencio; 12'' aprox.] No lo sé.

I.- Y no... restar, por ejemplo. O seguir multiplicando.

Sil.- Porque no hay más números.

I.- Porque no hay más números.

Sil.- Multiplicas porque no quedan más números.

I.- Bueno. Pero, ¿y sumar por qué? ¿Por qué hay que sumar?

Sil.- [Permanece en silencio sin decir nada]

I.- Bueno...

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 5

A.- Producción escrita del alumno:

Encuentra las cifras que completan la multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{1} \boxed{5} \\
 \times \boxed{5} 7 \\
 \hline
 \boxed{7} \boxed{4} 5 \\
 \boxed{2} \boxed{0} 5 \\
 \hline
 \boxed{} \boxed{} 9 5
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Ninguno destacable. Tras varios intentos fallidos de resolución en silencio, con escasos e inapreciables comentarios en voz baja, el alumno desistió de la tarea. En esta ocasión, no vimos oportuno insistir más mediante el establecimiento de un diálogo con el estudiante; preferimos, en cambio, proponerle la tarea número 7.

Tarea 7

A.- Producción escrita del alumno:

Para calcular la 2ª Fila de la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 22 \\ \hline \end{array}$$

1ª Fila
2ª Fila
3ª Fila

Se utiliza uno de los siguientes procedimientos:

(a) $2 \times 2 + 2 \times 2$
 $2 \times 2 + 2 \times 2$
 $20 \times 2 + 20 \times 2$
 $20 \times 2 + 20 \times 2$

(b) $2 \times 2 + 2 \times 2$
 $2 \times 2 + 2 \times 2$
 $20 \times 2 + 20 \times 2$
 $20 \times 2 + 20 \times 2$

(c) $2 \times 2 + 2 \times 2$
 $2 \times 2 + 2 \times 2$
 $20 \times 2 + 20 \times 2$
 $20 \times 2 + 20 \times 2$

(d) $20 \times 2 + 20 \times 2$

Elige el que te parezca correcto y justifica tu elección.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Sil.- ¿Aquí qué hay que hacer?

I.- Te explico. Para calcular la segunda fila de la multiplicación (aquí hay una multiplicación y aquí está la segunda fila) se ha utilizado uno de los siguientes procedimientos.... Para calcular esta segunda fila alguien, algún niño, ha cogido y la ha hecho con alguno de estos métodos, alguna de estas cuentas. Tú tienes que elegir el que te parezca que es correcto de todos esos.

Sil.- ¿La segunda fila o todas?

I.- La segunda fila. Está indicada con una flecha. Para calcular la segunda fila, hubo niños que han hecho esto [opción (a)], otros niños han hecho esto [opción (b)], otros esto [opción (c)] y otros esto [opción (d)]. Se trata de que tú averigües cuál es el método correcto.

Sil.- Pero, ¿puedo hacer la suma? Puedo hacer esta... que si puedo hacer esta suma y todo esto a ver que me sale.

I.- ¡Claro! Puedes hacerlo donde quieras.

Sil.- [Tras 1' 45'' en silencio y realizando cálculos] Me parece que es la (c).

I.- Te parece que es la (c).

Sil.- Sí, ésta.

I.- ¿Por qué?

Sil.- Porque yo he hecho esto, ¿no? Y me sale 40... y esto...

I.- ¿Cómo que te sale 40?

Sil.- ¡Es que no sé explicarlo!

I.- Bueno, a ver...

Sil.- Porque yo he hecho todas éstas de aquí, ¿no?

I.- Tu has hecho eso, todo.

Sil.- Entonces, me sale 40 y yo creo que aquí es 40.

I.- Crees que es 40 y ... ¿no lo puedes saber con seguridad?

Sil.- Es que todas éstas no salen 44.

I.- ¡Ahh!, ¿cuál es la que sale 44? ¿Hay alguna o no?

Sil.- No.

I.- ¿Ninguna? Y debería salir...

Sil.- 44.

I.- Debería salir 44.... Bueno, ninguna sale 44.

Sil.- No.

Nota: En este punto interrumpimos la conversación y la grabación. No obstante, la alumna continuó insistiendo un poco más hasta que detectó que la opción (b) daba como resultado 44. Por este motivo, terminó eligiendo la opción (b).

[Fin de la entrevista]

A.2.2.3 Tercer bloque de entrevistas (C)

Entrevista C-1:

Alumno: Tomás

Curso: 3º ESO (16 años)

Fecha de la entrevista: 17/04/2002

Centro: I.E.S de Córdoba Capital

Tarea 1

A.- Producción escrita del alumno:

Cacaba:	
12	17
12	17
12	17
+ 12	- 17
12	17
+ 2	17
12	17
84	<u>119</u>

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Investigador.- Explícame un poco cómo lo has hecho.

Tomás.- Esto... esto lo he sumado [primera suma]... así, como es muy fácil... y ya está. Y después éste [segunda suma], he cogido y he mirado cuántos 7 había y lo he... lo he multiplicado, 7 por los que hay.

I.- Ajá. O sea, ésta la has sumado [primera suma].

To.- Sí.

I.- ¿Cómo? 2 más 2 más 2 ...

To.- Sí.

I.- De acuerdo. Y en ésta [segunda suma] has multiplicado, ¿el qué?

To.- He multiplicado 7 por [contando] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

I.- ¿Y el 1 qué?

To.- Ostia, espérate es verdad.

I.- ¿Y el 1 cómo lo has hecho? Cuando llegas a él, ¿qué haces?

To.- Pues espérate, que me he equivocado.

To.- [Tras unos 10'' en silencio]. 111.

I.- 111... ¿111 te sale o 119? ¿Esto qué es, un 9 o un 1?

To.- 119, 119.

I.- Ah, 119. De acuerdo, ¿y no se te ha ocurrido hacerlo de otra forma? ¿Podrías hacerlo de otra manera?

To.- No sé, ahora mismo.... Hombre, lo puedo hacer sumándolo, ¿no? 7 más... 7 o así, multiplicando.

I.- Multiplicando el 7...

To.- ... por todos los 7 que hay.

I.- Por todos los 7. ¿Y después...?

To.- Lo que me salga, se lo voy sumando ya así [refiriéndose a los 1].

I.- El 1 va sumando 1, 1, 1,

To.- [Asiente].

I.- Pues nada, esta ha sido la primera.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encuentra los errores de las que no lo estén.

$\begin{array}{r} 302 \\ \times 42 \\ \hline 604 \\ 1208 \\ \hline 12684 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 32 \\ \hline 30 \\ 45 \\ \hline 480 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 780 \end{array}$
---	---	---

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

To.- ¿Lo que esté mal qué hago?

I.- Lo que esté mal lo corriges. Si quieres lo corriges ahí [sobre la propia multiplicación errónea] o haces de nuevo la multiplicación, como tú quieras.

To.- Le pongo así lo que es, ¿no?

I.- Sí. Sobre...

To.- [Transcurrido un 1' aprox.] Ya.

I.- Ya has terminado. Explicame lo que has hecho.

To.- Pues, he multiplicado 2 por 2, 4; 2 por 0, 0; estaba mal ahí, habían puesto un 2.

I.- La primera multiplicación está mal.

To.- Sí... y ya está, está bien ya. Después el 4: 4 por 2, 8; 4 por 0, 0 y había un 4. Y ahora he corregido la suma después.

I.- Entiendo. ¿Y la siguiente?

To.- La siguiente lo mismo. 2 por 5, 10, está bien; 2 por 1, 2 y 1 que me llevo, 3, y estaba puesto un 2. El 3 [decenas del segundo factor, del multiplicador] está bien y después la suma la he corregido.

I.- ¿Y la última?

To.- Y ésta está bien menos la suma.

I.- Menos la suma.

To.- Sí.

I.- ¿Qué problema había en la suma?

To.- Suma 3... 5 más 3, 8 y después no me llevo ninguna: 7 y habían puesto un 8 ahí [To. se olvida de corregir el 5 del resultado].

I.- De acuerdo. Muy bien.... Pero... 5... a ver, es que no me he enterado bien. Has hecho... decías que [el error] estaba en la suma, ¿no?

To.- Sí.

I.- ¿Y qué?

To.- ¡Ea!, 5 más 3, 8, no lo he puesto.

I.- Ah, que no lo has puesto. Vale, vale.

To.- Y el 7.

I.- De acuerdo.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula:

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 123 \\ \hline 12 \\ 24 \\ 40 \\ \hline 492 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

To.- Ya está.

I.- ¿Ya has terminado? Rápido, ¿no?. A ver....

To.- He multiplicado 3 por 4... son 12. 5 por 4, 20 y 1 por 4 y lo he sumado.

I.- De acuerdo. Sencillo.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:

Encuentra dos números naturales distintos de 1 cuyo producto sea 217

$$\begin{array}{r} 13 \\ \sqrt{217} \\ \underline{26} \\ 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \sqrt{217} \\ \underline{25} \\ 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \sqrt{217} \\ \underline{14} \\ 7 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

To.- Ésta es ya más complicada.

I.- ¿Entiendes la tarea?

To.- Que busque dos números que me salgan... 217, ¿no?

- To.-** [Tras 1' 15'' aprox. de reflexión en silencio] *¿Cómo lo hago? Como una de ecuación, ¿no?*
- I.-** *Tú lo haces como quieras.*
- To.-** *Umm.*
- I.-** *Tienes aquí espacio para escribir todo lo que quieras.*
- To.-** *Sí*
- I.-** [Después de 30'' en silencio sin escribir nada] *¿Qué se te ocurre hacer?*
- To.-** *No sé, poner... 217, ¿no? Ponerlo en forma de ecuación: "x" más "y" igual a....*
- I.-** *Ponerlo en forma de ecuación.*
- To.-** *"x" más "y" igual a 217.*
- I.-** *Igual a 217. ¿Y después?*
- To.-** *Pues, yo qué sé, averiguarlo. Lo que pasa es que no...*
- I.-** [Transcurridos unos 35'' en silencio] *¿No se te ocurre hacer nada? ¿Ni hacer ninguna cuenta ni nada parecido?*
- To.-** *No sé, ahora mismo no...*
- I.-** [Tras unos instantes de silencio]. *El enunciado está claro, ¿no?: encuentra dos números naturales distintos de 1, ninguno de ellos tiene que ser 1, cuyo producto sea 217, que al multiplicarlos dé 217....¿Cuáles podrían ser esos números?*
- To.-** [Pasados 30'' aprox.] *Voy a multiplicar 13 por 13, más o menos [comienza a realizar cálculos empleando de modo Técnico el algoritmo estándar escrito de la multiplicación].*
- I.-** *¿Qué estás intentando?*
- To.-** *Así... multiplicar 15 por 15 y acercándome más a 217.*
- I.-** [Después de 1' 15'' aprox. en silencio] *¿Y ahora qué estabas haciendo? ¿Probando?*
- To.-** *Sí.*
- I.-** *¿Y por qué has probado con 19 por 13?*
- To.-** *Porque así empezando, 3 por 9, 27, ¿no?; porque hay aquí un 7, ¿no? Intentando a ver....*
- I.-** *Ya.... Pero, ¿te sale o no?*
- To.-** *No.*
- I.-** *Bueno, si te parece lo dejamos aquí, ¿vale?*
- To.-** *Sí, porque... [sonríe].*

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 5

A.- Producción escrita del alumno:

Completa:

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \square \\
 \times \quad 7 \square 5 \\
 \hline
 \square \square \square 0 5 \\
 \square \square \square 0 \square \\
 \square 4 7 \square 7 \\
 \hline
 \square \square \square \square 7 5
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- *A ver, ¿qué pasa?*

To.- *Multiplico esto, el 1. Porque pone un 7 aquí [en el tercer resultado parcial] y aquí [unidades del primer resultado parcial] un 5....*

I.- [Asiente]

To.- *...será 1 con el 7.*

I.- *¿Y éste 7 de aquí [en referencia a las decenas del segundo factor, del multiplicador]?*

To.- *7 lo he hecho porque... [Breve interrupción; entra un profesor en la sala].*

I.- [Tras la interrupción] *¿Qué pasa?*

To.- *Que éste 7 lo he puesto aquí porque... como has sumado un 7 y un 5, ¿no?*

I.- *Ajá.*

To.- *Pues tiene que ser un 7... por huevos, ¿no? Y aquí entonces 7 por 1, 7.*

To.- [Tras unos 20'' en silencio] *Lo que pasa es que ahora no....*

I.- *Ahora qué pasa.*

To.- *Porque éste [decenas del multiplicador] si es un 7, ¿no?... el segundo número [decenas del multiplicando] no encuentro ninguno que sea... ¡ah, bueno!, como no sea el 0.*

To.- [Tras 45''] *No sé.*

I.- [Después de otros 40'' en silencio completando la tarea] *¿Ya? ¿Qué problema tenías por ahí?....*

To.- [Se limita a entregar la hoja con la tarea resuelta].

I.- *De acuerdo. Pues ya la última.*

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 6

A.- Producción escrita del alumno:

Ninguna.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

To.- *¿Qué tengo que hacer? Averiguar.... Para calcular la segunda fila de la multiplicación.*

I.- *De esta multiplicación. Ves, aquí hay una segunda fila. Esta es la primera fila....*

To.- *¡Ah, sí!*

I.- *Igual que ésta. Ésta es la primera fila, ésta es la segunda, la tercera....*

To.- *La voy haciendo así entonces.*

I.- *Y ahora dice: se ha utilizado uno de los siguientes procedimientos.*

To.- *Ah, ya.*

I.- *Alguien ha hecho éste, el (a); otros han hecho el (b), otros el (c) y otros el (d). Se trata de elegir el correcto.*

To.- [Tras unos instantes en silencio] *Pero qué pongo... éste que es el que ha sido la 3ª Fila, la 2ª o la 1ª.*

I.- *Sí, tienes que elegir una.*

To.- *Ahora qué pongo: 1ª Fila, 2ª Fila y 3ª Fila.*

I.- *No, simplemente la 2ª Fila.*

To.- *¡Ah, venga!*

I.- *Te tienes que fijar aquí [indicando la 2ª Fila].*

To.- *¡Ah, vale!*

I.- Para calcular solamente esto, la 2ª Fila, se ha hecho alguno de estos cálculos. La pregunta es: ¿qué cálculo es el correcto?

I.- [Pasados unos 45'']. Entiendes lo que hay que hacer, ¿no?

To.- Pero es que... yo qué sé. Porque aquí salen 44, ¿no?

I.- Arriba, 44 [en la 2ª Fila de la multiplicación].

To.- Aquí también, ¿no?

I.- Sí.

To.- Y... ¿qué tiene que ser, el que comprueba que aquí es 44 y el que se tenga aquí [una de las opciones], no? ¿O es entre los dos?

I.- ¿Cómo entre los dos?

To.- Si es esto, ¿no?; ¿qué es entre los dos o uno sólo [fragmento ininteligible]?

I.- No, esa fila nada más. Tú te tienes que fijar únicamente en esa fila, en la segunda fila. ¿Aquí sale un resultado, verdad?

To.- Sí.

I.- Aquí salen unos números. Pues, ¿cómo se calculan los números?

To.- ... Ésta. ¿La señalo o algo?

I.- ¿La (a)?

To.- Sí

I.- ¿Por qué la (a)?

To.- Sale 44, ¿no?

I.- Sí.

To.- 2 equis más 2 equis, 4.

I.- No, no, no. Esto no es una equis, esto es un "por".

To.- ¡Ah! Entonces, 2 por 2, 4...

I.- Sí.

To.- ... más 2 por 2, 4 que son 44... ¿no?

I.- 2 por 2, 4 más 2 por 2, 4, son 44.

To.- ¡Ah, no! Son 8.

I.- Son 8. ¿En qué quedamos?

To.- A ver, espérate. [Instantes de silencio] Ésta es. 2 por 2, 4 más 2 por 20 que son 40. 40 más 4, 44.

I.- ¿Entonces cuál eliges?

To.- La (b).

I.- La (b).

[Fin de la entrevista]

Entrevista C-2:

Alumno: Miguel Ángel

Curso: 3º ESO (16 años)

Fecha de la entrevista: 17/04/2002

Centro: I.E.S de Córdoba Capital

Tarea 1

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula:	
$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ 17 \\ 17 \\ + 17 \\ 17 \\ 17 \\ 17 \\ \hline 114 \end{array}$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Investigador.- Explícame cómo has hecho la primera suma.

Miguel Ángel.- Sumando. Pues, como va ser, con... ¡sumando los números!

I.- Ajá [expresión de entendimiento, no de respaldo a la respuesta dada].

M.A.- Normal y corriente. Una.....

I.- De acuerdo.

M.A.- Una operación muy sencilla.

I.- Muy bien, ¿y la siguiente?

M.A.- Igual.

I.- También sumando.

M.A.- Sí.

I.- Sumando el 7 más 7, más 7, más 7,

M.A.- O... he cogido y he multiplicado 7 por tantos números que haya y ya está.

I.- ¡Ah, que...! ¿Entonces cómo lo has hecho?

M.A.- A lo mejor unas veces de una forma y otras de otra. He multiplicado 7 por todas las veces que tiene éste y me ha salido 49.

I.- Y...

M.A.- Después he sumado 4 y después le he sumado todo esto [la columna de 1] para arriba.

I.- De acuerdo. Pasamos a al siguiente.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encuentra los errores de las que no lo estén.

$\begin{array}{r} 302 \\ \times 43 \\ \hline 604 \\ 1206 \\ \hline 12984 \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \\ \times 32 \\ \hline 28 \\ 420 \\ \hline 450 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 780 \end{array}$
$\begin{array}{r} 302 \\ \times 43 \\ \hline 604 \\ 1206 \\ \hline 12984 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 32 \\ \hline 30 \\ 450 \\ \hline 480 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 780 \end{array}$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

M.A.- Que le pongo una cruz a lo que esté mal, ¿no?

I.- Y lo corriges, si puedes.

M.A.- Ahora te la doy abajo.

I.- Y lo haces bien.

I.- [Pasados 1' 50'' aprox.] ¿Ya has terminado?

M.A.- Claro.

I.- Explícame qué pasaba aquí [1ª multiplicación].

M.A.- Aquí que es la primera. ¡Y está mal!, porque 2 por 2 son 4 y 2 por 0 son 0.

I.- Ajá.

M.A.- Entonces ya... Y aquí abajo, lo mismo. Que 4 por 2 son 8 y 4 por 0 son 0 y aquí ya el resultado abajo que ha variado... ya cuando están mal.

I.- De acuerdo. ¿La siguiente?

M.A.- Éste que... 2 por 5 son 10, me llevo 1. 2 por 1, 2 y 1, 3. Entonces está mal. Entonces ya la suma aquí también está mal.

I.- ¿Y la última?

M.A.- La última, la suma de aquí.

I.- Estaba mal la suma.

M.A.- Sí, porque esto... es 780 y no 850.

I.- 780 te sale como resultado. Pasamos a la siguiente.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula:

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 153 \\ \hline 12 \\ 60 \\ 20 \\ \hline 612 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Qué tal? ¿Cómo es ésa?

M.A.- Bien.

I.- ¿Cómo la has hecho?

M.A.- Pues, le he puesto este número [el 153] que es... que es el mayor número aquí arriba y he multiplicado.

I.- ¿Y esto último que estabas intentando ahí?

M.A.- A ver si me salía. A ver si veía que me salía.

I.- A ver si te salía, cómo.

M.A.- A ver si estaba bien el resultado. Comprobarla.

I.- ¿Y cómo lo ibas a comprobar?

M.A.- Esto lo que me estaba ya... yo... rayando.

I.- ¿Qué?

M.A.- Que me estaba rayando.

I.- ¡Ah!, que te estabas rayando.

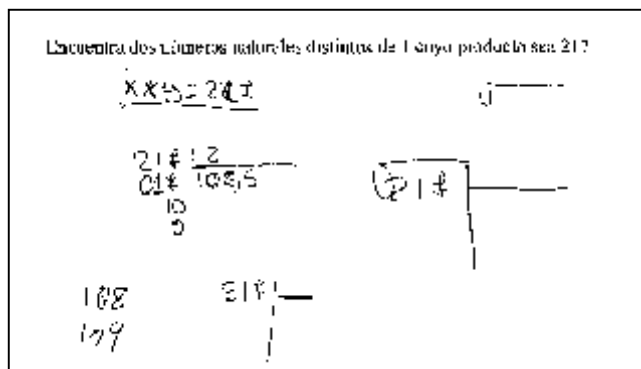
M.A.- Porque... no sabía cómo hacerla, así. Me... suena raro, que nunca lo he hecho así más.

I.- Muy bien, lo dejamos entonces. Vamos a pasar a esta otra, a ver qué tal.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:



B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Qué pasa?

M.A.- Cuyo producto sea.... Dos números naturales... uno "x"... y otro "y". ¿Puede ser así?

I.- ¿Cómo, perdona?

M.A.- Sí, un número es "x" y el otro número es "y".

I.- ¿Y qué pasa con eso?

M.A.- Que si está bien así.

I.- No lo sé. A ver, puedes escribir todo lo que quieras; tienes espacio aquí para escribir.

M.A.- [Unos 20" en silencio] No puede ser el mismo número, ¿no? Son números diferentes.

I.- Dos números naturales distintos de 1, cuyo producto sea 217.

M.A.- Uno del otro, ¿no?

I.- No, no, distintos de 1, del número 1. Que no pueden ser el 1. Ninguno de ellos puede ser el 1.

I.- [Tras 35" aprox.] ¿Ya?

M.A.- Ya no. Bueno, ¿esto puede ser un número? [en referencia al 108,5].

I.- Eso es un número pero no es un número natural.

M.A.- Claro, ¿natural qué es?

I.- Natural... pues el 1, el 2, el 3, el 4, el 5,....

M.A.- Claro, es número... ¡aunque tenga coma!... ¿Pero es número o no es número?

I.- Sí, es un número.

M.A.- O podía ser también el 108 y el 109.

I.- 108 y el 109.

M.A.- Porque a éste [al 108,5] le quitas medio y el otro 108 más medio son 109.

I.- ¿Entonces cuáles son los dos números al final?

M.A.- Podría ser uno... el 108 y el otro el 109.

I.- ¿Y multiplicados dan 217?

M.A.- ¿Multiplicados entre ellos dos?

I.- Claro, aquí dice: encuentra dos números naturales...

M.A.- Sí.

I.-... dos números, distintos de 1, que al multiplicarlos dé 217.

M.A.- Esto ya es una... una...

I.- ¿Tú para qué has hecho la división?

M.A.- Para averiguar los números.

I.- ¿Cuáles son esos dos números?

M.A.- El 108 y el 109.

I.- Ajá.

M.A.- Bueno, sería la 108... cero y medio. Bueno, cero y medio, pongo ahí [en el 109] el “y medio”... ¡jea!

I.- Y...

M.A.- Pero estos dos números al multiplicarlos entre ellos no da 217.

I.- ¿Entonces?

M.A.- Está mal... ¿o no?

I.- Hombre, no sé. Aquí lo que hay que encontrar son dos números que al multiplicarlos dé 217.

M.A.- [Tras unos 35'' en silencio] Esa, ¿no?

I.- ¿Cómo?

M.A.- Esto hay que hacerle [raíz cuadrada de 217].

I.- ¿Eso qué es?

M.A.- Esto una... no me acuerdo de ese nombre ahora. Una... raíz cuadrada.

I.- Una raíz cuadrada.

M.A.- Claro.

I.- Sí.

M.A.- ¡Ea, dan dos números!

I.- Sí.

M.A.- Y esos dos números se multiplican entre ellos.

I.- ¿Y cuánto da?

M.A.- Eso ya no lo sé. Porque no me acuerdo de hacerlas.

I.- Bueno. ¿No se te ocurre hacerlo de otra forma?

M.A.- De ésta nada más. A lo mejor de esto pero es más lioso ya.

I.- ¿De esto...?

M.A.- De ecuaciones.

I.- De ecuaciones.... Bueno lo dejamos aquí y pasamos a la siguiente tarea.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 5

A.- Producción escrita del alumno:

Completa:

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \square \\
 \times \quad 7 \square 5 \\
 \hline
 \square \square \square 0 5 \\
 \square \square \square 0 \square \\
 \square 4 7 \square 7 \\
 \hline
 \square \square \square \square \square 7 5
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- Muy bien. ¿Me podrías explicar cómo lo has hecho, más o menos?

M.A.- Pues he ido averiguando los números según éstos que vienen aquí, concretando. A lo mejor el 5: 5 por 1, 5; 5 por 0 son 0...

I.- Este 1 [unidades del multiplicando] por ejemplo, ¿cómo sale?

M.A.- Este 1 sale... de aquí que sale un 5 y el 5 para multiplicarlo por un número que tiene que... que es el 1 para que dé 5. Igual que aquí: el 7 [centenas del multiplicador] por 1 son 7.... El 0 éste [decenas del multiplicando] porque viene aquí completando el 0, estos dos. Entonces, sería: 5 por 1 son 5, no me llevo ninguna y 5 por 0 son 0. Entonces tiene que ser que dé 0. Y aquí...

I.- ¿Y el 2?

M.A.- Y después aquí sale también.

I.- Ajá.

M.A.- Y el 2... de éstos de aquí [resultado del tercer producto parcial]. Porque tienes que multiplicar un número, el 7, para que te dé... con un segundo número el 4. Entonces, podría ser... el 14.

I.- De acuerdo, entiendo. Bueno y te da al final, ¿no?

M.A.- [Asiente].

I.- Y ya la última.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 6

A.- Producción escrita del alumno:

Para calcular la 2ª Fila de la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 22 \\ \hline \end{array}$$

→ 1ª Fila
→ 2ª Fila
→ 3ª Fila

Se ha utilizado uno de los siguientes procedimientos:

(a) $2 \times 2 + 2 \times 2$
(b) $(10) 2 \times 2 + 2 \times 20$
(c) $10 \times 2 + 20 \times 2$
(d) $20 \times 2 + 20 \times 20$

Elige el procedimiento que te parezca correcto y justifica tu elección.

16×32

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

M.A.- Que la haga, ¿no?

I.- Umm... No, mira: para calcular la segunda fila de la multiplicación, es decir, para calcular esto, la 2ª Fila, se ha utilizado... otros alumnos han utilizado uno de los siguientes procedimientos. Uno ha hecho esto [opción (a)]...

M.A.- Para averiguar nada más que la segunda fila.

I.- Para averiguar la 2ª Fila, nada más.

M.A.- La de 2 por 22, ¿o no?

I.- Sí, la segunda fila. Entonces, unos han hecho este cálculo [opción (a)], otros han hecho éste [opción (b)], otros han hecho éste [opción (c)] y otros han hecho éste [opción (d)].

M.A.- Esos cálculos.

I.- Esto es un signo "más" y esto es un signo "por". Esta es la multiplicación, ¿no?

M.A.- Sí.

I.- Que no es una equis ni nada, es una multiplicación. Entonces, hay que elegir de entre todos esos procedimientos, de estos cuatro,...

- M.A..-** *Tiene que ser alguno de los cuatro.*
- I.-** *... el correcto.*
- M.A..-** *Hay uno correcto entonces.*
- I.-** [Tras unos 30'' en silencio] *¿Cuál es?*
- M.A..-** *La (b).*
- I.-** *La (b). ¿Y por qué es la (b)?*
- M.A..-** *Porque 2 por 2 son 4 más 2 por 20, que son 40, 4 y 40 son 44; que sería lo que sería 2 por 22, que son 44.*
- I.-** *Mira, te voy a hacer dos preguntas para terminar. Una, ¿por qué se tienen que dejar aquí huecos? [se utiliza como soporte la segunda multiplicación de la tarea 2 corregida por el alumno].*
- M.A..-** *¿Que por qué se tienen...?*
- I.-** *¿Por qué se deja aquí un hueco? Y si multiplicases otra vez tendrías que empezar por aquí y dejar otro hueco. ¿Por qué crees que es eso?*
- M.A..-** [Transcurridos unos instantes de silencio] *No sé.*
- I.-** *¿No se te ocurre ninguna explicación?*
- M.A..-** [Ininteligible].
- I.-** *¿Qué?*
- M.A..-** *Que no me lo han explicado.*
- I.-** *Pero es cierto que...*
- M.A..-** *Que se da así... huecos.*
- I.-** *... que se dejan huecos. Y... ¿entonces qué pasa?*
- M.A..-** *No... sé.*
- I.-** *¿Y por qué se suma? Fíjate tú que aquí sale un 30, aquí un 45....*
- M.A..-** *Porque....*
- I.-** *¿Por qué se suman al final?*
- M.A..-** *Esta es la sum.... El 30 éste es de 2 por 15 y el 3 [decenas del multiplicador] éste es de 3 por 15. Porque el 30 éste se tiene que sumar para que dé el número.*
- I.-** *A ver, ¿el 30 es de qué?*
- M.A..-** *De 2 por 15.*
- I.-** *Y el...*
- M.A..-** *Y el 45 es de 3 por 15.*
- I.-** *Ajá. ¿Y después?*
- M.A..-** *Hay que sumarlos.*
- I.-** *Pero...*
- M.A..-** *Yo qué sé.*
- I.-** *... 30 más 45 no son 480.*
- M.A..-** *Ya, porque se deja ahí el espacio.*
- I.-** *¿Y ese espacio?*
- M.A..-** *Es por... por lo de ir sumando... al final, ¿no? Sí.*
- I.-** *A ver, a ver.*
- M.A..-** *Eso no lo entiendo yo.*
- I.-** *Pero tú dices...*
- M.A..-** *Hay que dejar un espacio. Pero... yo no sé porqué se deja ese espacio y eso afecta a que se sume así. Porque si no... si... la suma normal sería 45 debajo del 30.*
- I.-** *Y no se hace así. Porque según tú...*
- M.A..-** *No son 30 más 45, son... 30 más 450 [se ríe].*
- I.-** *Más 450.*
- M.A..-** *Aquí es como si hubiera un 0.*
- I.-** *Hazlo aquí; explícame. Si tienes que escribir algo lo pones aquí que hay espacio.*
- M.A..-** *¡Ea!, ya sé porqué es esto.*
- I.-** *A ver.*
- M.A..-** *Porque, tiene aquí un 0... Yo me entiendo.*

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Investigador.- ¿Ya?

Cristina.- Ya.

I.- Bueno, explícame. ¿Cómo la has resuelto?

Cri.- Umm, en vez de estar contando con los dedos pues he ido diciendo: 2, 4, 6, ..., así; contando los 2 y lo he puesto.

I.- Ajá.

Cri.- Me llevo 1, pues he contado los 1 y los he sumado.

I.- Muy bien, ¿y al otra?

Cri.- Pues, he dicho 7 y 7, 14 y 7... lo he ido sumando poco a poco.

I.- ¿Y con los 1?

Cri.- ¡Lo mismo que antes!

I.- Lo mismo que antes. ¿Y se te ocurre hacerlo de otra forma o no?

Cri.- Pues... [instantes de silencio]. 17 y 17...

I.- ¿Cómo?

Cri.- En vez de por uno... no, mal.

I.- No, no. Dime, dime.

Cri.- No, no, no.

I.- 17 más 17.

Cri.- Y después 17 pero así no, es más difícil.

I.- Tú haces 17 más 17 y lo haces. Y después, lo que te dé le sumas 17.

Cri.- Sí, pero no lo suelo hacer así.

I.- Ya. Muy bien,...

Cri.- No sé.

I.- ... ya hemos terminado la primera.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encierra los errores de las que no lo estén.

$\begin{array}{r} 307 \\ \times 42 \\ \hline 614 \\ 1248 \\ \hline 13104 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 32 \\ \hline 36 \\ 480 \\ \hline 498 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 880 \end{array}$
$\begin{array}{r} 307 \\ \times 42 \\ \hline 607 \\ 1208 \\ \hline 1208 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ \times 32 \\ \hline 36 \\ 480 \\ \hline 172 \end{array}$	

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Cri.- Si encuentro el error qué hago, ¿lo tacho?

I.- ¡Ah!, como quieras. Táchalo y lo corriges; o si quieres lo haces abajo o lo pones así... Mejor puedes hacerlo abajo, es decir, lo tachas y después lo haces abajo bien.

Cri.- Vale.

I.- [Transcurridos unos 45'' y viendo la intención de la alumna por borrar lo escrito] No te preocupes por la goma, ¿sabes? Si te equivocas lo vuelves a hacer aquí o lo tachas. No hay problema.

Cri.- [Tras otros 45'' aprox.] Ya está.

I.- ¿Ya está? Cuéntame. ¿Qué pasaba en la primera?

Cri.- Que... eran 2 por 0, 0 y ponían 2. Como si... se hubieran llevado 2 y [fragmento ininteligible].

I.- De acuerdo. Pero después has tachado más, ¿no?

Cri.- Aquí ha pasado lo mismo [segundo resultado parcial] y ya sumando pues está mal.

I.- Y lo has corregido aquí, ¿verdad?

Cri.- Lo he corregido.

I.- ¿En la siguiente?

Cri.- Que no le han sumado las que se lleva.

I.- Que no le han sumado las que se llevaba.

Cri.- Sí. Y al sumarla pues está mal.

I.- Y también la has corregido.

Cri.- Sí.

I.- ¿Y la última?

Cri.- La última, sumarla.

I.- ¿Cómo sumarla?

Cri.- Estaban bien pero al sumarlas está mal.

I.- Que se han equivocado al sumar.

Cri.- Sí.

I.- Y también la has corregido, ¿no?

Cri.- Yo creo que está bien.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula:

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 153 \\ \hline 12 \\ 60 \\ \hline 612 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Ya has terminado?

Cri.- [Asiente].

I.- Qué rápido, ¿no? ¿Fácil o difícil?

Cri.- Fácil.

I.- Fácil.

Cri.- Aunque así no la he hecho nunca. Pero vaya...

I.- ¿Cómo la has hecho?

Cri.- Calculando siempre... esto arriba [el 153] y el de abajo...

I.- ¡Ah!, ¿y ahora cómo...?

Cri.- Multiplicando al revés.

I.- ¿Pero cómo lo has multiplicado?

Cri.- Pues, 3 por 4, 12 y lo pongo; y lo otro debajo del [palabra ininteligible]. ¡No sé explicarme!

I.- ¡¿Qué no sabes explicarte?! Sí, te explicas muy bien.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:

Encuentra dos números naturales distintos de 1 cuyo producto sea 217

$$\begin{array}{r}
 217 \ 12 \\
 017 \ 105 \\
 \quad \quad \times 2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 10
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿La entiendes?

Cri.- Yo no me he enterado.

I.- A ver...

Cri.- Encuentra dos números naturales distintos de 1 cuyo producto sea 217.

I.- [Tras unos segundos de silencio] Tienes que encontrar dos números, que no sean 1, dos números que al multiplicarlos dé 217.

Cri.- Al multiplicarlos.

I.- Sí. [Pasados unos segundos] Puedes escribir ahí, hacer todas las cuentas que quieras. [Tras 12'' de silencio] Sabes cuál es la idea, ¿no? ¿Tú me puedes decir, por ejemplo, dos números que al multiplicarlos dé 4?

Cri.- ¡2 por 2! [Sonríe].

I.- Claro. Pues entonces me tienes que decir dos números que al multiplicarlos dé 217.

Cri.- [Después de unos 35'' en silencio] Si ahora multiplico por 2 me da eso.

I.- ¿Cuál? ¿Qué número?

Cri.- Bueno, tienen que ser dos números nada más, ¿no?

I.- Pero déjalo, no borres. Escribe ahí, escribe por otro lado.

Cri.- Es que iba a multiplicar eso [el 105] y el 2.

I.- Bueno, multiplícalo en otro lado.

Cri.- Y me sale eso. Luego, son dos números nada más...

I.- ¿Cómo que son dos números?

Cri.- ¡No! ¡Uff!, así no es. La goma.

I.- No, déjalo.

Cri.- ¡Es que me he equivocado yo!

I.- A mí me interesa así para después ver dónde te has equivocado. Que no importa, ¿eh?; tú si quieres sigue escribiendo aquí.

Cri.- Es que me he equivocado yo.

I.- Vale, muy bien.

Cri.- Y ahora... [pasados 12'' aprox.] ¡Yo qué sé!

I.- ¿No se te ocurre? ¿Por qué has hecho aquí una división?

Cri.- Porque... [se ríe] yo qué sé, se me ha ocurrido.

I.- ¿Qué números ibas a buscar? ¿Qué números estabas buscando?

Cri.- Estaba probando, a ver si...

I.- [Tras unos instantes de silencio] Todavía tienes espacio para escribir. ¡Hasta que no lo rellenes todo!

Cri.- No se me ocurre nada. [Tras unos 25'' pensando] No caigo.

I.- No caes.

Cri.- No.

I.- ¿No se te ocurre nada? ¿Tampoco quieres intentar algo más?

Cri.- [Silencio durante unos 15'']

I.- Bueno...

Cri.- No lo encuentro.

I.- ... lo dejamos ahí entonces.

Nota: En esta tarea la alumna ha empleado el algoritmo de modo Técnico en una situación Exclusiva de Aplicación: la comprobación de una división; la prueba de la división: $D = d * C + R$.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 5

A.- Producción escrita del alumno:

Completa:

$$\begin{array}{r}
 \square \square 1 \square \square \\
 \times \quad 7 \square 5 \\
 \hline
 \square \square \square 0 5 \\
 \square \square \square 0 \square \\
 \hline
 \square 4 7 \square 7 \\
 \hline
 \square \square \square \square \square 7 5
 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Cri.- ¿Aquí qué puedo poner, cualquiera? ¿Tengo que multiplicarlo por 1 y ponerlo?

I.- ¿Cómo?

Cri.- Como aquí no pone número y ahí tampoco... [se refiere a 5 por las unidades de millar del multiplicando y el correspondiente resultado. Todo ello después de haber completado con 1 y 0 las unidades y decenas del multiplicando, sin considerar para nada la información disponible y necesaria de la parte inferior del algoritmo. El 1 lo sitúa porque es un número que multiplicado por

5 da 5 y el 0 porque es un número que multiplicado por 5 da 0, lo que concuerda respectivamente con las unidades y decenas del primer resultado parcial].

I.- *Ya. No sé... tú verás.*

Cri.- *5 por 1, 5; 5 por 0, 0...* [retoma el inicio de nuevo].

I.- *Tienes que encontrar números que den esa multiplicación, para que esté bien la multiplicación.*

Cri.- [Tras 25'' pensando en silencio]. [Exclamación ininteligible].

I.- *¡Vamos a ver! No lo entiendes. Aquí faltan unos números, he hecho la multiplicación y he escondido unos números y ahora tú tienes que averiguarlos.*

Cri.- *Bueno, voy a seguir.*

I.- *Vale, pues ya está. ¿Qué número tienes que poner aquí? ¿Qué número hay que poner aquí o aquí o aquí [señalando distintos huecos]? ¿O qué número hay que poner aquí [unidades del multiplicando, del primer factor]? Tú has puesto aquí un 1, ¿por qué has puesto un 1?*

Cri.- *Porque si multiplico 5 por 1, sale el 5.*

I.- *¿Y el 0 por qué lo has puesto?*

Cri.- *Porque 5 por 0 son 0.*

I.- *Pues así.*

Cri.- [Tras unos instantes] *¡Pero es que aquí no tengo nada!* [en referencia al extremo de la izquierda del primer producto parcial]. *No sé, no caigo.*

I.- *No caes. ¿No puedes seguir completando más?*

Cri.- [Pasados 35'' aprox.] *¡Sí me da!*

I.- *Aquí has puesto un 7, ¿por qué?*

Cri.- *7 por 1, 7. Esto no lo he completado todavía pero si después sumas el otro 5, 7 y 0, 7... [en referencia a la suma final, 3ª columna empezando por la derecha].*

Cri.- [Tras unos 10'' de silencio, se ríe].

I.- *¿Qué? ¿No puedes seguir? Sí, ¿no?. Venga, a ver...*

Cri.- *7 por 0, 0; 7 por 1... 7 [en el tercer producto parcial].*

Cri.- [Transcurridos 1' 20'' aprox.]. *¿Puede ser así?*

I.- *¿Cómo lo has hecho? ¿Sabrías explicarme un poco cómo lo has hecho?*

Cri.- *Pues, éste lo he dejado para el último...*

I.- *¿Cuál?*

Cri.- *... porque no me valía.*

I.- *El 2.*

Cri.- *El 5, porque no sabía qué número poner [continúa con las unidades del multiplicador, del 2º factor] pues he seguido con éste [el 7]. Y he buscado un número en la tabla del 7 que me dé 4, al final, y 7 por 2 son 14, y los otros ya los he buscado.*

I.- *Y ya encontraste éstos [el 2 del multiplicando y el 1 del tercer resultado parcial], ¿no? ¿Y los otros tres?*

Cri.- *Pues ya... multiplicando.*

I.- *Como explicaste antes, ¿no?*

Cri.- [Asiente con cierta duda todavía].

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 6

A.- Producción escrita del alumno:

Ninguna.

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Cri.- ¿La hago?

I.- ¿Entiendes? Mira, aquí lo que hay que hacer...

Cri.- Calcular.

I.- Te lo leo: para calcular la 2ª Fila de la multiplicación, esta segunda fila, se han utilizado...

Cri.- ¡Ah!, creí que era eso nada más.

I.- Claro, es que hay que leerlo todo.

Cri.- Se ha utilizado uno de los siguientes procedimientos... Elige el procedimiento que te parezca correcto y justifica tu elección. 2 por 2 más 2 por 2; 2 por 2 más 2 por 20; 20 por 2 más 20 por 2; 20 por 20 más 20 por 20... [expresión de admiración ininteligible].

I.- Sí, la han hecho así. Para calcular la segunda fila han hecho una de esas cosas.

Cri.- [Transcurridos 25'' aprox. de reflexión silenciosa]. 2 por 2 y 2 por 2 [sonríe].

I.- ¿Cuál eliges entonces?

Cri.- [Tras unos 30'' de silencio]. Esa misma [la opción (a)].

I.- ¿Esa misma? ¿Por qué esa misma?

Cri.- Porque las otras son más raras.

I.- Porque las otras son más raras. Veamos, ¿por qué eliges la (a)? Tú entiendes lo que pone aquí, ¿no?: 2 por 2 más 2 por 2. ¿Por qué dices que ésta es la solución correcta?

Cri.- Porque para la segunda hay que hacer 2 por 2 y después otra vez 2 por 2. Yo qué sé.

I.- Bueno...

Cri.- ¡Las otras son más raras!

I.- Las otras son más raras. [Tomando la primera multiplicación corregida de la segunda tarea] Mira, para terminar te voy a hacer un par de preguntas solamente: ¿por qué hay que dejar aquí un hueco cuando se multiplica? Sabes que cuando se multiplica hay que ir dejando huecos, ¿por qué hay que dejar un hueco ahí? [Instantes de silencio] ¿Se te ocurre algo?

Cri.- No. [Pasados 10'' aprox.]. Porque hay que empezar, porque... se pone el número debajo del que multiplica.

I.- ¿En este caso?

Cri.- Si aquí hay otra cifra pues empiezas debajo de esa cifra, aquí.

I.- Por ejemplo, aquí con el 4, ¿por dónde tienes que empezar?

Cri.- Debajo del 4.

I.- Debajo del 4.

Cri.- Aquí.

I.- Y por eso empiezas aquí con el 8, por eso pones el 8 aquí.

Cri.- Sí.

I.- Es que no lo entiendo muy bien. Explícate.

Cri.- ¡Es que no me entiendo ni yo!

I.- ¿Por qué pones el 8 aquí, por qué hay que dejar un hueco aquí?

Cri.- [Instantes de silencio]. ¡Porque me lo dijeron así!

I.- Porque te lo dijeron así.

Cri.- Yo qué sé.

I.- ¿Y por qué hay que sumar? Tú sabes que después hay que sumar, ¿eso por qué?

Cri.- ¡Para saber... el total!

I.- Para saber el total.

Cri.- Yo qué sé.

I.- Pero digo yo, ¿por qué se tiene que sumar y no restar o multiplicar?

Cri.- ¡Porque la han hecho así, je! No.

I.- Porque la han hecho así.

Cri.- No, porque... [momentos de silencio]. Porque es como si estuviera sumando 302, 42 veces... No sé.

[Fin de la entrevista]

Entrevista C-4:**Alumna:** Matías**Fecha de la entrevista:** 17/04/2002**Curso:** 1º ESO (12-13 años)**Centro:** I.E.S de Córdoba Capital***Tarea 1***A.- Producción escrita del alumno:

Calcula:	
12	17
12	17
12	17
+ 12	+ 17
12	17
12	17
12	17
84	<u>118</u>

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:**Investigador.-** *¿Ya? Explícame cómo lo has hecho.***Matías.-** *Pues...***I.-** *Esta primera.***Ma.-** *Ésta he sumado los 2 y me ha dado...***I.-** *Los has sumado, ¿cómo?***Ma.-** *Que lo he sumado: 2, 4, 6,... así. Y después lo que me he llevado, lo he sumado con el otro [columna de los 1].***I.-** *¿Y el otro?***Ma.-** *El otro, he sumado también... lo mismo que la otra pero con los 7.***I.-** *¿Cómo?***Ma.-** *Pues así, como yo sé que 7 y 7 son 14...***I.-** *Sí.***Ma.-** *... 14 más 14 y más 14 y más 7. Y lo que me ha dado se lo he sumado con lo otro [columna de los 1].***I.-** *De acuerdo. ¿Y lo podrías haber hecho de otra manera? ¿Se te ocurre haberlo hecho de otra forma?***Ma.-** *Sí.***I.-** *¿Cómo?***Ma.-** *Así, los dos juntos.***I.-** *¿Cómo los dos juntos?***Ma.-** *Pues este número con ese, con ese,... así.***I.-** *¿Los dos juntos? Es que no comprendo muy bien.***Ma.-** *Todo así, sin hacer eso primero.***I.-** *¿Cómo? 17...***Ma.-** *...más 17...***I.-** *Más 17 y lo haces. Y lo que te dé le sumas 17.***Ma.-** *No sé.***I.-** *¿O cómo?***Ma.-** *Así.***I.-** *¿Y de alguna otra forma o no?*

Ma.- [Tras unos instantes de silencio] *No.*

I.- *Bueno, esta era la primera actividad. Ahora pasamos a la segunda.*

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 2

A.- Producción escrita del alumno:

Determina si las siguientes multiplicaciones están bien hechas y encuentra los errores de las que no lo estén.

$\begin{array}{r} 302 \\ \times 42 \\ \hline 604 \\ 1208 \\ \hline 12604 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 32 \\ \hline 20 \\ 45 \\ \hline 420 \\ 450 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 52 \\ \hline 30 \\ 75 \\ \hline 800 \end{array}$
---	--	---

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- *¿Me puedes explicar un poco qué pasaba en cada una? En la primera.*

Ma.- *En la primera que 2 por 2 son 4 y 2 por 0 no son 2. Ahí tiene un fallo.*

I.- *Sí.*

Ma.- *Y el segundo fallo está en 4 por 2 que son 8, está bien, y 4 por 0, 0 y ahí han puesto 4.*

I.- *Y también está mal.*

Ma.- *Claro. Y después hemos sumado y... y si están mal los números esos, está mal la suma.*

I.- *¿Y la segunda?*

Ma.- *Pues, la segunda... 2 por 5 y son 10, me llevo 1 y 2 por 2 no son 3, 2 por 1 no son 3. Y eso era lo que me llevaba.*

I.- *¿Y la tercera?*

Ma.- *La tercera es... la tercera está todo bien menos... menos la suma.*

I.- *Ajá.*

Ma.- *Y 3 más 5 no son 5, son 8.*

I.- *Muy bien, te voy a poner otra.*

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 3

A.- Producción escrita del alumno:

Calcula:

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 153 \\ \hline 12 \\ 60 \\ 20 \\ \hline 612 \end{array}$$

B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

Ma.- Ya.

I.- ¿Ya? ¿Cómo lo has hecho?

Ma.- Pues, he multiplicado primero 3 por 4...

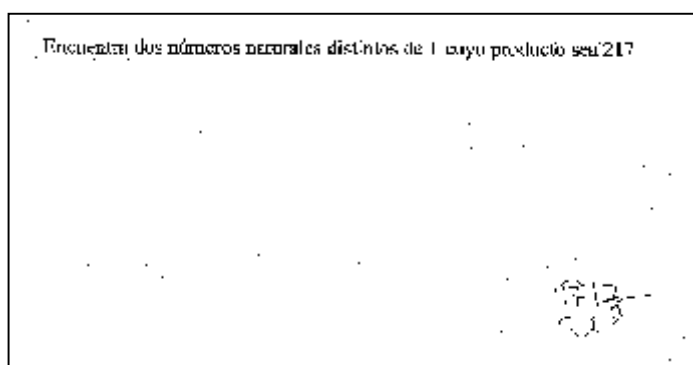
I.- Sí.

Ma.- ... que son 12, después 5 por 4 y después 1 por 4. Y después lo he sumado.

[Paso a la siguiente tarea]

Tarea 4

A.- Producción escrita del alumno:



B.- Diálogo establecido tras la presentación y resolución (o intento de resolución) de la tarea por el alumno:

I.- ¿Entiendes la tarea? Mira, aquí lo que tienes que encontrar son dos números que al multiplicarlos dé 217. Si yo te digo que encuentres dos números que al multiplicarlos dé 4, ¿sabrías decírmelos?. ¿Dos números que al multiplicarlos dé 4?

I.- [Transcurridos 15'' en silencio] ¿Entiendes o no? Dos números que al multiplicarlos dé 4.

Ma.- [Tras unos 7''] El 2, ¿no?

I.- El 2. ¿Y el otro número?

Ma.- Y el 4.

I.- Pero 2 por 4 no son 4.

Ma.- Es verdad, 2 por 2.

I.- 2 por 2. Pues ahora con 217.

I.- [Después de unos 25''] ¿Qué se te ocurre hacer?

Ma.- Pues... yo qué sé. 2 por... ciento.... [Unos 18'' de reflexión en silencio] ¡Ese es difícil!

I.- ¿Es difícil? ¿Qué se te ocurre? [Tras 15'' aprox.] Antes dijiste: "2 por ciento...".

Ma.- Ciento...

I.- [Tras unos 10'' de silencio y viendo que el alumno aún no se decide a escribir nada] Puedes escribir aquí todo lo que quieras.

Ma.- [Transcurridos otros 30'' de cálculo escrito y reflexión en silencio sólo interrumpida por algunos comentarios en voz baja (apenas apreciables) sobre los cálculos] 2 por... 108.

I.- 2 por 108. ¿Y cuánto sale 2 por 108?

Ma.- Pues... 2... 16, o por ahí.

I.- *¿Dos dieciseis?*

Ma.- [Expresión ininteligible].

I.- *Tiene que salir dos diecisiete.*

Ma.- [Tras unos instantes de silencio] *¡Yo qué sé!*

I.- *Bueno, ¿no se te ocurre hacerlo de otra forma?... ¿De alguna otra manera?*

Ma.- [Después de unos 10'' de silencio] *Qué va.*

I.- *¿No? Bueno, lo dejamos aquí.*

Nota: Dimos por concluida la entrevista en esta tarea por falta de tiempo.

[Fin de la entrevista]

ANEXO III

SEGUNDO ESTUDIO EMPÍRICO

A.3.1 Introducción

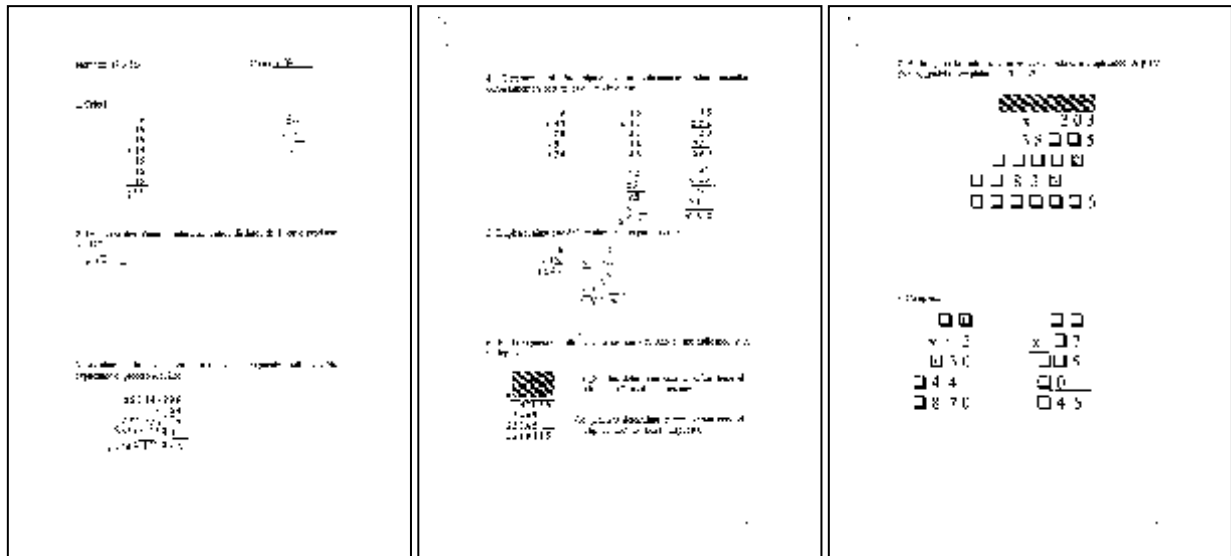
En este anexo se exponen las entrevistas realizadas en la segunda experiencia empírica descrita en el capítulo VIII. Para cada uno de los 24 alumnos entrevistados se exponen, por este orden:

- el registro escrito de lo realizado en las tareas planteadas.
- la transcripción de los diálogos establecidos en cada una de las tareas. Con la intención de describir de modo preciso lo acontecido en estos diálogos, la transcripción viene acompañada con aclaraciones situadas sobre las acciones realizadas por los alumnos y el tiempo transcurrido entre los distintos intervalos de silencio identificados.
- el tipo de respuesta dada por cada alumno en las diferentes situaciones planteadas, de acuerdo con la clasificación desarrollada en el apartado 8.6. Éstos se van presentando en cada tarea junto con el diálogo correspondiente.

Interesa recordar que el formato en el que se presentan las situaciones explica que en ocasiones no se llegue a producir registro escrito o diálogo con el entrevistador. En ningún caso esta circunstancia debe entenderse como una limitación, pues como ya se aclara en el apartado 8.5.2 empleamos tareas que requieren respuestas escritas, verbales o las dos conjuntamente.

A.3.2 Transcripción de entrevistas

María (1º ESO) [13/05/2003]



Situación 1

No se llega a establecer ningún diálogo pues la alumna utiliza directamente el algoritmo estándar escrito del producto de un modo Técnico para resolver la suma.

Respuesta de tipo 1b

Situación 2

María.- *Naturales es sin decimales ni nada de eso.*

Investigador.- *Exactamente, eso es.*

Ma.- [Instantes de silencio] *¿Podría dividirlo esto entre 2 para ver?*

I.- *Como quieras. Tú lo haces como quieras. Tienes espacio aquí para escribir.*

Ma.- *¿Pero a qué se refiere esta pregunta?*

I.- *Se trata de encontrar dos números...*

Ma.- *Que sumándolos o haciendo alguna operación con ellos salga 177.*

I.- *Sí, cuyo producto sea 177. Que al multiplicarlos dé 177.*

Ma.- *Al multiplicarlos. [Escribe la raíz cuadrada de 177]. Yo de raíces cuadradas es que no nos han enseñado. Porque nos han dicho que con la calculadora.... No nos han dicho nada. ¿La puedo sacar o no?*

I.- *Tú haces lo que te parezca.*

Ma.- *¿No lo puedo hacer con calculadora?*

I.- *No, con calculadora no.*

Ma.- *Pues voy a intentarlo porque el año pasado sí me enseñaron. ¿Se empezaba por la izquierda, no?*

I.- *No sé.*

Ma.- *¡Dime eso nada más!*

I.- *No puedo decirte nada, mujer. Esa es la prueba y la tienes que hacer tú. Yo lo que te puedo recordar es que tienes que encontrar dos números que al multiplicarlos dé 177.*

Ma.- *Sí. ¿Haciendo la raíz cuadrada sale, no?*

I.- *Tú lo haces como quieras.*

Ma.- [Permanece en silencio unos instantes]. *Yo es que no me lo sé... ¿qué números tengo que coger?*

I.- *Bueno, no sé. ¿Se te ocurre hacerlo de otro modo?*

Ma.- *¡Uf, qué va! [Tras unos 15'' en silencio]. Es que si lo divudieses entre 2 sería la suma. Que luego al sumarlos saliese... [Se queda en silencio].*

I.- *Sería la suma.*

Ma.- *Que no se pueden sumar, ¿no? Tiene que ser al multiplicarlos que salga 177.*

I.- *Sí, tienen que ser dos números que al multiplicarlos dé 177.*

Ma.- [Instantes de silencio]. *Voy a pasar a ésta [situación 3] y después si acaso lo termino.*

No manifiesta ningún indicio de empleo del algoritmo estándar escrito del producto. Se empeña en utilizar el algoritmo estándar escrito de la raíz cuadrada. También sugiere el uso de la división pero a la vez manifiesta una idea errónea de la relación entre multiplicación y división. Por tanto:

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

Ma.- [Una vez leído el enunciado] *¿Con la calculadora?*

I.- *Esta es la calculadora. Se trata de hacer esta multiplicación ayudándote de la calculadora. Puedes utilizarla.*

Ma.- [Introduce en la calculadora las cifras del multiplicando]. *¿No caben más! Por eso es por lo que dice eso.*

I.- *No, no sé. Te dejo que utilices la calculadora.*

Ma.- *¿Y tengo que utilizarla obligatoriamente?*

I.- *No, tú puedes hacer lo que quieras.* [Deja a un lado la calculadora y en silencio comienza a utilizar el algoritmo de forma técnica. Transcurren unos 2' 20''] *¿Ya? Y dime una cosa: ¿la calculadora para qué la has utilizado?*

Ma.- *¿La calculadora? Es que no he podido utilizarla porque no entran todos los dígitos.* [Se queda en silencio].

I.- *Y has preferido hacerlo a mano, ¿no?*

Ma.- [Asiente].

I.- *Bueno, pasamos a la siguiente.*

Desestima el uso de la calculadora y no se manifiesta indicio alguno de empleo Formal del algoritmo estándar escrito del producto. Por el contrario, resulta correcto el uso Técnico de este procedimiento de cálculo.

Respuesta de tipo 3a y 3b'

Situación 4

Ma.- *Ésta sí está bien* [primera multiplicación]. [Tras unos instantes de silencio analizando la segunda multiplicación]. *Ésta está mal.*

I.- *Las que estén mal, si quieres las pones abajo y las corriges.*

Ma.- [Transcurren unos 30'' en silencio]. *Ésta también está mal* [tercera multiplicación].

Tal como se observa a través del registro escrito y los comentarios, la alumna sólo consigue identificar los errores de la segunda y tercera multiplicación.

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

Ma.- *¿El algoritmo?*

I.- *El método que se utiliza para multiplicar normalmente.*

Ma.- *¿Que haga la multiplicación?*

I.- *Sí.* [Transcurren aprox. 15'' en los que la alumna realiza el cálculo en silencio]. *¿Cómo lo has hecho?*

Ma.- *Pues, he multiplicado los números de abajo por el de arriba, de uno en uno.*

I.- *A ver...*

Ma.- *¿Es que no, es que me he equivocado! Es que me he equivocado. No lo he hecho bien.*

I.- *¿No? ¿Por qué dices que no?*

Ma.- *Bueno sí, porque también si esto [251] estuviese arriba sería... daría lo mismo.*

I.- *A ver, ¿entonces qué?*

Ma.- *Da...*

I.- *En realidad, ¿qué es lo que has multiplicado?*

Ma.- *Pues el 251 por 6.*

I.- *¿Y por qué dices que lo habías hecho mal?*

Ma.- *No, porque... que me he confundido y creía que si éste [251] lo poníamos arriba, iba distinto resultado. Pero es el mismo aunque diga 6 por 251 que 251 por 6.*

I.- *Claro, aquí yo creo que has hecho 251 por 6 porque has cogido 6 por 1, después 6 por 5 y 6 por 2.*

Ma.- *Sí, he hecho eso.*

I.- *¿Pero lo podías haber hecho así, tal como está: 6 por 251?*

Ma.- *Sí.*

I.- *¿Cómo sería?*

Ma.- *¿Lo hago?*

I.- *Sí. [A continuación aplica en silencio, aunque de forma incorrecta, el algoritmo estándar escrito de la multiplicación para obtener el mismo resultado. Transcurren unos 20'' en total]. ¿Sí o no?*

I.- *Como tú quieras. Yo entiendo lo que has hecho. Pasamos si quieres a la 6.*

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

Ma.- *¿Tengo que decir las cifras que tiene el multiplicador?*

I.- *Cuántas, cuántas.*

Ma.- *Vale.*

I.- *No cuáles son sino cuántas. El multiplicador es el de abajo y el multiplicando el de arriba.*

Ma.- *¿Me puede dejar la otra hoja, la que he terminado de hacer?*

I.- *Sí.*

Ma.- *Vale.*

I.- *¿Para qué la querías?*

Ma.- *Pues para ver si en todas daba lo mismo esto que el de arriba, el resultado.*

I.- *No entiendo.*

Ma.- *El resultado, que si era el mismo el de los dos...*

I.- *¿El de las filas?*

Ma.- *Sí.*

I.- *No, es otra multiplicación distinta.*

Ma.- *Es que puede tener más de... que no puede tener... que hay más de una opción, ¿no?, para saber las cifras que tiene.*

I.- *¿Cuál?*

Ma.- *Pues, puede tener cuatro cifras. Y salir 37... último número. ¿Lo entiendes?*

I.- *Sí, te entiendo. ¿Pero ese es el multiplicando?*

Ma.- *Sí.*

I.- *¿Entonces cuántas cifras hay en el multiplicando?*

Ma.- *El multiplicando es el de arriba.*

I.- *El de arriba.*

Ma.- *¿El de arriba? Ya se lo he dicho: pues, puede haber cuatro o cinco.*

I.- *¿Y el de abajo, el multiplicador?*

Ma.- *[Permanece en silencio durante 20'' aprox.]. Tres.*

I.- *¿Por qué?*

Ma.- *Porque hay tres filas. No me había dado cuenta de eso. ¡He tardado en averiguarlo!*

I.- *Pues pasamos si quieres a la siguiente.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

I.- *¿Entiendes la actividad? Se trata de encontrar las cifras de los huecos, de cada uno de los huecos.*

Ma.- *Un rompecabezas.*

I.- *Sí, algo así.*

Ma.- *¿No dicen cuántas cifras tiene?*

I.- *No, eso se ha ocultado. El multiplicando se ha ocultado.*

Ma.- [Tras 15'' en silencio]. *En la primera... puede ser el 5 [unidades del multiplicador]. Porque saldría 15 y entonces me llevaría 1. Y aquí también tendría que multiplicarlo por 5. Esto es 0.*

I.- *Entiendo, entiendo.*

Ma.- *¿Lo hago de esa forma, número con número y...?*

I.- *Tú lo haces como quieras. No sé, hazlo como quieras. Lo que tienes que averiguar son las cifras que hay en los huecos.*

Ma.- *Es que multiplicando por 3 sólo puede ser el 5. ¿No? Porque los 3 no hay.... 3 por 8, 24 y 3 por 1, 3.*

I.- *Bueno, no sé. Ve haciendo ahí lo que puedas o lo que se te ocurra.*

Ma.- [Permanece en silencio durante unos instantes]. *9 por 3... esto no puede ser. Porque me llevaría 1... y multiplicando no puede salir 3 de ninguna forma. Porque me llevaría 1, tenía que salir 4, ¿no? [Intenta determinar las decenas del multiplicando usando la información proporcionada por el tercer resultado parcial].*

I.- *Tenía que salir 4.*

Ma.- *Sí porque si fuese 3 por 5, 15, me llevaría 1. Y si fuese 3 por 1, 3 más 1, 4. Entonces no podría ser eso.*

I.- *¿No podría ser qué?*

Ma.- *Pues 3 por 5. ¿No?*

I.- *No sé. ¿Entonces? [Instantes en silencio] ¿Tú por qué has puesto aquí 5 [tercer resultado parcial]?*

Ma.- *Pues, porque como esto es un 3 y se suponía que esto era un 5, el primer número aquí [unidades del primer resultado parcial], 3 por 5 serían 15.*

I.- *Entiendo. ¿Y ese 0?*

Ma.- *Pues 0 por 5 es 0.*

I.- *Entiendo.*

Ma.- *¿Pero entonces qué número tendría que ser el primero? [Pasados unos 20'' en silencio]. ¿Pero hay una solución?*

I.- *Sí, claro.*

Ma.- *¿Usted lo sabe?*

I.- *¿Yo? Sí, claro. De lo que se trata es de ir completando los huecos. ¿Qué se te ocurre hacer para ir completando los huecos?*

Ma.- *Es que hay una regla de la multiplicación, pero eso era para averiguar el de arriba. Eso no tiene nada que ver. [Instantes de silencio]. Es que otra forma que no sea ésa, ya no sé hacerlo de otra forma.*

I.- *¿Cuál es el problema que tienes?*

Ma.- *Pues, que cualquier número multiplicado por 3... pero también puede salir algo en 5. No, pero es que 3 por 11 no lo podrías multiplicar y del 0 al 9... sólo está el 5, que salga como resultado el 5, 15, 25 o algo de eso, ¿no?*

I.- Entiendo lo que dices.

Ma.- Pero entonces aquí, si lo multiplicásemos por 5, te da 15 y aquí tendría que haber un 4. [Se queda en silencio].

I.- Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.

La alumna manifiesta una dependencia en el orden de la secuencia algorítmica y sobre todo en el conocimiento de las cifras del multiplicando. Sin este dato es incapaz de completar los huecos.

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

Ma.- [Tras permanecer unos 30'' en silencio intentando resolver la primera M CCD]. Aquí dice 0. Podría ser un 0 [unidades del multiplicando]: 2 por 5, 10. Es que en la tabla del 5 puede haber muchas. Y multiplicando por 4.... Por el 1, pero aquí 5 por 1, 5, no podría ser ya, ¿no? ¿Entiende lo que le voy diciendo?

I.- Sí, sí, lo entiendo.

Ma.- [Instantes de silencio]. 4 por 6, 24. Y 5 por 6, 30. Eso sí puede ser, ¿no?, y me llevo 3. ¿No?

I.- Bueno, tú verás.

Ma.- [Tras unos instantes de silencio]. Eso podría ser, ¿no?

I.- ¿Tú qué crees?

Ma.- ¡Es que no lo sé!

I.- Ya sabes que puedes emborronar todo lo que quieras. Tienes todo el papel.

Ma.- [Transcurridos unos 20'' en silencio]. Voy a intentarlo de esa forma, a ver. 5 por 6, 30, me llevaría 3. Aquí podría ser un 0 [decenas del multiplicando] pero es que no tiene sentido un 0 y un 6. [Otros 15'' en silencio]. Tendría que salir algo que diese también un 0 porque luego le sumas los otros 3 del 30. Podría ser un 2: 2 por 5, 10 más 3,... pero es que hay que ponerle ése también. 10 más... sería 13. Voy a probar así. Esto sería un 2. Entonces, 5 por 6, 30 me llevo 3; 3 por 5, 10, 13. Ahora, 4 por 6, 24, me llevo 2; 4 por 2, 8, 9 y 10. Ya no podría ser; con el 4 ya no podría ser. Entonces el 2 no. [Dependencia del orden algorítmico].

[Tras un nuevo instante de silencio]. El 4: 4 por 5, 20 y 3, 23. Voy a mirar el 4. [Unos 15'' en silencio]. Sería 20, pero tendría que salir un 3 ahí. ¿No?

I.- ¿Un 3 dónde?

Ma.- Aquí.

I.- Y no un 4. ¿Por qué dices que tiene que salir un 3?

Ma.- Porque si fuese por 4... no, es que me estoy liando, a ver. Si fuese por 5. ¡Qué no, que me he liado! ¿Dónde estoy? [Instante de silencio]. 5 por 6, 30. Luego, 4 por 6, 24. Pero es que aquí me llevaba...3. Entonces ya no podría ser. ¿Pero esto lo tengo bien?

I.- ¿Qué?

Ma.- Esto.

I.- ¿El 6?

Ma.- Sí.

I.- No lo sé, eso lo tienes tú que decidir.

Ma.- [Tras 15'' aprox. en silencio]. Es que no puede ser otro número que haga los dos, ¿no? Sólo está ese número que coincida con los 2, ¿no?

I.- ¿Cuál dices sólo?

Ma.- El 6.

I.- [Transcurren otros 25'' en silencio]. *Si quieres prueba la siguiente.*

Ma.- *Sí, porque.... [15'' más en silencio] No pero es que esto lo voy a dejar porque no... no lo hago, no sé por qué decirlo, necesitaría mucho tiempo.*

I.- *¿Tú crees? A ver, ¿qué problema tienes?*

Ma.- *No, porque tendría que ir probando número por número. Es que no se resolvería de esa forma, no se resolvería de la otra. ¡Es que estoy nerviosa!*

I.- *¿Que estás nerviosa? ¿Por qué?*

Ma.- *No sé. Es que eso ha sido de golpe, no me lo esperaba.*

I.- *Bueno, ya te he comentado que esto ni es un examen ni voy a poner nota...*

Ma.- *Ya, ya.*

I.- *... ni nada de eso.*

Ma.- *¿Y al final me va a decir los resultados?*

I.- *Si quieres te lo digo, claro.*

Ma.- *Vale. Pues, voy a mirar...*

I.- *Si quieres pasamos a la siguiente, ¿no?*

Ma.- *Sí.*

I.- *Vale.*

La alumna se pone nerviosa en esta actividad y no logra resolver la tarea. Incluso deja sin intentar la segunda MCCD. En cualquier caso, se observa a través del diálogo que manifiesta una dependencia importante en el orden estándar de la secuencia algorítmica.

Respuesta de tipo 8a

Situación 9

I.- *Se trata de ir contestando cada una de estas preguntas. Por ejemplo, la primera: ¿qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse? ¿Por qué crees tú que hay que llevarse cuando uno multiplica?*

Ma.- *Pues para... como no se pueden poner dos números en una misma cifra, pues para ponerlo en la siguiente cifra, contándolo con la siguiente cifra. ¿No?*

I.- *Entiendo. O sea, me dices que 3 por 6...*

Ma.- *Como son 18, pues tendría que poner un 1 pero como no se puede poner un 1, pues se le suma al siguiente número.*

I.- *¿Y por qué no se puede poner un 1?*

Ma.- *Porque no es así la regla de la multiplicación, ¿no? [indicio no-Formal].*

I.- *Entiendo. Y dime una cosa: ¿por qué se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Es decir, ¿por qué se tiene que multiplicar el 3 por el 6 y después por el 4 y después por el 1 y cuando termines, comenzar y hacer 2 por 6, 2 por 4, 2 por 1, ...?*

Ma.- *Porque hay que multiplicarlos todos, no sólo un número. Hay que multiplicar todos los números, uno por uno. Porque si los multiplicases todos menos el 6, pues no saldría bien la multiplicación, ¿no? [Indicio no-Formal].*

I.- *¿Y por qué crees que se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? Es decir, cuando multiplicas 3 por 146 lo colocas en la primera fila. Después haces lo mismo con la siguiente cifra y lo vas colocando ahí. ¿Por qué crees que se van colocando en filas, una detrás de otra?*

Ma.- *Pues para luego sumarlos, es que no lo sé. Porque no lo puedes poner todo en la misma fila. Tienes.... Que no se puede poner el resultado que salga al multiplicar 2 por 146 en la misma fila que el 3 [indicio no-Formal].*

I.- Entiendo. ¿Y por qué se deja un hueco? ¿Qué significado tiene ese hueco?

Ma.- ¡Buf!, yo eso me lo he preguntado muchas veces pero nunca se lo he preguntado al profesor.

I.- ¿Y no se te ocurre nada por lo que pudiera haber ese hueco ahí?

Ma.- Porque como es el segundo del que se tiene que multiplicar, pues tendrán que ponerse en su misma fila, ¿no? [Indicio no-Formal].

I.- En su misma línea, en su misma columna.

Ma.- ¿No?

I.- Oye, ¿y lo de sumar? ¿Por qué al final se tiene que sumar en columnas para llegar al resultado?

Ma.- Pues porque como se tienen que poner en filas, lo que hemos dicho antes de poner dos filas porque no se podrían poner todas en una, pues para que te salga el resultado final tendrás que sumarlo. No se pueden decir dos resultados. [Indicio no-Formal].

I.- Entiendo. Bueno y la siguiente: ¿conoces alguna propiedad matemática que se utilice en este método, o sea, que justifique por qué se multiplica así, por qué se tiene que dejar un hueco, por qué se tiene que multiplicar el 3 por todo, etcétera?

Ma.- No, nunca lo hemos estudiado eso.

I.- ¿No se te ocurre ninguna?

Ma.- [Tras 20'' en silencio]. No.

I.- Bueno, pues ya hemos terminado.

A través de las explicaciones dadas no se aprecian indicios de un uso formal del algoritmo. En consecuencia:

Respuesta de tipo 9a

José Andrés (1º ESO) [13/05/2003]

Nombre: José Andrés Fecha: 13/05/2003

1. Calcula:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 12 \\ 13 \\ -14 \\ 15 \\ 16 \\ \hline 117 \end{array}$$

2. Calcula las operaciones y escribe el resultado en el cuadro correspondiente:

3. Aplica la propiedad distributiva para calcular el siguiente producto, aplicando el algoritmo habitual:

$$\begin{array}{r} 22344567 \\ \times 23 \\ \hline 670238014 \\ 446891340 \\ \hline 5137257782 \end{array}$$

4. Distribuye la suma indicada utilizando el método de la división sucesiva, calculando el cociente y el resto:

$$\begin{array}{r} 15 \quad 16 \quad 13 \\ \times 23 \quad \times 12 \quad \times 52 \\ \hline 345 \quad 192 \quad 676 \\ 300 \quad 120 \quad 260 \\ \hline 3450 \quad 2304 \quad 3500 \\ 3795 \quad 3104 \quad 3876 \end{array}$$

5. Calcula el producto de los siguientes números:

$$\begin{array}{r} 1234 \\ \times 567 \\ \hline 7418 \\ 74180 \\ 741800 \\ \hline 701658 \end{array}$$

6. La suma indicada se realiza en una tabla de multiplicación, ¿cuál es el resultado?

$\begin{array}{r} 23456 \\ \times 789 \\ \hline 211008 \\ 187728 \\ 1877280 \\ \hline 18457440 \end{array}$	<input type="checkbox"/> a) 18457440
$\begin{array}{r} 23456 \\ \times 789 \\ \hline 211008 \\ 187728 \\ 1877280 \\ \hline 1845744 \end{array}$	<input type="checkbox"/> b) 1845744

7. En la siguiente multiplicación, las cifras vacías se indican con un cuadro. ¿Cuál es el resultado de la suma?

$$\begin{array}{r} \\ \times 303 \\ \hline 38 \square \square \square \\ 0 \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \square \\ \hline \square \square \square \square \square \square \end{array}$$

8. Completa:

$\begin{array}{r} 45 \\ \times 30 \\ \hline 44 \\ 870 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ \times 125 \\ \hline 145 \end{array}$
--	--

9. ¿Cuál es el producto de los siguientes números?

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ \times 123456789 \\ \hline 1481536 \\ 24690720 \\ 370360800 \\ 5138481600 \\ 69179750400 \\ 915729696000 \\ 1184503603200 \\ 15593377248000 \\ 201211696640000 \\ 2646155857920000 \\ 34399990293760000 \\ \hline 15593377248000000 \end{array}$$

10. ¿Cuál es el resultado de la siguiente multiplicación?

a) 15593377248000000

b) 1559337724800000

c) 155933772480000

d) 155933772480000

Situación 1

Investigador.- [Una vez hallado el resultado de la suma] ¿Cómo has hecho la suma?

José Andrés.- Pues he visto 16 por 7.

I.- 16 por 7.

J. A.- Sí.

I.- ¿Y lo has hecho de cabeza o cómo?

J. A.- Pues casi que de cabeza: 7 por 6, 42 y luego 7 por 1, 7 y he sumado 4.

Respuesta de tipo 1b

Situación 2

J. A.- Esto de los números naturales... lo de los números naturales todavía no lo he dado.

- I.-** *Son números que no tienen coma. Números normales y corrientes.*
- J. A.-** *Ah, bien, bien.*
- I.-** *[Al no entender aún el enunciado]. Sí, mira, tienes que encontrar dos números...*
- J. A.-** *Sí.*
- I.-** *...cuyo producto sea 177, pero esos números no pueden ser 1 porque si no tendrías el 177 por 1 y ya obtendrías los dos números.*
- J. A.-** *[Tras 30'' de intentos y reflexión en silencio] ¡Esto no sé hacerlo!*
- I.-** *A ver, ¿qué se te ocurre hacer? ¿Qué estabas pensando?*
- J. A.-** *Pues pensar un número que dé 7, luego otro que dé 17, entonces... [Indicio de uso Analítico del algoritmo].*
- I.-** *Puedes escribir aquí. Puedes hacer todas las cuentas que quieras.*
- J. A.-** *A ver... [Transcurren 40'' aprox. en silencio, donde el alumno realiza nuevos intentos].*
- I.-** *¿En qué número estás pensando?*
- J. A.-** *En el 39.*
- I.-** *¿El 39?*
- J. A.-** *Sí.*
- I.-** *¿Por qué?*
- J. A.-** *Porque 39 por 3... 27... yo creo que es el 39 por 3. [Vuelve a quedarse en silencio durante otros 40'' en los que se dedica a probar nuevas posibilidades, siempre con la condición de que el producto de unidades por unidades termine en 7]*
- I.-** *¿Por qué número estás probando?*
- J. A.-** *Por el... estoy por alrededor del 40. [Después de 1' realizando más cálculos en silencio llega a obtener la pareja 59 y 3]. 59 es uno. Tengo que encontrar dos, ¿no?*
- I.-** *Sí, dos números que al multiplicarlos dé 177.*
- J. A.-** *Pues ya he encontrado. Entonces, podría ser... [Entiende que uno de los números es 59 y que debe seguir buscando para obtener el otro número].*
- I.-** *Espera. ¿Aquí por qué has hecho 59 por 3?*
- J. A.-** *Porque 9 por 3, 27, ¿no? Pues digo: podría ser. Y luego 5 por 3...*
- I.-** *Podría ser, ¿por qué? ¿Por qué dices que podría ser?*
- J. A.-** *He pensado: voy a hacer que sea 3 por 9, 27 y aquí 27. Pues digo: un número que dé 15 al multiplicarlo por 3, pues ya el 5. Entonces me ha dado 177. [Indicio de uso Analítico del algoritmo].*
- I.-** *Entiendo. Bueno, ya está, ¿no? Porque aquí lo que te dice es que encuentres dos números cuyo producto sea 177.*
- J. A.-** *¡Ah!, ya está.*

Respuesta de tipo 2c

Situación 3

Se observa un uso Técnico del algoritmo estándar escrito para obtener el resultado aunque no llega a emplearse de un modo correcto.

I.- *[Una vez concluido el cálculo] ¿Y la calculadora entonces para qué te ha servido?*

J. A.- *Para nada porque no daba más.*

I.- *No daba más.*

J. A.- *No, porque llegaba hasta aquí, de ahí para atrás. No daba... todo eso.*

I.- *O sea, que solamente cabía...*

J. A.- *Cabía: 2, 2, 4, 4, 4, 9, 9, 9. Eso es lo que cabía. Por eso digo: como no cabe, voy a probar en decir éstos [con algunas de las cifras que sí cabían] pero ponía un*

número ahí raro [el que se observa tachado], pues digo: dejo la calculadora y la hago así.

I.- Entiendo. Vamos a pasar a la siguiente.

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Ningún diálogo a destacar. Tal como se observa en la producción escrita, el alumno utiliza correctamente el algoritmo de forma Técnica para detectar los errores incluidos en las multiplicaciones.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

J. A..- ¿¿Qué es eso?!

I.- El método que tú conoces para multiplicar. El que has utilizado antes.

J. A..- El mayor se pone arriba y el menor abajo. Como el orden de los factores no altera el producto, pues yo siempre lo hago así.

I.- Bueno, hazlo como quieras.

J. A..- Pero que la haga, ¿no?

I.- Sí. Puedes escribir lo que quieras. [Transcurren unos 20'' en silencio, en los que el alumno multiplica 251 por 6 con el algoritmo estándar escrito]. *Mira, le has dado la vuelta a los factores, ¿no?*

J. A..- Sí, el orden no altera el producto.

I.- Pero aún así, ¿podías haberlo hecho en esta disposición [la original]?

J. A..- Sí.

I.- ¿Cómo sería?

J. A..- [Tras realizar el cálculo en unos 15''. Puede observarse que no aplica bien los pasos de la secuencia estándar establecida]. Daría igual.

I.- Daría igual.

J. A..- Sí.

Respuesta de tipo 5b

Situación 6

I.- ¿Entiendes la pregunta?

J. A..- Sí, más o menos. [Leyendo] *¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicador?*

I.- El multiplicador es el de abajo y el multiplicando es el de arriba. Pues, ¿cuántas cifras tiene el multiplicador y cuántas cifras tiene el multiplicando?

J. A..- Esto [el multiplicador] tiene... ya está, tiene tres cifras [permanece en silencio].

I.- Tiene tres cifras.

J. A..- [Nuevo instante de silencio]. Sí, son tres cifras.

I.- ¿Por qué?

J. A..- Porque está esto... entonces, cada de éstos construye a un número.

I.- Cada fila.

J. A.- Sí, cada fila corresponde a un número y como hay tres filas pues tres números tiene que haber.

I.- Entiendo.

J. A.- *El multiplicando... esto sí es difícilillo... [Permanece pensando en silencio durante 20'' aprox.] Cuatro. Sí, cuatro... cuatro cifras. Más o menos.*

I.- *Cuatro cifras.*

J. A.- *Estoy entre cuatro y cinco. Cuatro... cuatro cifras.*

I.- *Cuatro cifras o entre cuatro y cinco o qué.*

J. A.- *Entre cuatro y cinco, estoy.*

I.- *¿Por qué?*

J. A.- *Porque puede ser... si da, puede ser que dé 37 un número, por eso digo que es cuatro. Pero puede ser que dé 3 si éste es el tres cifras, por eso tiene entre cuatro y cinco.*

I.- *Entiendo lo que dices.*

J. A.- *Vamos que... en cuatro cifras.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

J. A.- *Para esto tengo que averiguar el multiplicando, ¿no?*

I.- *Se ha ocultado el multiplicando y se trata de encontrar las cifras que hay en los huecos.*

J. A.- *Vale. Esto es así porque 0 multiplicado por todos da todo 0 [en referencia al 2º resultado parcial].*

[Permanece unos 45'' en silencio intentando completar los huecos] Es que... ¿5 aquí? 3 por... eso no sale. Esto no puede ser así, 5, tiene que ser un 6 [unidades del 1º resultado parcial].

I.- *¿Por qué?*

J. A.- *Porque ningún número multiplicado por 3 da 5.*

I.- *Ningún número multiplicado por 3 da 5.*

J. A.- *No. Entonces, aquí tiene que ser un 6 [Cambia el valor de las unidades del 1º resultado parcial]. Más o menos, creo yo. [Transcurren 30'' pensando en silencio]. Esto no sé hacerlo yo, es muy difícil.*

I.- *Es muy difícil*

J. A.- *Sí.*

I.- *¿No se te ocurre nada?*

J. A.- *¿Qué va!*

I.- *¿No puedes completar los huecos que faltan?*

J. A.- *¿Qué va!*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

[Durante 1' 40'' el alumno permanece en la labor de resolver la primera M CCD expresando entre dientes y de un modo apenas apreciable parte de la reflexión llevada a cabo].

I.- *A ver, ¿qué problema tiene?*

J. A.- *Que no logro encontrar un número que tiene que ser 43.*

I.- *Que tiene que ser 43.*

J. A.- *Sí, 430.*

I.- *¿Y eso por qué?*

J. A..- *Porque 0 es 0, 3 y 4, 7. Tiene que ser 4 y 4, 8 y aquí pues lo que dé.* [Transcurren otros 20'' aprox. hasta que el alumno logra completar con éxito la primera MCCD].

I.- *¿Entonces qué problema tenías?*

J. A..- *Que no me había fijado en el 8 que había puesto para poner... 4.*

[Pasan 1' 45'' aprox. hasta que el alumno completa la segunda MCCD sin modificaciones].

I.- *Ya está.*

J. A..- *Ya está.*

I.- *¿Cómo lo has hecho? ¿Lo puedes explicar un poco?*

J. A..- *Porque... a ver cómo te explico... he buscado un número que multiplicado por 7 dé de última cifra un 5: 7 por 5, 35. Luego, 7 por... no aquí no puede ser. 2, esto tiene que ser un 2 [decenas del multiplicador]...2, 14,... [parece ser que identifica la condición de ser 4 las decenas del primer resultado parcial] 6 por 12... ¡ah, me he equivocado ya!... [Tras 50'' en silencio haciendo algunas modificaciones en las cifras halladas previamente] Ya he encontrado el problema... no es 4, es 2: 2 por 5, 10; 2 por 2, 4 y 1, 5. Ya está, me había equivocado.*

I.- *Ahora la siguiente. La última ya.*

Comete el error de no considerar las llevadas de 35 para la determinación de las decenas del multiplicando.

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

[Antes de pasar a responder las cuestiones, el alumno comprueba que la multiplicación está resuelta correctamente con el algoritmo estándar escrito].

J.A..- [Respuesta a la primera pregunta]. *Ah, porque son más... el número sumado da mayor de 10 [leve indicio de uso Formal]. Por eso.*

I.- *Espera, es mayor de 10. ¿Y qué pasa?*

J. A..- *Porque se pone... por ejemplo, 2 por 5 son 10 y hacia el lado... a ver, 65 por 2. Pues, 2 por 5 son 10, pongo el 0; pues ya cojo el 1 que me queda y hago: 2 por 6, 12 y ese 1 se lo paso a ese por... ¿cómo era? Así.*

I.- *Puedes escribir si quieres o ayúdate del producto ese.*

J. A..- [Escribe] *A ver, 65 por 2. 2 por 5 son 10, ¿no? Pues cojo el 1, 2 por 6, 12 y ese uno se lo sumo a las unidades, entonces me da 13 [leve indicio de uso Formal].*

I.- *Bueno, ¿y por qué se le suma?*

J. A..- *Porque si no daría así [muestra 1310 como resultado de 65 por 2]... y no se puede poner eso. Se tiene que sumar aquí, porque... es igual que si hacemos esto: unidades, decenas y centenas [leve indicio de uso Formal]. Porque si nos da... nos tiene que dar 0, 1, 3 y... aquí tendría que ser un 2, ¿no? Pues si le sumamos 1 da un 3, por eso es mejor hacerlo, porque entonces se lía la gente mucho y no sabe dónde poner las cifras y todo eso.*

I.- *Entiendo lo que dices.*

J. A..- [Leyendo] *¿Por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? [Instantes de silencio] Porque si no, no sabríamos dar cuánto da exactamente. Daríamos: 3 por 6, 18 y luego pasaríamos aquí... Umm, ¿cómo te podría decir yo!... Es este número multiplicado las veces... es el multiplicando tantas veces como diga el multiplicador, es multiplicar. A ver, como te lo digo yo: 146 es igual que si lo pusiéramos 23 veces 146, 146, etcétera [escribe varias veces 146]. Por eso,*

entonces... entonces como si dijéramos: 3 por 6, 2 por 4, entonces no daría exacto porque 3 por 6... diríamos 6 tres veces, luego 4 dos veces y luego ¿el 1 dónde lo dejamos? Tendríamos que ponerlo, por eso es mejor hacer esto porque nos da la cifra exacta.

I.- Entiendo.

J. A.- [Leyendo la cuestión (c)] ¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? Porque para sumarlos hay que... para sumarlos, ¿no? Hay que poner.... Si el número con el que estamos multiplicando; por ejemplo, está este número a la derecha, pues hay que ponerlo a la derecha...

I.- El 3.

J. A.- ... porque está en las unidades. Pues tienes que poner las unidades. Luego, si multiplicas con el 2 que está en las decenas pues hay que empezar donde pone las decenas.

I.- Sí, entiendo. Pero digo que por qué se van colocando así. Multiplicas 3 por 146 y se coloca aquí... [primera fila].

J. A.- Sí.

I.- ... y después sigues multiplicando y el resultado se coloca aquí abajo [segunda fila] y así sucesivamente.

J. A.- Porque... muchos no saben hacer, por ejemplo 146 por 23. Eso no lo saben hacer de cabeza y poner ahí el número. Por eso se coge: éste [las 2 decenas del multiplicador] como si no lo miráramos, luego se multiplica esto [las 3 unidades del multiplicador por el multiplicando] y luego, como te he dicho antes, las decenas se multiplican y se ponen aquí. Por eso no van a poner rápidamente 3358 porque eso no saben hacerlo ellos y capaces son de poner ahí una barbaridad. [Indicio uso Formal].

I.- Entiendo. ¿Y por qué se deja un hueco aquí, en esta fila?

J. A.- Porque hacemos las unidades... se ponen en las unidades. Luego, cuando multiplicamos éste, las decenas, se debe de empezar por las decenas porque si no esto sería igual que ponerlo aquí, delante otra vez. Por eso, no daría el resultado correcto.

I.- A ver, no he entendido eso muy bien.

J. A.- Es igual que si en las decenas.... Primero, las unidades: pues se empieza en las unidades; luego se pone, como estamos ya multiplicando con las decenas pues se pone en el sitio de las decenas, por eso tenemos que dejar el hueco. Porque es multiplicado por las decenas. ¿Entiendes? [No-Formal].

I.- Entiendo, entiendo.

J. A.- [Leyendo en voz alta la cuestión (d)] Al final, ¿por qué se deben sumar las cifras en columnas para llegar al resultado? Porque si no estaríamos entre las dos. Cuál sería la verdadera o cuál sería la falsa. Por eso es mejor... son 23 por... hay que sumar estas dos para que nos dé el resultado exacto de 23, porque si no daría por 3 y por 2. No sabrían multiplicar por dos cifras, por eso...

I.- Por 3 y por 2, me dices.

J. A.- Sí. Porque mira, entonces sería como... hay que sumar las dos porque si no sería como multiplicar una por 3 y otra por 2. Serían dos cuentas distintas. Hay que sumarlas para que dé el resultado final. [Uso de la propiedad distributiva pero no del sistema de numeración posicional].

I.- Entiendo.

J. A.- [Tras leer en silencio la última cuestión] ¿Propiedad?

I.- Sí. ¿Conoces alguna propiedad matemática que justifique...?

J. A.- ¡Ah, sí, sí! Ya.

I.- ¿... el funcionamiento de este método para calcular?

J. A.- Creo que sí.

I.- ¿Qué justifique todo lo que me has dicho?

J. A.- Mira, el resultado entre el multiplicador. Por ejemplo, aquí te lo voy a poner. [Divide 3358 entre 23 con el algoritmo estándar escrito de la división]. Ahí está la prueba.

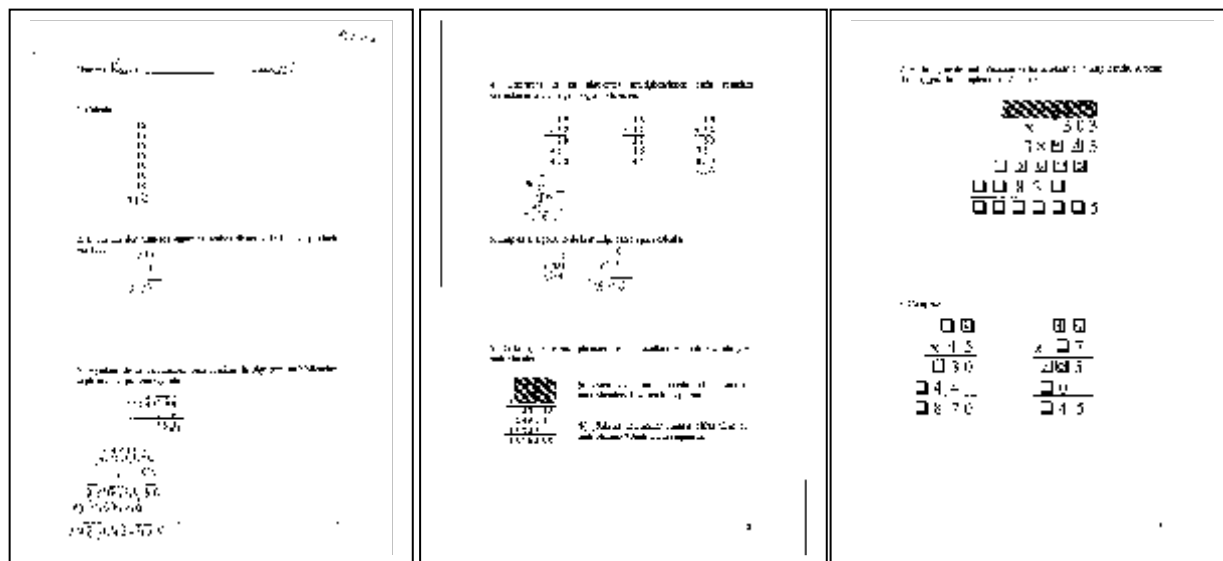
I.- ¿Y alguna otra propiedad?

J. A.- Yo es que no conozco ninguna más, nada más que ésta.

I.- Bueno, pues ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9b

Karina (1º ESO) [15/05/2003]



Situación 1

Investigador.- Oye, antes de pasar a la siguiente, explícame cómo lo has hecho.

Karina.- Pues sumando.

I.- Sumando.

Ka.- Sí.

I.- Sumando...

Ka.- Sumando esta fila [columna de 6] y después ésta [columna de 1].

I.- ¿Y se te ocurre hacerlo de otro modo?

Ka.- Sí, multiplicando.

I.- Multiplicando. ¿Cómo sería multiplicando?

Ka.- 7 por 16.

I.- 7 por 16.

Ka.- Sí.

Proporciona indicios de disponibilidad para multiplicar (supuestamente con el algoritmo estándar escrito). Esto es, reconoce que la situación podría resolverse planteando una multiplicación que probablemente resolvería aplicando el algoritmo aunque por el diálogo no tenemos una total certeza de ello. En cualquier caso:

Respuesta de tipo 1b

Situación 2

Ka.- *Ésta no la entiendo.*

I.- *Bueno, yo te lo explico. Dice: encuentra dos números naturales, bueno dos números sin coma, sin decimales, cuyo producto sea 177, es decir, que al multiplicarlos de 177. [Transcurren 15'' en los que la alumna multiplica 177 por 1 empleando el algoritmo estándar escrito]. Vale, esa es una buena opción pero fíjate lo que dice aquí: no pueden ser...*

Ka.- *De 1.*

I.- *No pueden ser 1. Ambos, los dos, distintos de 1.*

Ka.- *¿El 0? No, porque si no me daría 0. ¡No hay!*

I.- *¿No hay?*

Ka.- *No.*

I.- *¿Por qué dices que no hay?*

Ka.- *Pues porque para que me diera lo mismo siempre es el 1.*

I.- *¿Sí? ¿Tú crees?*

Ka.- *Sí.*

I.- *Es decir, ¿según tú no existen dos números distintos de 1 que al multiplicarlos da 177?*

Ka.- [Responde con un gesto afirmativo].

I.- *¿Y por qué?*

Ka.- *Pues yo que sé. Pues porque sólo es el 1. Sí, sólo el 1. No hay otro.*

I.- *No hay otro.*

Ka.- *No, que yo sepa no. [Instantes en silencio]. No.*

I.- *¿Y no se te ocurre hacer nada?*

Ka.- *¿Dividir o tampoco? No.*

I.- *No sé.*

Ka.- *Sí, dividir. Pero si divides, tienes que dividir 177 entre 1.*

I.- *Entiendo.*

Ka.- *Entonces pues no puede ser de otra manera. Tiene que ser un 1 solamente. ¿No?*

I.- *No sé, tú sabrás. Es que no me ha quedado muy claro por qué dices que solamente puede ser el 1. Tienen que ser dos números que si los multiplicas entre ellos el resultado de 177.*

Ka.- *Pues, yo que sé. A 2 no puede ser tampoco porque 2 por 7 son 14. ¡Si es que es eso!*

I.- *Bueno, pasamos a la siguiente.*

Lo cierto es que la alumna no llega a entender demasiado bien la tarea. Con la última frase, cuando justifica por qué no puede ser 2, tampoco queda claro lo que pretende o busca. Viendo las dificultades de la alumna decidimos dejar la resolución de esta situación para pasar a la siguiente.

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

I.- [Leyendo el enunciado]. *Ayúdame de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación explicando el proceso que has seguido. Tengo aquí una calculadora y puedes utilizarla para lo que quieras porque tienes que hacer esa multiplicación.*

Ka.- *¿La hago directamente?*

I.- Como tú quieras.

Ka.- Bueno, pues pongo... [Introduce las cifras del multiplicando en la pantalla]. *¿No caben más números! Y falta un número. ¿Entonces qué hago?*

I.- No sé.

Ka.- Pues sin la calculadora. *¿La hago sin la calculadora?*

I.- Como quieras. Tú lo haces como quieras y tienes todo el espacio para escribir ahí.

Ka.- [Comienza a multiplicar usando el algoritmo estándar escrito sobre la multiplicación planteada. Transcurren unos 45'' en silencio]. *Espérate, que ya me he liado. Umm, 19... sí. ¿Yo es que ya me he liado!*

I.- *¿Te has liado? Bueno, empieza de nuevo. Táchalo y lo pones abajo si quieres.*

Ka.- Bueno, pues lo hago desde el principio. [De nuevo plantea la multiplicación para aplicar de forma técnica el algoritmo estándar escrito. Transcurren 1' 15'' aprox. en silencio hasta completar el primer resultado parcial]. *Pero lo hago así directamente o no hace falta que lo haga.... A ver, que no hace falta que lo haga así...*

I.- Como quieras, tú lo haces como quieras.

Ka.- *Porque es que si lo hago así, así no me cabe. No puede ser, no me cabe. No, porque así no puede ser.* [Prueba a emplear la calculadora para obtener el segundo resultado parcial pero vuelve a la misma conclusión de que las cifras del multiplicando no caben en la pantalla].

I.- *¿Cómo dices? Que no te cabe.*

Ka.- *Claro porque son muchos números y no me cabe. Pues lo hago a mano y ya está. 54, me quedan 5....*

I.- [Transcurren aprox. 1' 45'' en silencio hasta completar los pasos del algoritmo]. *Oye, dime una cosa: ¿qué problema tenías entonces con la calculadora?*

Ka.- *Pues porque cuando pongo esta cifra no me cabe en la pantalla.*

I.- *Y aún así, ¿no podías haber utilizado la calculadora?*

Ka.- Sí.

I.- *¿Cómo?*

Ka.- *Pues cojo... pones 4 por 9 y lo que te dé, pues así. Haciendo eso, de otra manera. Sí, claro, de esa manera.*

I.- Bueno, pasamos a la siguiente.

Utiliza de forma Técnica el algoritmo estándar escrito pero comete un error al multiplicar con las decenas del multiplicador. En ningún momento se observa alguna predisposición de uso formal del algoritmo.

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Ningún diálogo destacable. Tan sólo resaltamos los comentarios realizados sobre la corrección de la segunda multiplicación:

Ka.- [Respecto a la segunda multiplicación]. *Ésta está bien.*

I.- *Ésa está bien.*

Ka.- Sí. *¿Y la dejas así?*

I.- *Si dices que está bien, pues la dejas así.*

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

Ka.- *Eso, esta palabra qué significa [en referencia al término algoritmo].*

I.- *¿La palabra algoritmo? Es el método de cálculo que tú utilizas para multiplicar. Entonces, se está diciendo que utilices ese procedimiento para calcular eso.*

Ka.- *Así.*

I.- *Vale, pero fíjate que aquí lo que has hecho ha sido multiplicar...*

Ka.- *De abajo para arriba.*

I.- *Efectivamente, de abajo para arriba.*

Ka.- *Claro, porque de abajo para abajo no se puede. Sí, pero daría lo mismo.*

I.- *Daría lo mismo. ¿Serías capaz de hacerlo, como tú dices, de abajo para abajo?*

Ka.- *¿De arriba para abajo?*

I.- *Sí.*

Ka.- *Sí, yo creo que sí.*

I.- *¿Cómo sería?*

Ka.- *A ver... [vuelve a emplear el algoritmo estándar para resolver 251 por 6]. Claro porque multiplicas 6 por 1, 6. Después, como no te llevas ninguna, 6 por 5, 30, te llevas 3 y 6 por 2, 12 más 3, 15. ¿No?*

I.- *Entiendo.*

Ka.- *No sé de otra manera.*

Esta alumna se ve afectada por la disposición de los factores. En concreto, no llega a emplear el algoritmo estándar escrito en la disposición mostrada sino que cambia el orden para aplicar el algoritmo en la disposición estándar: el número mayor es el multiplicando y el menor es el multiplicador.

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

Ka.- *¿Aquí tengo que poner las cosas?*

I.- *Tienes que decir cuántas cifras tiene el multiplicador, que es el número que hay aquí abajo, y cuántas cifras tiene el multiplicando, que es el número que hay aquí arriba.*

Ka.- *¿Cuatro puede ser?*

I.- *¿Cuatro cuál? ¿El multiplicando... el de arriba o el de abajo?*

Ka.- *El de arriba.*

I.- *El de arriba.*

Ka.- *Sí.*

I.- *¿Cuántas? Cuatro.*

Ka.- *Cuatro.*

I.- *¿Y por qué?*

Ka.- *Pues porque que yo sepa la multiplicación es... lo de arriba tiene que tener un número menos que el resultado que da.*

I.- *Un número menos que el resultado que da.*

Ka.- *No, a ver, aquí hay cinco cifras pues arriba.... Es igual que aquí [utiliza la multiplicación de la situación anterior como ayuda en su explicación]. Aquí hay tres cifras y abajo hay cuatro, entonces la multiplicación es.... Aquí hay dos, ¡ay, yo que sé! Sí, aquí hay dos y aquí hay 3 y van los resultados... [ahora toma como referencia los productos de la situación 4].*

Aquí hay cinco [número de cifras de los productos parciales] y aquí pues tendría que haber cuatro [número de cifras del multiplicando].

I.- *¿En cuál me dices, en el de abajo o en el de arriba?*

Ka.- *En el de arriba.*

I.- *En el de arriba cuatro.*

Ka.- *Sí.*

I.- *Por lo que me has dicho.*

Ka.- *Sí. Espere, ¿lo pongo aquí?*

I.- *No, no es necesario.*

Ka.- *Vale.*

I.- *¿Y el de abajo?*

Ka.- *Sí, éste de aquí, ¿no?*

I.- *Ése.*

Ka.- *Cuatro también, quizá. O tres, ¿no? [Permanece en silencio unos 15'']. Tres.*

I.- *Tres. ¿Por qué?*

Ka.- *Pues por lo mismo que antes. Que si... por lo mismo.*

I.- *¿Cómo por lo mismo de antes?*

Ka.- *A ver, aquí supongamos que hay... he dicho antes cuatro números, ¿no?*

I.- *Cuatro números.*

Ka.- *Y abajo hay tres, multiplicando. Entonces pues yo he hecho así como multiplicando y me da cinco cifras. Así que ahí tiene que haber tres y ahí cuatro.*

I.- *Lo del cuatro me queda claro pero lo del tres no.*

Ka.- *A ver, porque supongamos que hay una multiplicación, ¿no?, y el resultado te da cinco cifras y el de arriba son cuatro, el de abajo pues tienen que ser tres porque.... A ver, he ido así como multiplicando y me dan cinco cifras nada más. Hasta cinco cifras. Y eso.*

I.- *Bueno, pasamos a la siguiente.*

Las explicaciones no son del todo claras aunque las respuestas se dan por válidas. En cualquier caso:

Respuesta de tipo 6a

Situación 7

I.- *Entiendes la pregunta, ¿no?*

Ka.- *Sí.*

I.- *Se trata de encontrar los números que hay en estos huecos lo que pasa es que se ha tapado el multiplicando. A pesar de eso, ¿sabrías determinar cuáles son los números de estos huecos?*

Ka.- *Sí. ¿Lo pongo aquí o no hace falta?*

I.- *Como quieras, tú haces lo que quieras.*

Ka.- *[Comienza intentando determinar las cifras del multiplicando]. El 5. 3 por 5, 15, me llevo 1.... Umm, no puede ser tampoco pues si aquí me da 0... o sí. 15, me llevo 1, 3 por.... [Tras 15'' en silencio] 0, 3 por 0, 0 y 1, 1. ¿No?*

I.- *Entiendo lo que estás haciendo.*

Ka.- *Después, 3 por... ¡yo qué sé aquí lo que tenía que haber! 3 por... [unos 25'' de reflexión en silencio]. ¿A 3? 3 por 3, 6, pero si me llevo, no... sí...no sé.*

I.- *No sé, pon lo que tú vayas viendo.*

Ka.- *[Transcurren otros 40'' en silencio]. Y el 3 no puede ser porque 3 por 3 son 9 así que tienen que ser 2. Pero es que tampoco puede ser porque si 3 por 2 son 6, ahí*

pone un 8. Y si 3 por 3 son 9, ahí pone un 8. [Reflexión realizada sobre las posibles cifras del multiplicando en relación con las cifras del primer producto parcial]. *Así que si me paso o no me paso. Yo qué sé.*

I.- *¿Y entonces?*

Ka.- *Por eso. [Tras 20'' en silencio]. 3 por 4 entonces son 12, 3 por 5 son 15, yo qué sé. 3 por 6, son 18, sí, no. [Otros 15'' en silencio]. Y 3 por 9 son 30 no 38. ¿A 6 puede ser, 18? ¿Lo pongo?*

I.- *Tú puedes hacer lo que quieras.*

Ka.- *Yo qué sé, si es que no lo sé. [Instantes de silencio]. Pero es que entonces no me da porque son 18 y ahí pone 38. Y ahí ya tampoco.*

I.- [Transcurren unos instantes en silencio]. *¿Entonces qué? Bueno, ¿y los huecos de aquí abajo los podrías ir rellenando?*

Ka.- *Sí, pero entonces ya.... Sí, también pero ya es que tampoco me daría. [Unos 15'' en silencio. La atención se vuelve a dirigir sobre el primer resultado parcial, siguiendo en orden algorítmico estándar]. Y tampoco porque aquí ahora tendría que haber otro número [otra cifra en el multiplicando como unidades de millar]. Entonces puede ser a 18, a 3 por 6, 18 y me llevo 1 y 1 por 3, 3. Pero entonces tampoco... ahí me da un 4, no un 3. Yo qué sé. ¿A 0? No, tampoco porque entonces me da un 2. A 3 por.... A 1, 3 pero entonces ya no me da 18. [Transcurren otros 25'' aprox. en silencio]. ¡No me sale! Si es que no, es que no.*

I.- *Bueno, no te preocupes mujer. Si quieres pasamos a la siguiente.*

Ka.- *Pues sí, porque si no es que no me va a salir. Yo qué sé.*

I.- *Bueno, vale.*

Por el diálogo establecido y el registro escrito recopilado podemos concluir que la alumna está fuertemente condicionada por el conocimiento de las cifras del multiplicando así como por el orden de los pasos en la secuencia algorítmica estándar. No muestra ningún indicio de naturaleza Analítica.

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

Ka.- [Primera M CCD] *A ver, 2 por 5, 10, me llevo 1. 5 por... 3 son 15. [Transcurren 35'' de reflexión en silencio]. Ésa está bien porque no le puedo poner otra. Como no sea 4: 5 por 4, 20. Sí, ahí puede ser 4. No, tampoco. [Tras 40'' en silencio] ¡Si es que no me salen de éstas porque...!*

I.- *¿Qué problema tienes en ésta?*

Ka.- *Pues porque no me da ninguno en ese número. Aquí, 2 por 5, sí, 10, pero después ahí [decenas del multiplicando] es que no me da. No me da ninguno.*

I.- *Has estado probando con cifras.*

Ka.- *Claro, pero no me da ninguno porque yo qué sé. Ahí ese no sé si está bien tampoco. Yo creo que sí porque me da 10. 0, me llevo 1. Y 5 por, yo qué sé, por 3, 15, son... y no me da 3. Ahí podría ser un 1 y un 3 pero entonces, ¿cuál pongo allí [centenas del multiplicando]? Claro pero es que si pongo un 2 aquí, después al multiplicar 4 por 2, 8 y no me da un 4.*

I.- *Entiendo.*

Ka.- *Así que ése.*

I.- *Bueno, intenta la siguiente a ver.*

Ka.- [Transcurren aprox. 1' 15'' en silencio en los que la alumna intenta completar los huecos siguiendo los pasos usuales de la secuencia estándar. De este modo propone

15 como multiplicando y 105 como primer resultado parcial]. *Pero después aquí... ahí tampoco me da después [no hay ajuste con la suma en columnas]. A 2, sí, pero después yo me llevo... ¡si es que no me sale! Porque después 2 por 7, 14 y el 3 que me llevo, entonces tampoco me da. Son 17 y ahí un 7 y me da un 4. [Reconoce que las decenas del primer resultado parcial deben ser 4 aunque no las fija como resultado concluyente] ¡Yo qué sé si es que...! [Transcurren unos 20" en silencio] Y después ahí tampoco sería porque... si es que no porque no salen los números. Aquí son 35, me llevo 3 y después aquí cuando multiplicas 7 por 1, esto son 7 más 3, 10 y aquí no te sale porque si pones aquí 10, después aquí en el resultado te da 4 y no lo puedes sumar. ¡Así que esto no sale! Esto no sale, no sé porqué.*

I.- Bueno...

Ka.- Yo qué sé. Pues esto no me sale.

I.- Bueno, pues ya está. No te preocupes, pasamos a la siguiente.

Respuesta de tipo 8a

Situación 9

Ka.- ¿Qué sentido tienen las llevadas?

I.- Es decir, ¿por qué hay que llevarse cuando uno multiplica?

Ka.- Porque si no te la llevas no sale el resultado. Claro porque.... A ver, por ejemplo, 3 por 6 son 18 y me llevo 1. 18 y como aquí no puede poner un 1 te lo tienes que llevártelo.

I.- No puedes poner un 1.

Ka.- Claro porque.... A ver, son 18, ¿no?, entonces si no te la llevas después aquí no te da el mismo resultado. Porque mira, aquí son 3 por 4, 12 y aquí pone 13 y si no te llevas la del 18, el 1 del 18, te da 12 y si te la llevas te da 13. ¿Lo comprendes o no? [Indicio no-Formal].

I.- Entiendo lo que quieres decir. Oye, ¿y por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Es decir, el 3 se tiene que multiplicar por el 6, por el 4 y por el 1. Y el 2 por el 6, por el 4 y por el 1.

Ka.- Porque tienes que ir siguiendo un orden. Tienes que ir primero multiplicar el 3 con todos los números y da el resultado. Y después si hay al lado otro número más pues lo sigo multiplicando, en orden.

I.- ¿Pero por qué se hará eso?

Ka.- Yo qué sé. Pues no lo sé. Pues porque si no sigo un orden, los números.... Porque no podría multiplicar primero 3, primero por 4 o después 2 por 1 y así. Devolverlos siguiendo un orden y como no lo sigas pues te sale la multiplicación mal. [Indicio no-Formal].

I.- Entiendo lo que dices. ¿Y por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo de otro? Es decir, ¿por qué se van colocando los números aquí en una fila, estos números en la fila de abajo, si hubiesen más en la fila de abajo, etcétera?

Ka.- Pues porque después como los tienes que sumar, los tienes que ir sumando así en filas, no los puedes sumar... si ésta, si estuviese aquí al lado, no la podrías sumar. [Se refiere al segundo resultado parcial situado en la misma fila y a continuación del primer resultado parcial]. Y para sumarlos pues tienen que estar en filas. Y eso. [Indicio no-Formal].

I.- Oye, ¿y lo del hueco? ¿Por qué se deja un hueco aquí? ¿Qué significado tiene ese hueco?

Ka.- Pues no lo sé. [Instantes de silencio]. Ah, pues porque cuando... hay aquí dos números, ¿no?, el 23, y al multiplicar primero el 3 esa cifra está.... Mira, a ver,

multiplicas el 3 por todos los números, ¿no?, y te da un resultado y si multiplicas el 2 por los otros números también te da otro y para que no se, no se..., para que no te equivoques cuál es una del otro pues las ponen así para que sepas que el primero es del primer número y el segundo del segundo. [Indicio no-Formal].

Y después, ¿por dónde iba? ¿Ésta?

I.- Sí, ¿por qué se deben sumar las cifras en columnas para llegar al resultado? ¿Por qué se tiene que sumar al final?

Ka.- Pues para que te dé el resultado.

I.- Claro, ¿pero por qué se tiene que sumar?

Ka.- Pues porque si lo multiplicas ya no te da el mismo resultado que si lo sumas o que si lo divides.

I.- Y hay que sumar entonces.

Ka.- Sí, además por no estar en posición para multiplicar.

I.- No está en posición para multiplicar.

Ka.- Claro. Porque para multiplicar tiene que estar uno debajo del otro y sin embargo ahora, como están ahora, multiplicados pues no se podría. Bueno, sí se puede pero no es esa forma de multiplicar. La forma de multiplicar es un número debajo del otro. [Indicio no-Formal].

I.- Entiendo.

Ka.- Después... [lee en silencio la última cuestión]. Pues no.

I.- ¿Conoces alguna propiedad matemática que justifique o que sirva para explicar el método que nosotros utilizamos para multiplicar?

Ka.- No. ¡Qué va! No.

I.- ¿No se te ocurre ninguna?

Ka.- Ninguna. [Instantes en silencio]. ¡Yo qué sé! No se me ocurre ninguna.

I.- Bueno, pues ya está. Ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9a

Cristina (1º ESO) [15/05/2003]

The image shows three panels of handwritten mathematical work. The first panel shows a multiplication problem: 1234×567 with the student's solution 70000 . The second panel shows a multiplication problem: 1234×567 with the student's solution 70000 . The third panel shows a multiple-choice question with a grid-in response: $1234 \times 567 = ?$ with the student's answer 70000 .

Situación 1

Investigador.- [Una vez obtenido 194 como resultado (incorrecto)] *¿Ya la has hecho? Y dime, ¿cómo la has hecho, cómo has obtenido el resultado?*

Cristina.- *Pues... los dos primeros 6 y luego he multiplicado por 2, que es más fácil y luego todos los otros se lo he ido sumando.*

I.- *Los dos primeros 6...*

Cris.- *Sí, éstos dos. Luego he multiplicado por 2, que sería igual que sumarlos.*

I.- *¿Has hecho 16 por 2 o cómo?*

Cris.- *No, 6 por 2. Pues, así, si puedo...*

I.- *¿Y después?*

Cris.- *Y luego pues le he ido sumando todos esos [los demás 6].*

I.- *¿Y lo podías haber hecho de otro modo? ¿Se te ocurre haberlo hecho de otra forma?*

Cris.- *No, ahora mismo no. Bueno... está mal. Que sería 2 por 6, sería éste nada más no sería ése también. O sea que la tengo mal [identifica el error en las unidades del resultado].*

I.- *¿La tienes mal?*

Cris.- *Yo creo que sí.*

I.- *Bueno, pues entonces corrígela si quieres.*

Cris.- [Permanece 1' aprox. en silencio intentado corregir el error]. *Así, ¿no? [Palabra ininteligible]... la tenía bien. Sería 6 por 2... 6 y 6 son 12 y 6 por 2 también. Sería 12... [Otros 50'' en silencio] ¡Yo qué sé! ¡Es que me hago un lío con tanto 6!*

I.- *Te haces un lío con tanto 6. Bueno, pues ya está. Creo que lo has hecho sumando, ¿no? ¿Y no se te ocurre haberlo hecho de otro modo?*

Cris.- *Podría haber ido multiplicando 6 por 2 y luego aquí también y... lo que saliese...*

I.- *Multiplicando los...*

Cris.- *Sí.*

I.- *¿Multiplicando, qué?*

Cris.- *Los 6.*

I.- *Los 6.*

Cris.- *Serían 6 por 2, como 12, como si hubiera sumado estos dos. Luego 6 por 2 como si éstos y luego todos los 12 pues sumarlos.*

I.- *Entiendo. Si quieres pasamos ya a la siguiente.*

Respuesta de tipo 1a**Situación 2**

Cris.- *¿Y aquí no puede haber...?*

I.- *Tienes que encontrar dos números que al multiplicarlos dé 177.*

Cris.- *Pero que no lleve ninguno.*

I.- *Pero ninguno de ellos...*

Cris.- *Sea 1.*

I.- *Sea 1. Porque alguien puso 177 por 1, que es 177. Eso no vale. [La alumna permanece en silencio durante 50'' aprox.] ¿Qué se te ocurre hacer?*

Cris.- *Ir buscando a ver...*

I.- *Puedes escribir aquí y hacer todas las cuentas que quieras. [Otros 40'' de silencio continuado] ¿Qué estás pensando, a ver?*

Cris.- *Pues... pienso algún número e intento multiplicarlo.*

I.- ¿Por ejemplo?

Cris.- Pues, yo qué sé, espera.... Algún número, por ejemplo, busco 35 y lo multiplico por algún número que sea 7 o 37 o algo así.

I.- A ver...

Cris.- Por ejemplo, espérate... Por ejemplo, 39 por 3, serían 3 por 9, 27, serían 7. Me llevo 2... 3 por 3, 9, pero no saldría. [Indicio de uso Analítico del algoritmo].

I.- 39 por 3, me dices. ¿Y por qué has probado con el 39 y el 3?

Cris.- Porque 3 por 9 son 27, entonces sería 7.

I.- Entiendo.

Cris.- Pero ese no valdría.

I.- [Pasados unos 20'' en silencio] Si quieres, puedes escribir para ayudarte.

Cris.- No. Es que si... se podría hacer de otra manera pero es que no sé cómo.

I.- Bueno, tú lo haces como quieras. [Nuevo silencio de 40'' aprox.] ¿Ahora por qué número estás probando?

Cris.- Por el 29... tampoco.

I.- ¿29 por cuál?

Cris.- Por 3 también. [Unos 35'' de reflexión en silencio] ¡Me podía tirar toda la hora! [Risas]

I.- Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.

Cris.- Mejor.

I.- Pero me extraña que no intentes escribir nada, es decir, que lo hagas todo mentalmente. Bueno, tú lo haces como quieras. Si te parece, pasamos a la siguiente.

Respuesta de tipo 2c

Situación 3

I.- Mira, tengo aquí una calculadora. Se trata de hacer esta multiplicación y para ello puedes utilizar la calculadora.

Cris.- [Intenta introducir las cifras del multiplicando en pantalla] ¡No coge!

I.- No coge.

Cris.- No. Espérate... podríamos hacerlo 222.... No, espérate, 999 por 4, luego 444 por 4 y 222 por 4. Y luego con el 6. [Comienza a realizar los cálculos con la calculadora; descomposición errónea del multiplicando].

I.- [Tras 20'' de trabajo en silencio] A ver, ¿ese número cuál es? [El que aparece en la pantalla].

Cris.- 999 por 64.

I.- Bueno, pues ve anotándolo por ahí si quieres.

Cris.- [Transcurren unos 25'' en silencio] ¡Si fuese probado otra cosa, a lo mejor...!

I.- ¿Qué?

Cris.- Que si fuese de otra cosa a lo mejor lo haría. ¡Es que las matemáticas no...!

I.- No te preocupes, a mí lo que me interesa es lo que tú estás diciendo, nada más. Pero no te preocupes por si está bien o está mal.

Cris.- [Tras 1' de trabajo en silencio] Ya lo he sumado. [Otros 30'' de silencio] ¡Es que no creo que sea esto!

I.- ¿Por qué?

Cris.- No sé, porque igual es un número muy pequeño, esta cifra.

I.- O sea, lo que has hecho es sumar estos resultados, ¿no? Y dices que es un número muy pequeño.

Cris.- *Yo creo que sí porque... tenía que haberlo hecho primero por el 4 o por el 6. No sí, pero... sí. [Unos 20'' de silencio] Que todo esto sería como si fuese el número entero.*

I.- *¿El número entero cómo es?*

Cris.- *Pues, primero es 222, 444 y 999. Todos estos resultados serían como si la hubiésemos hecho entera y el resultado final sería como... sí, sí, sí, yo creo que está bien. ¡No sé si me explico!*

I.- *Sí, entiendo lo que quieres decir.*

Cris.- *Entonces yo creo que sería eso. ¿Lo apunto aquí? [El resultado obtenido 106560].*

I.- *Bueno, apúntalo ahí si quieres.*

Respuesta de tipo 3a

Situación 4

No llega a establecerse ningún diálogo destacable. Lo realizado por la alumna de un modo escrito proporciona información suficiente para nuestros propósitos. En este sentido, conviene resaltar que esta estudiante no hace explícito el error de posición incluido en la segunda multiplicación.

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

Cris.- *¿Algoritmo? Eso no sé lo que es.*

I.- *Es el método que utilizamos para multiplicar. Lo que tú has utilizado aquí [en la situación anterior] para multiplicar. Se trata de hacer este cálculo empleando ese método.*

Tras la aclaración, la alumna aplica de forma Técnica el algoritmo estándar escrito manteniendo la disposición de los factores tal como se presentan.

Respuesta de tipo 5b

Situación 6

I.- *¿Se entiende?*

Cris.- *Sí.*

I.- *El multiplicador es el de abajo y el multiplicando es el número de arriba.*

Cris.- [Permanece en silencio unos 15'' pensando la respuesta a la primera pregunta] *Ahí yo creo que tiene tres.*

I.- *¿Cuál?*

Cris.- *El multiplicando, que tiene tres.*

I.- *A ver, ¿a cuál te refieres?*

Cris.- *Pues, el de abajo.*

I.- *El de abajo es el multiplicador.*

Cris.- *Eso, es que me he confundido.*

I.- *Bueno, el de abajo tiene tres. ¿Por qué?*

Cris.- *Porque hay tres operaciones. Siempre se multiplica el mismo número pero por los distintos números que hay abajo.*

I.- *Tres operaciones o tres filas, ¿no?*

Cris.- *Sí, tres filas. [Transcurren unos instantes en silencio]. Tiene cinco el de arriba.*

I.- *El de arriba, cinco.*

Cris.- *Porque siempre tiene las mismas que abajo, que la primera fila. El primer número siempre es... ¿me explico?*

I.- *Sí, ¿el primer número siempre es... cómo?*

Cris.- *Siempre es el que... que multiplicar todo y se colocan todos debajo de cada uno. De cada uno el de arriba. Yo creo que es por eso.*

I.- *Entonces tiene cinco, ¿no?*

Cris.- [Asiente] *¿Hay que escribir algo?*

I.- *No, nada. Vamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

Cris.- *¡Esto se me da a mí muy mal!*

I.- *Mira, de lo que se trata es de encontrar las cifras de cada uno de los huecos...*

Cris.- *De cada uno de los huecos.*

I.- *En cada uno de estos cuadritos van cifras y hay que determinarlas. Lo que pasa es que se ha ocultado el multiplicando. A pesar de eso, a ver si puedes completar los cálculos.*

Cris.- [Permanece en silencio unos 20''] *Esto nunca lo he hecho yo bien, siempre me fijaba del otro.*

I.- *¿De qué otro?*

Cris.- *Cuando lo hacía el maestro en la pizarra, [yo] lo hacía pero que...*

I.- *¡Ah, ya!*

Cris.- *Nunca...*

I.- *Bueno, a ver lo que se te ocurre. Intenta lo que buenamente puedas. [Pasado un 1' de reflexión en silencio]. ¿En qué estás pensando?*

Cris.- *A ver que... a ver cuál pueden ser de aquí [se centra en las cifras del multiplicando]. Por ejemplo, 3, podían ser por 5 [unidades del multiplicando] porque 3 por 5 son 15. Pero por 0... y esto podía ser 6 [unidades del multiplicando], pero 3 por 6, 18, pero te llevas 1 entonces no puede ser porque aquí hay otro 3 [se refiere al 3^{er} resultado parcial].*

I.- [Unos 55'' después] *¿Entonces, qué pasa?*

Cris.- *No sé.*

I.- *¿No se te ocurre nada? ¿Ninguna cifra que pueda ir aquí o aquí o en alguna de éstos [huecos].*

Cris.- *Aquí podría ir un 9 pero... un 9 de 3 por 3, 9.*

I.- *En el segundo hueco un 9 [centenas del 1^{er} resultado parcial]*

Cris.- *Pero no creo.*

I.- [Pasados unos 20''] *¿Y por debajo, en los otros huecos?*

Cris.- *Pues, me voy a poner a pensar. [Instantes de silencio] Es que si no están éstos [cifras del multiplicando] prácticamente éstos [huecos] no se pueden. [Tras 30'' de silencio] ¡No voy a sacar ninguno!*

I.- *Bueno, no te preocupes, pasamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

I.- [Tras permanecer la alumna en silencio unos 2' intentando completar la primera MCCD] *¿Qué pasa?*

Cris.- *Es que no lo sé, con el 5 es más complicado.*

I.- *Tú has puesto aquí [unidades del multiplicando] un 6 y después un 4.*

Cris.- *Porque el 6 aquí no puede haber: 4 por 6... [en el 2º resultado parcial].*

[Transcurren otros 30'' en continuo silencio]. *Esto no...*

I.- *Bueno, no te preocupes. ¿Qué problema tienes aquí [con las unidades del multiplicando]?*

Cris.- *Tendría que ser el 5. Tendría que ser 5 por 2, 5 por 4..., números pares. Y luego aquí, para que te salga un 3 tendría que ser 5 por 6, 30 y te llevas 3, pues el 2. Entonces sí estaría bien pero luego todos los otros... [Instantes de silencio] 5 por 7 no porque son 35 [No logra romper con el orden de la secuencia algorítmica. Ninguna manifestación de empleo Analítico].*

I.- *Bueno, si quieres intenta la siguiente.*

Cris.- [Después de 1' 35'' aprox. de intentos en silencio] *Es que sé que hay otra forma para averiguarlo pero...*

I.- *¿Cómo?*

Cris.- *Que sé que hay otra forma para averiguarlo.*

I.- *¿Hay otra forma?*

Cris.- *Es que no... sé que hay pero no sé cuál es.*

I.- [Tras 55'' en silencio] *¿Y ahora qué estás pensando?*

Cris.- *A ver... estoy intentando poner aquí algún número [decenas del multiplicando] para que aquí salgan dos cifras [centenas y decenas del 1º resultado parcial] y sea un 4, porque el resultado es 4 [Manifestación de uso Analítico, por eso catalogaremos la respuesta de tipo 8b]. [Otros 45'' en silencio] ¿Es que me estoy haciendo un lío! [Nuevo instante de silencio] Creo que es así. ¿Esto lo entiendes?*

I.- *Sí, eso es un 2, ¿no?*

Cris.- *Sí. Esto es un 1 y esto un 4.*

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

I.- [Después de que la alumna leyera el enunciado] *Por ejemplo, ¿qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse cuando se multiplica?*

Cris.- *¿Por qué me llevo?*

I.- *Sí.*

Cris.- *Pues porque 3 por 6, 18; el 1 no te lo puedes dejar tirado por ahí.*

I.- *¿Cómo? El 1...*

Cris.- *El 1 de esto no puedes ponerlo aquí porque sería como si fuese de esta operación, de 3 por 4. Entonces se lo sumas a éste. No sé, yo es que nunca me he parado a pensar eso. Me enseñaron así y ya está.*

I.- *¿Y por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Por ejemplo, el 3 por el 6, el 3 por el 4 y el 3 por el 1 y después hay que hacer lo mismo con el 2: 2 por 6, 2 por 4, 2 por 1. ¿Eso por qué es?*

Cris.- *Porque si los vas alternando sería un lío. Luego se van haciendo 3 por 6, luego 2 por 6 otra vez... ¿Es que no lo sé! Nos haríamos un lío.*

I.- *Nos haríamos un lío. ¿Y por qué se van poniendo los resultados parciales que vas obteniendo en filas, uno debajo del otro?*

Cris.- *¿Uno debajo del otro?*

I.- *Multiplicas por 3: 3 por 146 y el resultado lo colocas aquí, ¿no?*

Cris.- *Ah, sí.*

I.- Y después haces lo mismo con las otras cifras. Vas colocando los resultados en filas, uno debajo del otro. ¿Eso por qué?

Cris.- Porque son números distintos. El 3 va con esto [el 146] y luego el 2. Son cosas distintas, para luego sumarlo.

I.- Son cosas distintas.

Cris.- Sí.

I.- Por eso se coloca uno debajo del otro.

Cris.- Creo que sí.

I.- ¿Y por qué se deja un hueco aquí? ¿Qué significado tiene ese hueco?

Cris.- Que... sería... porque no es 3 por 6, es 2 por 6, entonces lo pones debajo del 2. Igual que aquí, el 8 va debajo del 3. También tienen que ir debajo de éstos. Si tuviese otra cifra más [el multiplicador] iría debajo de la otra cifra dejándose el hueco ahí.

I.- Entiendo lo que dices. ¿Y por qué se tienen que sumar las cifras en columnas para llegar al resultado? Al final, ¿por qué hay que ir sumando en columnas?

Cris.- Porque son sumas, como si fuese una suma vas sumando en columnas.

I.- ¿Y por qué hay que sumar? ¿Por qué se tiene que sumar...?

Cris.- No lo sé.

I.- ... para llegar al resultado?

Cris.- La multiplicación, según dice Don Juan, es una suma muy especial. Sería... en realidad multiplicación es suma. Yo creo que es eso.

I.- Y ya para terminar, ¿conoces alguna propiedad matemática que se utilice para justificar este método, para justificar todo esto que hemos dicho, el porqué se multiplica así?

Cris.- No. No conozco nada.

I.- ¿Qué sirva para explicar la colocación de las cifras y todo eso?

Cris.- No. Que yo me acuerde no me lo han explicado. No lo sé.

I.- Bueno, ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9a

Miguel (1º ESO) [20/05/2003]

The image displays three panels of handwritten mathematical work. The first panel shows the initial multiplication problem: 146×32 . The second panel shows the partial products: 292 (from 146×2) and 4380 (from 146×30). The third panel shows the final sum of the partial products, resulting in 4672 .

Situación 1**Miguel.-** 112.**Investigador.-** 112. *¿Y cómo lo has hecho?***Mi.-** *Pues he multiplicado los 6, he multiplicado 6 por 7 y luego ya está, luego le he sumado lo otro.***I.-** *¿Qué significa le he sumado lo otro?***Mi.-** *Los 1 más el 4 que me llevaba.***I.-** *O sea, lo que has hecho, ¿qué ha sido sumar después 1 más 1 más 1...?***Mi.-** *Como son 7, he sumado 7 más 4.***I.-** *Entiendo.****Respuesta de tipo 1a*****Situación 2****I.-** *Tienes que encontrar dos números naturales, o sea que no tienen decimales, cuyo producto sea 177, que al multiplicarlos dé 177. [Transcurren unos 2' en silencio en los que el alumno emplea reiteradamente el algoritmo estándar escrito de forma técnica para localizar los dos números buscados]. ¿Qué estás intentando?***Mi.-** *Sacar este número [el 177].***I.-** *¿Cómo?***Mi.-** *Pues multiplicando.***I.-** *Multiplicando números...***Mi.-** *Naturales. [Transcurre otro 1' 10'' aprox. en silencio, empleándose la misma estrategia y sin indicio alguno de uso analítico]. Ésta es la que más se acerca.***I.-** *¿Cuál?***Mi.-** *Ésta, el 8 por 21. Entonces, 9 por 21...181. [Permanece en silencio].***I.-** *Bueno, ¿qué pasa? ¿No das con el número?***Mi.-** *No. 21 por 7... que va, sale demasiado chico: 147.***I.-** *Bueno, si quieres pasamos a otra.***Mi.-** *A otra, porque ésta....***I.-** *Porque... ¿no se te ocurre otra forma de hacerlo?***Mi.-** *No sé. Como la estamos dando así en matemáticas, más o menos.***I.-** *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.****Respuesta de tipo 2b*****Situación 3****I.-** *Me he traído aquí una calculadora y se trata de ayudarte con ella para realizar esta multiplicación. O sea, debes hacer esta multiplicación y puedes usar la calculadora.***Mi.-** [Pasados unos 2' 20'' de cálculos en silencio en los que ha empleado de modo técnico el algoritmo estándar escrito de la multiplicación]. *¿Ahora por ésta?***I.-** *A ver, lo que has hecho.... Bueno, ¿ahora qué vas a hacer?***Mi.-** *Multiplicar con ésta. [Utiliza la calculadora con la intención de comprobar el resultado obtenido; transcurren unos 25''] ¿Anda! A ver, esto no tiene más. ¿Esto sigue para atrás?***I.-** *No.***Mi.-** *¿Entonces por qué no caben?*

- I.-** Claro, no caben. No cabe todo el número entero.
Mi.- ¿Entonces qué hacemos?
I.- No sé.
Mi.- A ver, veamos...
I.- ¿Qué pretendes?
Mi.- Pues, como me has dicho que lo multiplique.
I.- Yo te he dicho que calcules esa multiplicación. [Tras unos 15'' en silencio].
 Vamos a ver, ¿qué has hecho? Has multiplicado sin calculadora.
Mi.- Sí.
I.- Y ahora lo que estás haciendo es...
Mi.- Multiplicarlo.
I.- Utilizar la calculadora. ¿Para qué?
Mi.- Para comprobarlo. [Emplea la calculadora para realizar el producto 444999 por 64 y comparar el resultado con parte del obtenido mediante el uso del algoritmo].
I.- Para comprobarlo. ¿Y ya está?
Mi.- Ya está.
I.- ¿Ya la has comprobado?
Mi.- Ya lo he comprobado.
I.- ¿Y con los otros tres qué pasa [en referencia a las cifras más significativas del resultado total]?
Mi.- Tienen que estar bien.
I.- Tienen que estar bien.
Mi.- Como no salen, pues... [Permanece en silencio].
I.- Pues, pasamos a la siguiente.

Respuesta de tipo 3a y 3b'

Situación 4

- I.-** [Tras resolver la situación] A ver, explícame.
Mi.- Pues que aquí se ha equivocado al sumar.
I.- Pero has puesto aquí... ¿esto qué es, un 8?
Mi.- 750... espera, 780.
I.- ¿Y las otras dos?
Mi.- Están bien.
I.- Las otras dos están bien.
Mi.- [Vuelve a revisarlas durante unos instantes] Está bien.
I.- Pues, si quieres pasamos a la siguiente.
Mi.- Venga.

En esta tarea el sujeto reconoce las dos primeras multiplicaciones como resueltas correctamente. Por tanto:

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

- Mi.-** [Leyendo el enunciado] Emplea el algoritmo de la multiplicación para calcular... ¿algoritmo?
I.- El método que utilizas siempre para multiplicar.
Mi.- Yo es que esto lo pongo al revés. Siempre el número más pequeño...
I.- Tú lo haces como quieras.

Mi.- *¿Lo puedo poner?*

I.- *Sí, aquí al lado, si quieres.*

Mi.- [Cambia la disposición de los factores y aplica el algoritmo. Instantes de silencio]. *Ya está.*

I.- *¿Entonces qué me estabas diciendo?*

Mi.- *El número más pequeño lo pongo siempre abajo.*

I.- *Así es más fácil.*

Mi.- *Parece más fácil.*

I.- *¿Pero sabrías hacerlo en esta disposición, el 6 arriba y el 251 abajo?*

Mi.- *Sí, claro. 1 por 6, 6; 5 por...* [Resuelve la multiplicación empleando un procedimiento variante del algoritmo estándar escrito. Como puede observarse en el registro escrito, el alumno es sensible a la disposición de los factores]. *Igual, sí. Igual.*

I.- *Igual.*

Mi.- *Pero así es más fácil [primera forma]. Porque... hombre, si por ejemplo el número es 2500, si está abajo y el número de arriba es 6, pues lo pones al revés y te resulta más fácil. Porque tiene menos....* [Permanece en silencio].

I.- *Entiendo lo que dices. Bueno, vamos a la siguiente.*

Mi.- *Venga.*

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

Mi.- [Leyendo el enunciado] *En la siguiente multiplicación se han ocultado el multiplicando y el multiplicador. ¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicador? Justifica tu respuesta.*

I.- *El multiplicador es el de abajo,...*

Mi.- *Sí.*

I.- *... el número de abajo y el multiplicando el número de arriba.*

Mi.- *Pues el de abajo... tiene tres.*

I.- *El de abajo...*

Mi.- *El de abajo tiene tres.*

I.- *¿Por qué?*

Mi.- *Porque hay tres...umm... [señala las tres filas pero no da con un término que las identifique].*

I.- *Filas.*

Mi.- *Filas. Y el de arriba... cinco.*

I.- *El de arriba, cinco.*

Mi.- *Sí.*

I.- *¿Por qué?*

Mi.- *Porque hay cinco números en cada fila.*

I.- *Perdona, ¿por qué me has dicho cinco?*

Mi.- *Porque cinco son los números que tienen en cada fila.*

I.- *Y por eso el multiplicando tiene cinco.*

Mi.- *Claro.*

I.- *Entiendo.*

Mi.- *El multiplicador tiene tres porque... porque tiene tres, porque hay tres filas.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

Mi.- [Leyendo el enunciado]. *En la siguiente multiplicación se ha ocultado el multiplicando. A pesar de ello, ¿podrías completar los cálculos?*

I.- *Se trata de encontrar las cifras que hay ocultas tras los huecos.*

Mi.- [Tras unos 15'' en silencio]. *La primera tiene que ser un 5 [unidades del multiplicando. Se manifiesta una dependencia inicial en las cifras del multiplicando]. La segunda, 0 [primer hueco de la segunda fila]. ¿Lo pongo?*

I.- *Sí, puedes poner lo que quieras.*

Mi.- *Un 0.... La tercera...*

I.- [Tras otros 15'' de silencio] *¿En la segunda por qué has puesto un cero?*

Mi.- *Porque 0 por... por lo que haya, 0.*

I.- *Y por eso pones aquí un 0.*

Mi.- *Sí. Y 3 por... [Transcurren unos 30'' en silencio con la estrategia de determinar las cifras del multiplicando como medio para completar los huecos] ¿Esto sí es difícil!*

I.- *¿Sí?*

Mi.- *Sí. [15'' de reflexión en silencio]. Si será fácil pero no lo sé.*

I.- *¿No se te ocurre nada?*

Mi.- *En éste [2º resultado parcial] tiene que ser cero, cero, en la segunda fila.*

I.- *¿Por qué?*

Mi.- *Porque... hay aquí un 0 [decenas del multiplicador]. Estos ya son 0.*

I.- *Bueno, complétalo entonces.*

Mi.- *¡Ay, ya! Ya sé hacerlo: 0, 0, 0, 0. Esto debe ser un 83 y esto un 38 y esto un 5.*

I.- *¿Por qué?*

Mi.- *Porque me dando éste, si están en los mismos cuadrillos, pues...*

I.- *Si están en los mismos cuadrillos. ¿Eso qué significa?*

Mi.- *Mira, estos dos aquí faltan y estos dos aquí faltan. Entonces, ya está, ya se sabe.*

[Demora unos 35'' más en completar la suma y concluir la tarea]. *Ya.*

I.- *Bueno, pues pasamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

Mi.- [Tras una primera reflexión en silencio intentando completar la primera MCCD]. *Se podía hacer a 6 porque en éste no te da entonces.*

I.- *¿Cómo?*

Mi.- *Que en éste luego no te da [correspondencia con el 2º resultado parcial] si lo pones a 66 por 45. Pero aquí sí [1º resultado parcial. Transcurre otro 1' en silencio]. Este no me sale.*

I.- *No te sale. ¿Por qué?*

Mi.- *Porque, bueno porque aquí ya me he liado. Porque si aquí te da 66 y aquí si te da esto. Aquí te da bien...*

I.- *Abajo.*

Mi.- *Sí. [Instantes de silencio] Y este número también te da bien: 6 por 4, 24. Pero luego... [Transcurren aprox. 1' 15'' en silencio realizando comprobaciones].*

I.- *¿Qué pasa?*

Mi.- *Que esa no me sale. [La suma no concuerda con la elección de cifras hecha].*

I.- *¿Por qué?*

Mi.- *No sé. Porque bueno aquí debería ser entonces un 4 para que aquí te diera 8. Pero...* [No llega a imponer esta condición para la determinación de las cifras aunque supone un leve indicio de uso Analítico no mantenido. Tras 45'' de nuevos intentos en silencio desiste]. *Esta no me sale.*

I.- *¿No te sale?*

Mi.- *No.*

I.- *Bueno, intenta el siguiente entonces.*

Mi.- [Pasados 15''] *Aquí debe ser un 4* [decenas del 1^{er} resultado parcial. Transcurren unos 2'' de intentos en silencio hasta que el alumno desiste de la tarea] *Ésta no me sale.*

I.- *¿Qué?*

Mi.- *Que no la sé hacer así.*

I.- *¿Por qué dices eso?*

Mi.- *Porque, bueno que no encuentro los números.*

I.- *¿Qué números no encuentras en concreto?*

Mi.- *Pues, aquí un número* [decenas del multiplicando]. *Me tiene que dar un número ahí para que me dé 4, porque ahí sí te da 4.* [Indicio Analítico].

I.- *¿Y no lo encuentras?*

Mi.- [Tras un instante de silencio]. *No.*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

Mi.- *Pasaremos.*

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

Mi.- [Leyendo la primera cuestión] *¿Qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse? Pues, porque te sobra.*

I.- *Porque te sobra.*

Mi.- *Sí, tienes que ponérselo al otro* [indicio no-Formal]. *Y...,* [leyendo la segunda cuestión] *¿por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicador?*

I.- *Del multiplicando.*

Mi.- *Ése.*

I.- *Es decir, ¿por qué se tiene que multiplicar 3 por 6 y después 3 por 4 y 3 por 1...?*

Mi.- *Para hacerlo con más orden. Para tener un orden.*

I.- *Para tener un orden.*

Mi.- *Porque también se podría hacer 23 por 146, pero...*

I.- *¿Cómo 23 por 146?*

Mi.- *Sí se puede hacer.*

I.- *No entiendo bien qué dices.*

Mi.- *Sí, con la calculadora, claro* [. *Pero sí, esto está bien, es para no hacerte un lío. Así, pues te resultará más sencillo.*

I.- *Entiendo.*

Mi.- [Leyendo la tercera cuestión] *¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo de otro?*

I.- *Es decir, ¿por qué si tú multiplicas por 3 colocas el resultado aquí y después vas colocando los resultados una fila por debajo, cada uno de los resultados parciales que vas obteniendo?*

Mi.- *Pues para que te dé el número exacto, porque supongo que lo harían así y ya está.*

I.- *Para que te dé el número exacto.*

Mi.- *¿Si no, no te da el número!*

I.- *Si no, no te da el número.*

Mi.- *No te da el resultado correcto. Entonces pues habrá que dejarla así [indicio no-Formal]. [Leyendo la cuarta cuestión] ¿Por qué se deja un hueco en la fila correspondiente al segundo resultado parcial? ¿Por qué se deja un hueco?*

I.- *Es decir, ¿por qué se deja aquí un hueco? ¿Qué significado tiene ese hueco?*

Mi.- *Pues... el número.*

I.- *El número.*

Mi.- *El número.*

I.- *¿Cuál?*

Mi.- *Se deja un hueco porque ya es un diferente número. Antes se estaba multiplicando con el 3 y después con el 2.*

I.- *Sí, ¿y qué?*

Mi.- *Pues eso, porque hay que dejarse un espacio.*

I.- *¿Pero por qué? No lo entiendo.*

Mi.- *¿Esto porque hay unas reglas de la multiplicación y ya está! Porque hay que dejarse el espacio. [Fragmento ininteligible]. Hay que dejarse eso pues porque te lo explican así y así será. Hay que hacerlo así porque si no, no te da un resultado exacto. [Indicio no-Formal].*

[Leyendo la quinta cuestión] *¿Al final por qué se debe de sumar las cifras en columnas para llegar al resultado?*

I.- *¿Al final por qué se tiene que sumar?*

Mi.- *Pues para que te dé el resultado.*

I.- *O sea, que hay que sumar. ¿Y por qué no se sigue multiplicando o restando?*

Mi.- *Hombre, pues para que te dé el número que te tiene que dar. Como multiplicar es... [se queda en silencio].*

I.- *¿Qué?*

Mi.- *...es ampliar, pues entonces eso. Habrá que sumar. [Leyendo la sexta y última cuestión] ¿Conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de la multiplicación? ¿Alguna propiedad?*

I.- *Sí, ¿tú conoces alguna propiedad matemática que justifique por qué se multiplica así?*

Mi.- *Pues las reglas de la multiplicación.*

I.- *¿Y cuáles son esas reglas? ¿Conoces alguna?*

Mi.- *No sé.*

I.- *Las reglas de la multiplicación. ¿Esas justifican el método éste para multiplicar?*

Mi.- *Claro.*

I.- *¿Y sabrías decir alguna?*

Mi.- *Pues... cuando es así, ¿no?, hay que poner un punto, pues simplificando, que es el 0 y hay que dejarse un espacio.... [Multiplicar por 0 equivale a desplazar el resultado parcial correspondiente un lugar a la izquierda]. Así, cosas de éstas. Ésas te las explican.*

I.- *Entiendo. Bueno, pues ya hemos terminado.*

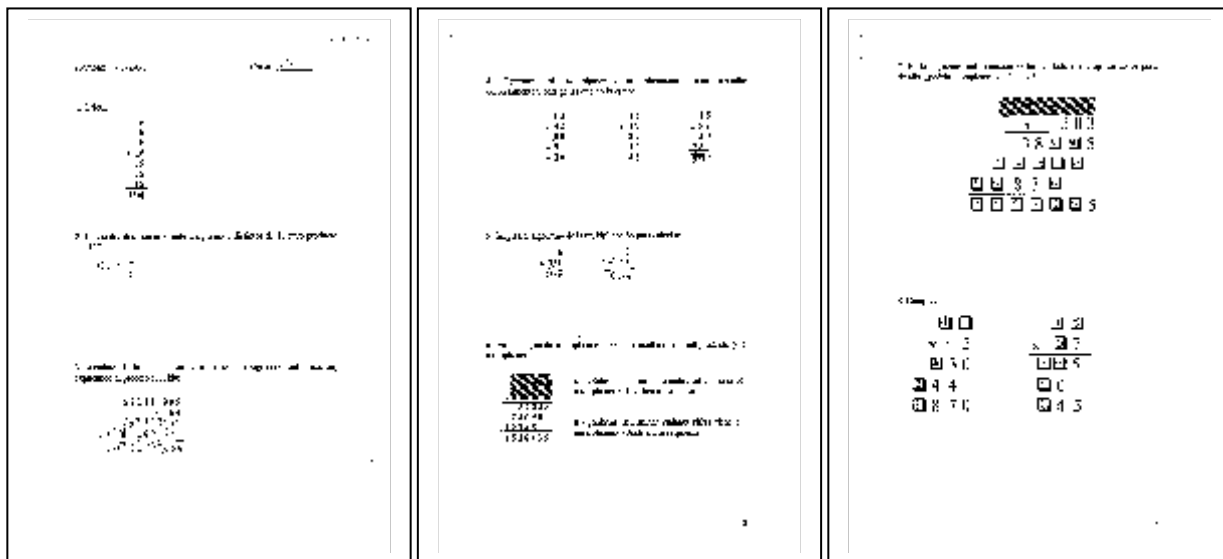
Mi.- *Es que estas preguntas todas son porque es una norma.*

I.- *Es una norma.*

Mi.- *Sí. O sea, normas que hay que cumplir. Porque si no, no te da el resultado que... [Indicio no-Formal].*

I.- *Entiendo. Bueno, pues nada, ya hemos terminado.*

Respuesta de tipo 9a

Manuel (1º ESO) [20/05/2003]**Situación 1**

Investigador.- Antes de pasar a la segunda, dime qué es lo que has hecho, cómo la has resuelto.

Manuel.- En vez de sumar todo, pues he multiplicado 16 por 7.

I.- De acuerdo, ¿mentalmente?

Man.- Sí.

Respuesta de tipo 1b**Situación 2**

I.- ¿Entiendes esta segunda?

Man.- Que al sumarlos sea el 177.

I.- Debes encontrar dos números naturales, es decir dos números sin decimales, cuyo producto, o sea que al multiplicarlos, dé 177.

Man.- ¿Puedo hacer la cuenta?

I.- Por supuesto, puedes escribir todo aquí. Y si te equivocas sigues escribiendo al lado y ya está. [Transcurren aprox. 1' 10" de reflexión en silencio por parte del alumno]. ¿Qué estás intentando?

Man.- Dividirlo por algún número para que multiplicados por estos dos salga eso. No sé. [Tras 25" en silencio]. No sé.

I.- No se te ocurre nada. Bueno, estabas ahí dividiendo pero ¿no se te ocurre hacerlo de otro modo? [Oros 20" de silencio] ¿Qué piensas? A ver, ¿qué estabas pensando?

Man.- No, así no. [Instantes de silencio]. Se podía hacer la raíz cuadrada.

I.- La raíz cuadrada.

Man.- Sí. No sé, es que no sé.

I.- Bueno, pues ya está. Si quieres... ¿no se te ocurre de otro modo?

Man.- [Asiente con una negación].

I.- Bueno, pues pasamos si quieres a la siguiente.

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

I.- *Me he traído una calculadora y la puedes utilizar para resolver esa multiplicación.*

Man.- [Introduce las cifras del multiplicando en la pantalla].

I.- *¿Qué pasa?*

Man.- *Que falta una.*

I.- *¿Cómo?*

Man.- *Que no se puede poner otro 9.*

I.- *Que le falta una, que no cabe.*

Man.- *Sí.* [Permanece en silencio durante unos instantes]. *¿Y es siempre con la calculadora?*

I.- *Si quieres, sí.*

Man.- *¿Y si no tampoco pasa nada?*

I.- *Y si no, tú lo haces como quieras. Te puedes ayudar de la calculadora para hacer la multiplicación.*

Man.- [Desiste en usar la calculadora y emplea de forma Técnica el algoritmo estándar escrito del producto. Transcurren aprox. 1' 30" en silencio. Se equivoca al sumar durante la aplicación del procedimiento].

I.- *Vale. Entonces la calculadora no... ¿no se te ocurre hacerlo con calculadora?* [De nuevo el alumno permanece en silencio durante unos 40" más]. *¿En qué estás pensando?*

Man.- *Claro que se puede.*

I.- *¿Cómo?*

Man.- *Más 4 por 9, así. No, porque puedes llevar...*

I.- *¿Cómo, cómo?*

Man.- *Pues, que pones 4 por 9, el resultado, así. Y después.... Pones 4 por 9 y lo que te llevabas, así lo vas sumando.*

I.- *Por ejemplo, 4 por 9 y después, ¿qué es lo que harías?*

Man.- *Espérate...* [Coge de nuevo la calculadora para ir realizando los cálculos descritos]. *Puedes hacer 4 por 9, 36, te llevas 3. Después 4 por 9 otra vez y después más 3 que te llevas, así.*

I.- *Bueno, pasamos a la siguiente.*

Se observa de lo realizado y del diálogo establecido que el alumno no manifiesta indicio alguno de empleo Formal del algoritmo. Por el contrario, lo aplica de un modo Técnico aunque incorrectamente.

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Ningún diálogo destacable. El alumno tan sólo identifica dos de los tres errores incluidos en la tarea. Observamos que no detecta el error de colocación de cifras en la segunda multiplicación.

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

Man.- *¿Eso qué es, algoritmo?*

I.- *El algoritmo es el método que tú utilizas siempre para multiplicar. El método de siempre, de toda la vida.*

Man.- *¿La hago así?*

I.- *Tú la haces como quieras. [Una vez obtenido el resultado]. ¿Aquí cómo has multiplicado?*

Man.- *Lo he puesto al revés éste.*

I.- *¿Cómo al revés?*

Man.- *Pues 251 por 6 y se hace.*

I.- *¿Y lo podías haber hecho sin ponerlo al revés?*

Man.- *[Realiza los mismos pasos que la vez anterior sobre la multiplicación]. No sale lo mismo.*

I.- *No sale lo mismo.*

Man.- *No, sí, sí, sí, sí, sí, sale lo mismo. Sí, sí.*

I.- *Aún así, ¿sabrías hacerlo aquí al lado?*

Man.- *¿Así como...? [En referencia a la misma disposición de los factores].*

I.- *Sí, venga. [Una vez obtenido el mismo resultado] A ver, ¿ahora cómo has multiplicado?*

Man.- *1 por 6, 5 por 6 y 2 por 6.*

I.- *Y 2 por 6.*

En ningún momento el alumno utiliza el algoritmo estándar escrito como tal, con cada uno de sus pasos específicos, para resolver la multiplicación. Emplea, en cambio, la variante distinta constituida por los pasos del algoritmo estándar escrito en la disposición usual de 251 por 6. Es decir, que en realidad el alumno resuelve 251 por 6 mediante el algoritmo estándar escrito del producto.

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

I.- *[Una vez que el alumno ha leído el enunciado]. ¿Entiendes la cuestión?*

Man.- *Sí.*

I.- *Se trata de decir cuántas cifras hay aquí, éste es el multiplicador, y cuántas cifras tiene el multiplicando.*

Man.- *[Permanece en silencio unos 15'']. El multiplicando tiene cuatro.*

I.- *El multiplicando.*

Man.- *Creo.*

I.- *¿El de arriba me dices?*

Man.- *Sí, sí.*

I.- *¿Por qué?*

Man.- *Pues cuatro y aquí dos las últimas.*

I.- *Dos las últimas. ¿Y el multiplicador?*

Man.- *Tres.*

I.- *¿Por qué?*

Man.- *Por esto, porque esto es por cada cifra que tú multiplicas [refiriéndose a las filas correspondientes a los productos parciales].*

I.- *Por esto... ¿cómo así?*

Man.- *La otra hoja, la otra hoja que he hecho. ¿No he hecho estos dos? Pues los dos que hay. [Se apoya en los dos productos parciales de la multiplicación de la situación 3].*

I.- *O sea, porque hay tres filas. ¿O por qué?*

Man.- *Sí, porque hay tres filas.*

I.- *Y en el multiplicando me has dicho que hay 4.*

Man.- *Sí.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

Ningún diálogo destacable. El alumno identifica las cifras de los huecos a través de la información proporcionada por las cifras conocidas y mediante el establecimiento de relaciones entre partes distintas de la secuencia algorítmica.

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

I.- [Tras completar el alumno la primera M CCD]. *¿Ya has terminado? ¿Cómo ha sido?*

Man.- *5 por 6, 30, me llevo 3. 5 por 4, 20 y 3, 23. Y aquí 4 por 6, 24, me llevo 2... imposible.*

I.- [Transcurre un 1' en silencio]. *¿Qué problema tienes?*

Man.- *Aquí.*

I.- *En el 24.* [Fila del 2º resultado parcial].

Man.- *Sí.* [Tras otros 25'' aprox. en silencio]. *Aquí tiene que ser 6 [unidades del multiplicando].*

I.- *¿Por qué?*

Man.- [De nuevo permanece en silencio unos 20'']. *Porque multiplicado con 4 otro número no te da de unidades 4.*

I.- *Entiendo.* [Tras otros 20'' en silencio]. *¿Y ahora qué estás pensando?*

Man.- *Un número que.... No.*

I.- *Bueno, pasa a la siguiente si quieres.* [El alumno completa la segunda M CCD en silencio durante aprox. un 1']].

En el proceso de resolución de la primera M CCD el alumno muestra una cierta dependencia en el orden establecido de la secuencia algorítmica. Esta circunstancia le impide detectar la fuente de un error que sí es reconocido cuando afirma tener un problema con las cifras 2 y 4 en el segundo resultado parcial.

En la segunda M CCD se llega a observar, en cambio, un mayor grado de flexibilidad. Por ejemplo, el alumno determina las 4 decenas del primer resultado parcial como paso previo necesario para localizar las 3 decenas del multiplicando. Por otro lado, el alumno no tiene reparo alguno en considerar 0 decenas para el multiplicador, con tal de que encajen las cifras.

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

I.- *Se trata de ir contestando a estas cuestiones. Por ejemplo, la primera: ¿qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse?*

Man.- *Porque sobran de un lado y tienes.... 6 por 3 son 18, pues el 1 ese sobra y hay que llevarlo.*

I.- *Y hay que llevarlo. Sobra.*

Man.- *Sí, sobra y hay que llevárselo a la otra.*

I.- *¿A la otra dónde?*

Man.- *A la... por ejemplo, 3 por 6, 18. Ese 1 sobra y se lleva 3 por 4, 12, pues se le suma esa. Creo.*

I.- *¿Y por qué dices que se suma ese?*

Man.- [Instantes en silencio]. *Porque si sobra ahí pues se suma al otro.* [Indicio no-Formal].

I.- *Bueno, ¿y por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Es decir, ¿por qué hay que multiplicar 3 por 6, 3 por 4, 3 por 1 y después hacer lo mismo con la otra cifra?* [Tras 15'' en silencio] *¿Entiendes la pregunta, no?*

Man.- *Sí, sí.*

I.- *¿Por qué crees que es eso?*

Man.- [Transcurridos otros 20'' en silencio]. *Porque es una forma más sencilla de multiplicar porque si lo ponemos... yo que sé, es que no sé eso, es que no lo sé.*

I.- *¿Si lo ponemos cómo?*

Man.- *Porque si empezamos a multiplicar, si éste 3 por 1, así, hay que utilizar por aquí para llevarse porque si no entonces, si empiezas por aquí, por este lado, entonces no se puede. Porque después empiezas 3 por 1, 3 por 4, 12 y no se puede hacer. No se podría.* [Indicio no-Formal].

I.- *No se podría.*

Man.- *No.*

I.- *¿Y por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? El de multiplicar por 3 se pone aquí [primera fila] y después se pone otra fila con otro resultado parcial y otra... ¿Eso por qué? ¿Por qué se van colocando así?*

Man.- *Para después sumarlos.*

I.- *Para después sumarlos.*

Man.- *Sí.*

I.- *¿Esa es la razón de colocarlos en filas?*

Man.- [Tras permanecer unos 15'' en silencio]. *Así. No lo sé.*

I.- *¿Cómo?*

Man.- *Que será así. No sé.* [Indicio no-Formal].

I.- *Bueno, ¿y lo del hueco? ¿Por qué se deja un hueco ahí?*

Man.- [Permanece en silencio durante 25'' aprox.]. *¡Ah!, porque las unidades empiezan por aquí, después las decenas tienen que empezar por las decenas, digo yo.* [Leve indicio de uso Formal en cuanto al sistema de numeración posicional].

I.- *Las decenas tienen que empezar por las decenas.*

Man.- *Más o menos.*

I.- *¿Cómo? A ver.*

Man.- *Como este 2 es la decena, ¿no?,...*

I.- *El 2 es decena.*

Man.- *Sí. Pues tiene que empezar por éste, por las decenas de éste, digo yo. No sé.*

I.- *Es decir, me estás diciendo que hay que empezar por el 2, por la columna del 2. ¿O cómo?*

Man.- *Sí, hay que empezar por ahí.*

I.- *¿Y por eso se deja un hueco ahí o por qué?*

Man.- *Será por eso. Es que yo sólo sé que hay que dejarse un hueco.*

I.- *Oye, ¿y al final por qué se tienen que sumar las cifras en columnas para llegar al resultado?*

Man.- *Porque has multiplicado el 3 por la otra cifra y el 2 y entonces, como es 23, pues tendrías que sumarlo todo. Lo que has multiplicado por el 3 y lo que has*

multiplicado por el 2, para sumarlo todo. [Indicio de uso Formal; se reconoce la propiedad distributiva aunque no el sistema de numeración posicional].

I.- *¿El 3 cuál sería?*

Man.- *El de arriba y el 2 el de abajo.*

I.- *Y el 2 el de abajo. ¿Conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar, es decir, que justifique por qué se multiplica de la forma en la que hacemos?*

Man.- *No entiendo eso.*

I.- *Sí, ¿que si conoces alguna propiedad matemática que justifique por qué se multiplica de esta manera: por qué hay que llevarse, por qué hay que dejar el hueco,...? En fin, todo eso que hemos estado hablando antes.*

Man.- *Sí, la propiedad conmutativa, que da igual umm.... Creo que era esa. No, la distributiva. No sé.*

I.- *Bueno, intenta describirlas aunque no te acuerdes del nombre.*

Man.- *Porque da igual multiplicar 23 por 146 que 146 por 23.*

I.- *Esa es la propiedad conmutativa.*

Man.- *Sí.*

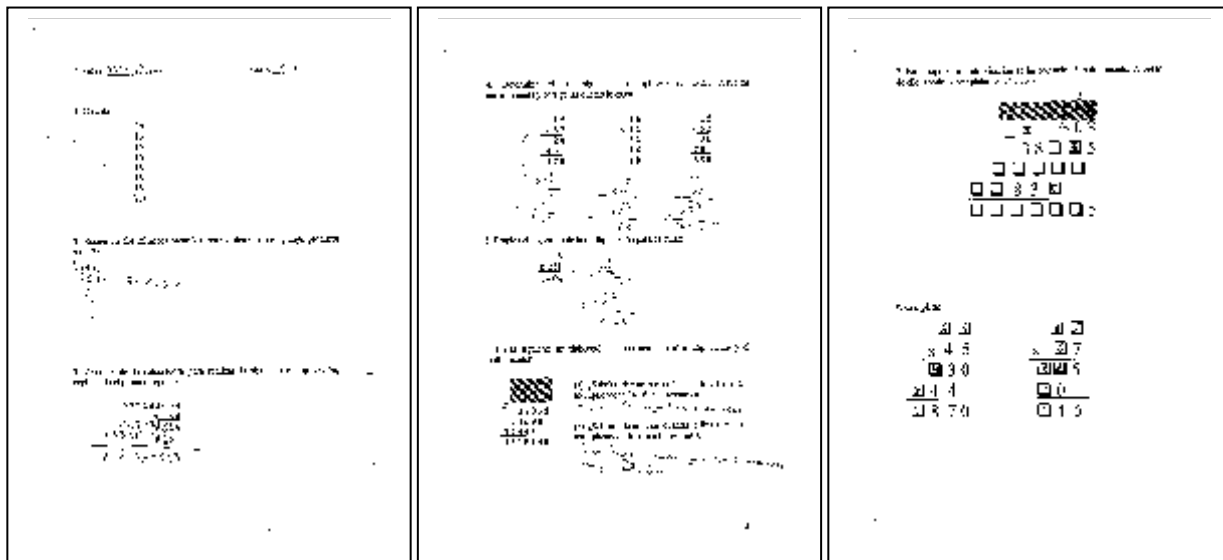
I.- *¿Y la distributiva? ¿Cuál era la distributiva, te acuerdas? ¿O qué otras propiedades conoces?*

Man.- [Instantes en silencio]. *No me acuerdo.*

I.- *Bueno, pues ya está. Hemos terminado.*

Respuesta de tipo 9b

María Dolores (3º ESO) [05/05/2003]



Situación 1

Investigador.- *Has terminado ésta. ¿Cómo la has hecho?*

María Dolores.- *¡Sumando!*

I.- *Sumando, ¿qué?*

Mª. D.- *¡Los números! Aunque en realidad pone nada más que...*

I.- *A ver, ¿qué has hecho: 6 más 6 más 6 más 6...?*

M^a. D.- ¡No!

I.- ¿Entonces?

M^a. D.- He sumado desde 16 en 16, así. [Agrupa parejas de 16]. He usado: 16, 32; 32 más 32 más 16.

I.- ¿Y lo podías haber hecho de otra manera?

M^a. D.- Claro, sumando 6 más 6... o multiplicando 16 por tantas veces.

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

M^a. D.- O sea, que encuentre un número que multiplicado por otro te dé 177.

I.- Sí.

M^a. D.- [Permanece en silencio durante 55'' aprox. descomponiendo 177 en factores primos]. 3 por 59.

I.- 3 por 59.

M^a. D.- Sí, ¿no? Otro número, ¿no?, diferente.

I.- Oye, y...

M^a. D.- ¿Y por qué lo he hecho así?

I.- No, te iba a preguntar que si lo podías haber hecho de otro modo o se te ocurre otra manera de hacerlo.

M^a. D.- Puede que haya otro modo.

I.- Porque, ¿tú que has hecho aquí?

M^a. D.- Yo he hecho la descomposición. No sé si estará bien pero yo la he hecho. Entonces, pues he buscado... entonces con los dos números que me aparecen ya, ya busco, ¿no?

I.- Muy bien, ¿pero se te ocurre hacerlo de otro modo? El problema, no la descomposición.

M^a. D.- ¿El problema?

I.- Sí.

M^a. D.- [Instantes de silencio]. Es que me parece que estos son los únicos números, entonces me parece que así da mejor, ¿no?

I.- Bueno, pasamos a la siguiente.

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

M^a. D.- ¿Esto es con calculadora o no?

I.- Sí, mira aquí tengo una calculadora. Se trata de hacer esa multiplicación y te puedes ayudar con la calculadora.

M^a. D.- [Introduce las cifras del multiplicando en la calculadora]. No llegan todos los números, falta uno. ¡Madre mía! ¡Uf! No llega. Tengo que hacerla. [Durante 1' 15'' permanece en silencio utilizando el algoritmo estándar escrito de forma Técnica; obtiene el resultado correcto].

I.- Ya está. Dime una cosa, ¿no has utilizado para nada la calculadora?

M^a. D.- Porque no llegan todos los números, entonces... tendría que hacerlo así.

I.- ¿No has podido hacerla de otro modo?

M^a. D.- No. [Introduce de nuevo las cifras del multiplicando]. Es que no se puede. Falta otro 9, entonces no. ¡Para que salga mal! Hombre, podría haberlo hecho con la calculadora, comiéndome algún número... quitando el 2 primero y después pues hubiera sido más sencillo pero da igual.

I.- A ver, ¿y cómo sería eso que me estás diciendo?

M^a. D.- Tres 9... no. Sería: dos 2, tres 4 y tres 9. Y después el resultado que me dé se lo tendría que multiplicar por... 4, para hacer el primero nada más porque entonces después ya te quedarías con éste. Eso es, sólo faltaría multiplicar el último número, bueno el primero [el 2, cifra de mayor valor relativo].

I.- El primero.

M^a. D.- Claro.

I.- Y con el otro igual.

M^a. D.- Y con el otro igual.

I.- Y después...

M^a. D.- Después ordenándolo bien y ya está.

I.- ¿Ordenándolo, cómo?

M^a. D.- Pues dejándote el hueco éste.

En definitiva, la alumna admite la posibilidad de usar la calculadora para calcular 22444999 por 4 y 22444999 por 6 y al resultado “conectarle” los productos 2 por 4 y 2 por 6 bajo la disposición de cifras tradicional.

Respuesta de tipo 3a y 3b'

Situación 4

No se establece ningún diálogo complementario a la producción escrita de la alumna. La situación es resuelta correctamente y con bastante soltura.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

M^a. D.- Hago esta multiplicación.

I.- Sí, se trata de hacer esa multiplicación.

M^a. D.- De esta forma, ¿no? Sin alterar el orden.

I.- Tú la haces como quieras.

M^a. D.- Pues vale. [Resuelve el producto al instante]. Ya está

I.- ¿Cómo has hecho?

M^a. D.- Pues he hecho 6 por 1, 6; 30...

I.- O sea, que has hecho...

M^a. D.- Pero había que utilizar el algoritmo.

I.- Lo que has hecho ha sido darle la vuelta.

M^a. D.- Inversamente.

I.- Y lo podías haber hecho tal cual.

M^a. D.- También.

I.- ¿Cómo sería? ¿Cómo quedaría?

M^a. D.- [Aplica el algoritmo de forma Técnica con la disposición inicial de factores]. Saldría el mismo resultado nada más que así es más sencillo [en referencia al primer método empleado].

Respuesta de tipo 5b

Situación 6

I.- [En relación a la primera cuestión] ¿Qué has escrito ahí?

M^a. D.- Tiene tres porque hay tres sumandos. Por eso hay tres en el multiplicador.

I.- *El multiplicador es el de abajo.*

M^a. D.- *Claro. ¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicando? ¿El de arriba? Si éste tiene tres.... [Instantes de silencio] O tiene cuatro o tiene cinco.*

I.- *¿Por qué?*

M^a. D.- *Lo más probable es que tenga cinco. ¡No!, a ver... [nuevo instante de silencio] yo creo que tiene cinco.*

I.- *¿Por qué tiene cinco?*

M^a. D.- *Porque coincide que en los tres hay cinco... cinco. Entonces, si el último fuera un número más pequeño, multiplicando con otro saldría diferente. No sé, creo que tiene cinco.*

I.- *¿Y el cuatro por qué lo dijiste?*

M^a. D.- *¿Por qué lo dije? Porque puede ser que multiplicando un número por otro después te salga más de un nueve, para arriba.*

I.- *Entiendo.*

M^a. D.- [Anota por escrito su respuesta a la segunda cuestión]

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

I.- *¿Entiendes la tarea? Hay que completar estos huecos.*

M^a. D.- *Sí, esos huecos y el de arriba también, ¿no?*

I.- *No, el de arriba no es necesario. El de arriba se ha ocultado simplemente.*

M^a. D.- *¿Y si lo quiero poner?*

I.- *Bueno, si lo quieres poner, lo pones.*

M^a. D.- [Permanece en silencio durante 1' 35'' aprox. intentando completar las cifras de los huecos mediante la determinación de las cifras del multiplicando]

I.- *A ver, ¿qué estás intentando?*

M^a. D.- *Buscar un número que después me coincida con éste, después no...*

I.- *¿Con cuál?*

M^a. D.- *Con estos números que hay aquí. Que me coincida... es que si no... está mal. [Continúa sus intentos en silencio durante 50'' aprox.].*

I.- *¿Qué problema tienes?*

M^a. D.- *Si multiplicamos 3 por 5 sería aquí [unidades del 1^{er} resultado parcial]. Pero si después lo multiplicamos aquí [centenas del multiplicador por unidades del multiplicando], 3 por 5 sería aquí [unidades del 3^{er} resultado parcial]. Y 3 por 1, porque si multiplicamos por 0 sería 0 [supone que son 0 las decenas del multiplicando], entonces si nos llevamos 1 no coincidiría. Entonces es como si no se pudiese hallar. ¡Pero cómo no se va a poder hallar!*

3 por 1, 3, ¿no?... y no puede sobrepasar de 3. Éste no se puede hacer, me parece a mí.

I.- *¿No se puede hacer? ¿No se pueden completar estos cuadritos?*

M^a. D.- *Me parece a mí que no. Porque 3 por 5, 15, ¿no? Entonces me llevo un 5 podría ser cualquier otro número que al final en la última cifra me diera 5. Pero 3 por 1, 3, porque si fuera un 0 no puede ser y por 2 menos, y me llevo 1... y de cualquier otra forma me llevaría otro [no logra encajar las cifras del multiplicando con las del 3^{er} resultado parcial]. Eso como que no. O no sea que... ¿lo dejo?*

I.- *Sí, como quieras. Pasamos si quieres a la siguiente.*

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

I.- [Una vez resulta con éxito la primera M CCD y antes de pasar a la segunda] *¿Cómo lo has hecho? ¿Ese 6 [unidades del multiplicando] cómo lo has obtenido?*

M^a. D.- *Como 5 siempre va o 5 o 0, ¿no?, al final, pues 30, me llevo 3, 4. Y como tiene que sumar 8, 4 más 4, 8. Y como de aquí no se lleva nada pues es más fácil.*

[Continúa con la segunda M CCD]

I.- [Después de 1' 50'' aprox. de intento en silencio] *¿Qué número es éste?*

M^a. D.- *Un 3 [decenas del multiplicando].*

I.- *¿Y esto de abajo?*

M^a. D.- *Un 2, un 1, [centenas y decenas del 1^{er} resultado parcial] y un 5... [Nuevo instante de silencio] Puede ser cualquier número. Tiene que ser un 0... un 6 mismo. No, no puede ser un 6... o sí. Ya está, el último puede cambiar, siempre y cuando esto te dé 0 [unidades del 2^o resultado parcial], luego puedes complementar, ¿no?*

I.- *¿Cómo?*

M^a. D.- *Que el último, siempre y cuando la última cifra tuviera un 0, lo demás puede variar.*

I.- *¿Y por eso has puesto el 6, el 6 por 5?*

M^a. D.- *Claro.*

Sucede que la primera M CCD es completada con éxito mientras que la segunda, no. Las cifras 2 y 1 se deben a que la alumna tiene en cuenta la ecuación $4 = 0 + X$ aunque no pone 24, como debiera ser. De otro modo, no se entiende que eligiera el 3 para 7×3 (terminada la prueba y fuera de grabación la propia alumna reconoció que puso 7 por 3 porque debía ser 24).

En cambio, cometió un fallo en el segundo resultado parcial: se olvidó del 6 por 3 para multiplicar tan sólo 6 por 5.

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

M^a. D.- *¿Qué sentido tienen las llevadas y por qué hay que llevarse?*

I.- *¿Por qué hay que llevarse cuando se multiplica?*

M^a. D.- *¿Por qué hay que llevarse cuando se multiplica?*

I.- *Sí.*

M^a. D.- *Porque se sobrepasa y se lleva a otra cantidad diferente, a otra cantidad mayor.*

I.- *¿Se sobrepasa, qué?*

M^a. D.- *Umm, en cuanto empieza a pasarse del 9, ¿no?, o sea cuando llega ya al 10, ese ya está cambiando de... de unidad. ¿Eso lo tengo que escribir? [Indicio de uso Formal].*

I.- *No.*

M^a. D.- [Leyendo la segunda cuestión en voz alta] *¿Por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Porque aunque sean diferentes o sean parecidas, después cada uno tiene su espacio y... son tantas cantidades que se van a multiplicar como sí.... Puede haber aquí un 5 y se multiplica por éste, a lo mejor te sale lo mismo pero como cada una tiene su hueco y su espacio sería una cantidad diferente. [Uso de las propiedades del sistema de numeración decimal].*

I.- Ya, pero el 3, por ejemplo, se multiplica por el 6, por el 4 y por el 1. Y el 2, por el 6, por el 4 y por el 1. ¿Eso por qué? ¿Por qué el 2 se tiene que multiplicar por todos?

M^a. D.- ¡Porque siempre es así! ¡Eso ya...! [Sonríe]

I.- Porque siempre es así.

M^a. D.- Bueno no, pero eso es como si se multiplicase 3 solo y después 20. Entonces sumárselo... sería la misma cantidad.

I.- A ver...

M^a. D.- Es como si se multiplicase el 3 por 146 y 20 por 146, sería lo mismo. [Indicador de uso Formal].

I.- Ya, entiendo.

M^a. D.- Daría el mismo resultado porque... ésta [las 3 unidades del multiplicador] ocupa un sitio y ésta [las 2 decenas del multiplicador] ocupa otro diferente. No es lo mismo tener 23 que tener 32.

I.- ¿Y el resultado de 3 por 146 dónde se coloca?

M^a. D.- En el primero porque como es el primero que se va a multiplicar... en el primero. Y el segundo pues en el segundo y luego sumar.

A ver, ¿por qué se van situando...? ¿Esto ya te lo he explicado o no?

I.- Bueno eso es lo que estábamos hablando.

M^a. D.- Más o menos. ¿Por qué se sitúan los...? Esto porque cada uno es diferente, porque no es lo mismo. Entonces, se tienen que ir situando por orden y con sus espacios respectivos.

I.- Yo me refiero al hueco éste.

M^a. D.- ¡Ah!, ¿por qué se ha dejado un hueco en la fila correspondiente al segundo resultado parcial? Porque esto es como si fuera un 20, nada más que se deja el hueco para que no multipliques 2, porque si multiplicas 2 no es lo mismo que multiplicar por 20. [Indicador de uso Formal].

I.- ¿Y el hueco, entonces?

M^a. D.- Pues para eso. Haces como si fuera un 0. Es igual que si multiplicases 20 por 146, por eso está el hueco. Porque si tú multiplicas 2 y los colocas... si tú multiplicases 2 nada más y lo colocas justo debajo, como hay una cuenta anterior, pues el resultado no es lo mismo. Y es que lo que se está haciendo es 23, no por 2.

I.- Entiendo.

M^a. D.- ¿Al final por qué se deben sumar las cifras en columnas para llegar al resultado? Porque se debe seguir un orden, si no el resultado varía y no está bien.

I.- Pero, ¿por qué se suma? Porque se podía seguir multiplicando o restando...

M^a. D.- Porque ya hemos obtenido el resultado de multiplicarlo, entonces se suma para saber el resultado final, ¿no? ¡Más o menos! [Risas].

¿Conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar?

I.- En este método para multiplicar, se utilizan propiedades. ¿Tú conoces alguna?

M^a. D.- ¿Propiedades de qué tipo?

I.- Propiedades aritméticas, matemáticas, que justifican todo eso que tú me has dicho.

M^a. D.- ¿Todo lo que yo te he dicho?

I.- Sí.

M^a. D.- A lo de sumar, lo de llevarse,...

I.- Todo eso.

M^a. D.- Todo eso. [Instantes de silencio] El orden que se establece, eso ya... ya es una propiedad. El orden establecido porque están las decenas, las centenas y todo así, ¿no?... las unidades. Y nada más que la posición que ocupe cada número eso va a

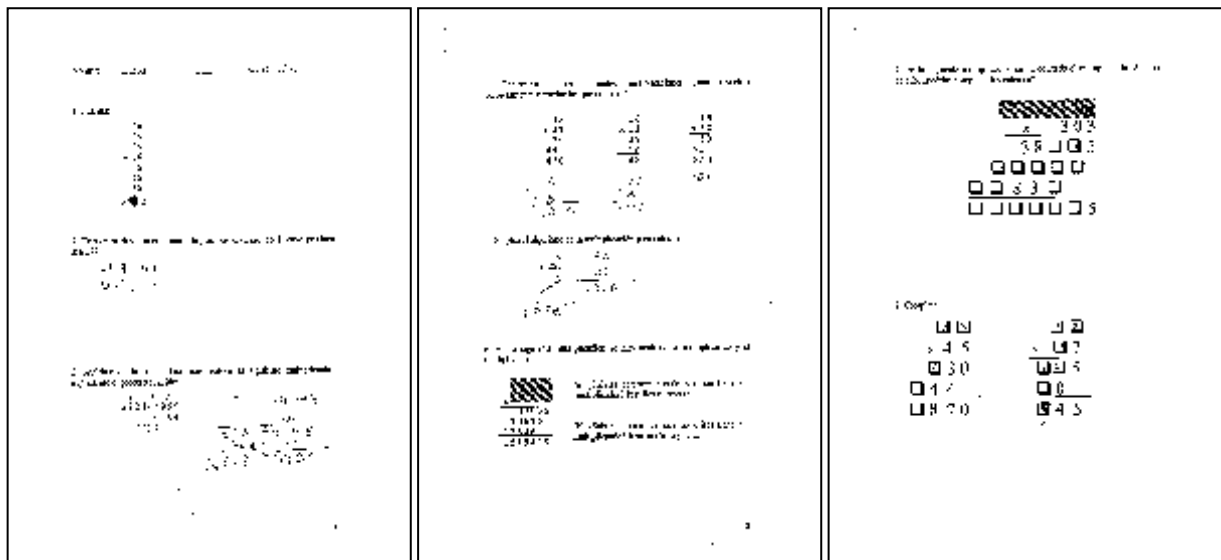
hacer que cambie el resultado o que sea diferente [propiedad del sistema de numeración decimal].

Y sumar pues... sumar. Como se suma, normal. [Se ríe] ¡Es que esto no tiene explicación! ¡Esto es así y ya está! Son matemáticas y hay que aprenderlas.

I.- Muy bien, ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9c

Clara (3° ESO) [06/05/2003]



Situación 1

Clara.- ¿Que calcule todo esto?

Investigador.- Sí.

Cla.- ¿De cabeza o...?

I.- Como quieras.

Cla.- Pues, 16.... [Tras 15'' en silencio] ¡Madre mía, ahora para calcular todo esto! 12.... [Otros 15'' aprox. de silencio] No sé si está bien, ¿eh?

I.- 41. ¿Y cómo lo has hecho?

Cla.- Pues contando 16 más 16 más 16. También podía haberlo hecho 16 por todos los números que hay aquí. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete: 16 por 7 también, ¿no?

I.- Lo podías haber hecho así.

Cla.- Sí, yo creo que sí. 16 por... 7 por 6 son... 42, no, sí. ¿7 por 6 son 42? ¡No me acuerdo! [Se ríe]

I.- No lo sé, tú sabrás.

Cla.- ¡Ay, no! Me he equivocado, me he equivocado. Esto no es, esto no es [el resultado inicial de 41]. A ver, 6, 12, 12 más 6, 18,..., 41 y 42 [suma de las 6 unidades]. Me llevo 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11 [suma de las decenas]. Son 112.

I.- Y lo has hecho sumando.

Cla.- Claro.

I.- Y decías que lo podías haber hecho...

Cla.- De la otra manera pero no.

I.- ¿Pero?

Cla.- No, no se puede. Bueno sí, pero que es mucho lío. Yo prefiero hacerlo sumando.

I.- Bueno, la segunda.

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

Cla.- ¡¿Esto cómo es?!

I.- ¿Lo entiendes?

Cla.- No.

I.- Tienes que encontrar dos números naturales, o sea, dos números sin decimales,...

Cla.- Sí.

I.- ... y que ninguno de ellos sea 1...

Cla.- Sí.

I.- ...cuyo producto sea 177.

Cla.- ¿Qué al sumarlo te dé 177?

I.- No, cuyo producto... que al multiplicarlos dé 177.

Cla.- ¡Ah!, pues... ¡yo qué sé! [Instantes de silencio]. No sé.

I.- ¿Qué se te ocurre hacer?

Cla.- ¡Multiplicar números pero es que para encontrar todo eso!

I.- Bueno, inténtalo.

Cla.- Pero tienen que ser números grandes para que te dé eso. El 7 por.... No, yo no encuentro ningún número.

I.- Puedes escribir aquí, ¿eh? Tienes espacio para hacer todas las cuentas que quieras.

Cla.- ¿177? ¿Pero esto es multiplicar? ¿Multiplicados, no pueden ser ni sumados ni nada?

I.- No, dos números cuyo producto sea 177.

Cla.- ¿Pero que puedes sumarlos?

I.- No, cuyo producto es cuya multiplicación sea 177. Dos números que al multiplicarlos dé...

Cla.- 177.

I.- Eso es.

Cla.- [Transcurridos unos 20'' en silencio]. 21, no va a dar. Porque 21 por 7: 7 por 1, 7 y 7 por 2, 14. No. [Tras otros 15'' en silencio]. ¡No sé!

I.- ¿Aquí qué has hecho, 21 por 7?

Cla.- Sí.

I.- ¿Y eso para qué?

Cla.- Pues para ver si me da el producto, que me dé 177. Pero me da 147. No sé, no tengo el número. [Intenta el producto de 22 por 7; transcurren unos 20'' en silencio]. No me da, éste no vale tampoco. ¡Yo qué sé! No sé. No sé qué número va a salir pero no... ese no da. No sé. ¡Ayúdame tú!

I.- No puedo. ¡Cómo te voy a ayudar! Lo tienes que hacer tú.

Cla.- No sé. [Instantes de silencio] Es que no...

I.- Bueno, si quieres pasamos a otra.

Cla.- Sí, porque...

I.- No se te ocurre nada, ¿no?

Cla.- No.

I.- Has intentado 22 por 7.

Cla.- Pero no me da porque 7 por 2 son 14... y no me da. ¡A mí es que no me da!
[Risas].

I.- Bueno, pues pasamos a la siguiente.

Se puede considerar que existen indicios de uso Técnico del algoritmo. Por tanto:

Respuesta de tipo 2b

Situación 3

I.- Mira, hay aquí una calculadora...

Cla.- ¡Ay sí, eso es lo que me hacía falta a mí!

I.-...y se trata de hacer esa multiplicación ayudándote de la calculadora. Puedes utilizar la calculadora para hacerla.

Cla.- Vale. 4, 6,... esto son 6. 8... y esto son 12. 18, 19,..., 27. 6 más 12 más 27, da 45. Por 64... 2880.

I.- Ese es el resultado.

Cla.- Sí. Yo creo que sí.

I.- ¿Cómo lo has hecho?

Cla.- Sumando. En vez de poner todos estos números en la calculadora, pues sumas los.... Como son muy simples, los sumas y el resultado que te dé de todos.... Por ejemplo, el 2 más 2 más 2, son 6, ¿no?, y lo que te dé pues lo sumas con el del 4 y con el del 9 y no tienes que poner tanto número ahí en la calculadora. Y luego lo multiplicas por 64.

I.- Y eso se puede hacer.

Cla.- Sí. Sí, yo creo que sí. En vez de estar 4 por 9 y 4... así, pues lo sumas todo. Porque son números muy simples. A lo mejor no te da el mismo resultado si lo haces multiplicando uno por uno.

I.- Que a lo mejor no te da el mismo resultado.

Cla.- Yo creo que sí. No lo sé. ¿Lo hago a ver si me da el mismo resultado o...?

I.- Como quieras.

Cla.- A ver, pues entonces lo voy a copiar aquí. [Una vez copiado]. A ver, 4 por 9... ¡si se me habrán olvidado las tablas de multiplicar y todo! [Transcurren 1' 35'' aprox. donde la alumna aplica el algoritmo estándar escrito de un modo técnico, aunque incorrectamente, acompañando cada uno de los pasos dados con descripciones entre dientes]. No es 6 por 4, 24. ¡Madre mía, qué "follón"! ¡Se me están olvidando hasta las tablas de multiplicar! O sí, vamos a ver... sí es. ¿Y por dónde iba? ¿Por qué número iba?

I.- No sé.

Cla.- ¿No se ha dado cuenta? [Transcurren otros 30'' en silencio] ¡Madre mía, para sumar todo esto! ¿Esto no van a caber todos los números ahí, verdad, en la calculadora?

I.- No sé.

Cla.- [Continúa con la suma durante aproximadamente 1' hasta obtener un nuevo resultado]. Pues no me da el mismo resultado. Eso es lo que me da.

I.- ¿Y entonces?

Cla.- Pues, porque no da lo mismo. Porque si tú sumas dos números y luego los sumas con... es que no sé explicarme. Que no te da el mismo resultado, que tienes que hacer la multiplicación.

I.- Vale.

Cla.- *No me vayas a poner más de éstos así que es que no. ¿No serán de fracciones las demás ni nada de eso?*

I.- *No, no.*

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

En el registro escrito se observa que la alumna resuelve correctamente esta situación. No llega a establecerse ningún diálogo relevante.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

Cla.- *Emplea el algoritmo... ¿qué es eso?*

I.- [Señalando la situación 4] *Este método de cálculo, el procedimiento para multiplicar.*

Cla.- *¿Qué cómo se pone? ¿Que como...?*

I.- *No, que lo utilices...*

Cla.- *Sí.*

I.- *...para calcular esto. Tú tienes aquí una multiplicación.*

Cla.- *Sí.*

I.- *Bueno, pues hazla con el método que conoces para multiplicar.*

Cla.- *¿No le puedo dar ni la vuelta a los números ni nada?*

I.- *Tú lo haces como quieras.*

Cla.- *Pues entonces... ¿la tengo que hacer?*

I.- *Sí claro. [La alumna emplea el algoritmo para calcular 251 por 6, demorando unos 15'']. ¿Y lo podías haber hecho sin darle la vuelta a los números?*

Cla.- *Sí y no te da el mismo resultado, creo yo. Voy a probar. [Aplica el algoritmo de forma técnica para resolver 6 por 251]. 5 por 6, 30... y 2 por 6, 12. Haciéndolo así. ¿Eso está bien? Da lo mismo. [El empleo técnico del algoritmo no se ve condicionado por la disposición de los factores].*

Respuesta de tipo 5b

Situación 6

Cla.- [Leyendo] *En la siguiente multiplicación se han ocultado el multiplicando y el multiplicador.... [Instantes de silencio]. La primera... a ver, ¿pues según los números que hay aquí? [Cuenta las cifras de los resultados parciales] Dos, cuatro y cinco.*

I.- *El multiplicador es el de abajo.*

Cla.- *Sí.*

I.- *Y el multiplicando el de arriba.*

Cla.- *El de abajo... el de arriba tiene cinco cifras.*

I.- *Cinco cifras.*

Cla.- *Sí.*

I.- *¿Por qué?*

Cla.- *Porque todas tienen cinco cifras y vas multiplicando número por número. Y te da, yo creo que te da siempre el mismo... la misma cantidad de números que hay en el de arriba. Vamos digo yo.*

I.- *Dices tú.*

Cla.- *Pues no. No es así. [Permanece en silencio un instante]. No lo sé, yo creo que hay cinco.*

I.- *Entiendo. ¿Y el de abajo?*

Cla.- *En el de abajo, umm... [instante de silencio] una. No, dos. Dos cifras.*

I.- *Dos cifras.*

Cla.- *Sí.*

I.- *¿Por qué?*

Cla.- *¡No, tres! Tres, porque hay tres... eso no sé como se dice. Tres apartados de números, tres...*

I.- *Tres filas.*

Cla.- *Tres filas, eso.*

I.- *Bueno, entonces el de abajo tres y el de arriba cinco.*

Cla.- *Sí.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

Cla.- *¿Qué es esto?! [Permanece en silencio leyendo el enunciado].*

I.- *¿Lo entiendes?*

Cla.- *Sí.*

I.- *Se trata de encontrar las cifras que hay en estos huecos.*

Cla.- *Sí. Pero para eso tienes que poner un número aquí [multiplicando] que te vaya dando el mismo resultado de esto. [Instante de silencio] ¿Pero tengo que poner el número de aquí o no? [en referencia al multiplicando].*

I.- *Tú lo haces como quieras. El multiplicando está oculto...*

Cla.- *Sí.*

I.- *...pero a pesar de ello, ¿sabrías completar los huecos que faltan?*

Cla.- *No. Yo no, porque si te faltan los números.... Bueno sí, pero a lo mejor si yo hago esto, esta fila y ésta [primera y segunda], ésta [tercera] no me va a dar. Aquí yo creo que hay un 5 [unidades del multiplicando]. ¿Se puede poner aquí el número?*

I.- *Sí, puedes escribir todo lo que quieras.*

Cla.- [Pasado un 1' aprox. de reflexión en silencio]. *No sé. Porque no me coinciden los números. A lo mejor, si es que es eso, porque a lo mejor yo pongo aquí un número y me vale para estas dos filas y para ésta no. [Nuevo instante de silencio]. No lo sé.*

I.- *No puedes completar los huecos.*

Cla.- *Puedo completarlos pero lo que pasa es que no... luego, en ésta, no me va a dar. Luego no me va a dar el resultado.*

I.- *Entiendo lo que dices. Bueno, pues intenta la siguiente si quieres.*

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

Cla.- [Tras intentar la primera MCCD en silencio durante 55'' aprox.] *No me da.*

I.- *No te da.*

Cla.- *No.*

I.- *¿Por qué no te da?*

Cla.- *Porque yo he puesto los números que valen para ésta, para esta fila...*

I.- *Para la primera [primer resultado parcial].*

Cla.- *Sí y luego cuando voy a multiplicar la de aquí abajo no me da porque pongo: 4 por 6, 24, me llevo 2; 4 por 2, 8, 9 y 10 y aquí pone un 4. No puedo.*

I.- ¿Y este 6 [unidades del multiplicando] por qué lo has puesto?

Cla.- Porque son 5 por 6, 30 y me llevo 3. Y luego si multiplico 5 por 2, 10 y 3, 13. Me da la cifra de arriba. Pero ya no puedo completarlo más porque es que no me da la de aquí abajo. [Dependencia en el orden algorítmico. Seguidamente afronta la resolución de la segunda M CCD].

I.- [Transcurrido 1' 25'' en silencio]. ¿Y esa cómo la has hecho? Explícame.

Cla.- Ésta, tengo que ir buscando los números para que cuando se multipliquen me dé el resultado. Vamos a ver, yo he cogido el 5 porque 7 por 5 son 35 y aquí el 5 ya está puesto. Y me he llevado 3. Y luego he tenido que mirar un número que cuando lo haya multiplicado, el resultado me tendría que dar 4 porque luego al sumarlo, como hay un 0, es 4. [Muestra de uso Analítico; establece relaciones no-usuales].

I.- Entiendo.

Cla.- Y eso.

I.- ¿Por eso pones el 3 [decenas del multiplicando] ahí, no?

Cla.- Sí, porque 7 por 3, 21, ¿no? Por eso, un 3 o... no sé. [Indicio de empleo Analítico].

I.- A ver, ¿por qué has puesto aquí un 3?

Cla.- Y eso no es 6, esto es 8. 7 por 3 porque... no lo sé. [Instantes de silencio]. Porque me tendría que... porque son 7 por 3, 21 y de las 3 que me llevaba del 5, son 24. Para que coincidiera con el número de abajo.

I.- Con el 4 de abajo.

Cla.- Claro.

I.- Entiendo.

Cla.- Y el 2 lo he puesto porque son 2 por 5, 10 y aquí hay un 0. Y como me llevaba 1, pues 2 por 3, 6 y 1, 7. Sale aquí 7 y aquí es un 9.

I.- Bueno, ya la última.

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

Cla.- [Leyendo la primera cuestión] ¿Qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse? Porque te sobra una cifra. Porque si son 3 por 6, 18, te llevas 1. Es que no sé cómo explicarme. No sé explicarme.

I.- Te llevas 1.

Cla.- Te tienes que llevar 1.

I.- Te tienes que llevar 1.

Cla.- Sí.

I.- Bueno, ¿y por qué te tienes que llevar 1?

Cla.- No sé. Como a mí me lo han enseñado así pues digo esto. No sé. [Respuesta no-Formal].

I.- ¿Y por qué crees tú que se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?

Cla.- Porque si no, no sería un resultado... no sería correcta la multiplicación. Se supone que cada número que haya... ¿esto qué es, el multiplicando?

I.- El multiplicador, el de abajo es el multiplicador.

Cla.- Esto el multiplicador. Vale, pues se supone que se tiene que ir multiplicando con cada cifra que le corresponde y se tiene que poner en el sitio donde se ha multiplicado... en el sitio donde está el número que la está multiplicando. Aquí está el 3: 3 por 6, 18. Y aquí está el 2: 2 por 6, 12. Pues lo pones debajo del número con el que lo has multiplicado.

I.- O sea, el 2 del multiplicador hace que éste 2 de la segunda fila se coloque...

Cla.- Debajo del... sí.

I.- ¿Eso es lo que quieres decir?

Cla.- Sí. Yo creo que es así. Y es así. A mí me lo han enseñado así y yo creo que si se multiplica así, si se multiplica con el 2, se tendrá que poner en la misma fila del 2. Y si hubiera aquí un 4 pues, cuando se multiplica, en la misma fila del 4 el resultado que le dé. [No-Formal].

I.- En la misma columna.

Cla.- Sí.

I.- ¿Y por qué se van situando los resultados en filas, uno debajo de otro?

Cla.- Pues, porque.... Pues no sé, porque... para no juntarse todos los números. Yo creo que si multiplicas la del 3 pues la pones el 3 en una fila, el 2 en otra fila y así. No sé.

I.- Oye, ¿y lo del hueco? ¿Por qué se deja un hueco en esta fila [la correspondiente al 2º resultado parcial]? ¿Qué significado tiene ese hueco?

Cla.- Eso se supone que es un 0.

I.- Se supone que es un 0.

Cla.- Sí, para que ocupe el sitio del 3. Eso es como si tuviera ahí un 0.

I.- ¿Y por qué eso es un 0?

Cla.- Umm, no lo sé. Porque ya has hecho la primera multiplicación. Cuando haces la segunda, tienes que ponerlo debajo de su columna y no vas a seguir poniéndolo debajo de la columna del 3. Eso sería entonces que estarías multiplicando todavía el 3. Se deja un espacio. No sé explicarme. [No-Formal].

I.- Bueno, ¿por qué se deben sumar las cifras en columnas para llegar al resultado, al final?

Cla.- ¿Que por qué se suman en columnas? Porque es la posición que le ha dado la multiplicación. Si le hubiera dado otra posición la multiplicación a los números, se hubiera sumado de otra manera. [No-Formal].

I.- ¿Y por qué se suma y no se resta o se sigue multiplicando?

Cla.- Porque si lo multiplicas es porque quieres saber cuánto puedes... ¿es que no sé explicarme!

I.- Bueno, inténtalo mujer. Lo estás haciendo muy bien.

Cla.- A ver, si lo multiplicas es porque quieres saber cuánto puedes tener más, cuánto...

I.- Cuántas veces.

Cla.- Eso es. Y si hubiera sido... es que nunca una multiplicación se puede restar porque si lo multiplicas es para saber que tienes que tener más cosas o algo de eso. Es que no...

I.- O sea, que aquí hay que sumar esto.

Cla.- Sí, ahí hay que sumarlo. Restarlo no. Siempre tienes que sumarlo. [Leyendo la última cuestión] ¿Conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar? ¿Eso como es?!

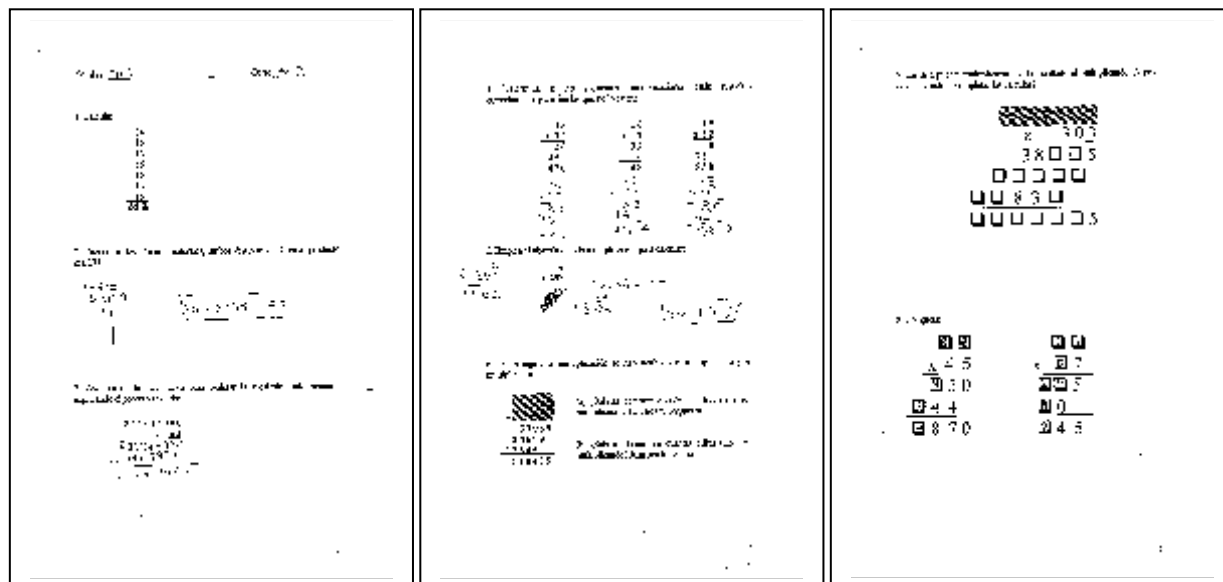
I.- En el procedimiento que tú usas normalmente para multiplicar, ¿conoces alguna propiedad matemática que se utilice ahí y que justifique el método de multiplicar, por qué se multiplica así?

Cla.- ¿Que por qué se multiplica así?

I.- Sí. ¿Hay alguna propiedad que justifique eso?

Cla.- No sé. Lo multiplicas así porque... según los números. No sé. Pues esto se multiplica así porque es así. Es que... no sé. [No-Formal].

I.- Bueno, ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9a**Rosa (3° ESO) [08/05/2003]****Situación 1****Investigador.-** Dime, ¿cómo lo has hecho?**Rosa.-** Sumando.**I.-** ¿Sumando qué?**Ro.-** Pues los números. También se... 16 multiplicarlo por 6, 7, 8.**I.-** 16 por 8.**Ro.-** 8 por... no, sumarlos.**I.-** A ver, ¿en qué quedamos? ¿Cómo lo has hecho?**Ro.-** Sumando.**I.-** Sumando.**Ro.-** Claro, de 6 en 6.**I.-** 6 más 6 más 6...**Ro.-** Claro.**I.-** ¿Y lo podías haber hecho de otro modo?**Ro.-** Claro.**I.-** ¿Cómo?**Ro.-** Pues multiplicar 16 por tantas veces como esté el número. Yo acepto los dos.**I.-** Pues venga, la segunda.

Resuelve la tarea sumando aunque reconoce la posibilidad del obtener el resultado multiplicando. No obstante, como sucede en otros alumnos, el algoritmo no llega a emplearse en primera instancia.

Respuesta de tipo 1b

Situación 2

Ro.- *¿Dos números naturales?*

I.- *Bueno, dos números que no tienen decimales. Que no valen decimales. [Transcurren unos 20'' en silencio]. ¿Entiendes la pregunta, no?*

Ro.- *Vamos a ver... es que no estoy segura si es así.*

I.- [Transcurren 55'' en silencio en los que la alumna descompone 177 en factores primos para obtener el resultado correcto]. *A ver, explícame cómo lo has hecho.*

Ro.- *Descomponiendo el número.*

I.- *Descomponiendo. ¿Y se te hubiese ocurrido hacerlo de otro modo?*

Ro.- *Puede ser pero es que ahora mismo se me ha ocurrido ese [risas].*

I.- *¿Ese nada más?*

Ro.- *Sí, ahora mismo ese. Pero a lo mejor hay otro modo, claro.*

La alumna no emplea el algoritmo estándar escrito de ningún modo, ni tan siquiera lo reconoce como instrumento que posibilita llegar a la solución.

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

Ro.- *¿La calculadora?*

I.- *Aquí la tengo.*

Ro.- *¿Pero la hago con la calculadora o lo hago yo?*

I.- *De lo que se trata es de...*

Ro.- *¿O pone que elija la calculadora...?*

I.- *Efectivamente, tienes que hacer la multiplicación ésta y para eso tienes la calculadora. Te puedes ayudar, puedes utilizarla para lo que quieras.*

Ro.- [Introduce en la pantalla las cifras del multiplicando]. *No se puede.* [De inmediato desiste de la calculadora y comienza a usar el algoritmo de forma Técnica. Permanece en silencio durante aprox. 2' 50'' hasta obtener un resultado que es incorrecto]. *Ya.*

I.- *¿Y para qué has utilizado la calculadora?*

Ro.- *Para nada.*

I.- *Para nada. ¿Se te ocurre otro modo de hacerlo utilizando la calculadora?*

Ro.- [Instantes en silencio]. *¿Utilizando la calculadora?*

I.- *Sí. O piensas que no sirve para nada, que no te puede echar una mano.*

Ro.- *¿La calculadora? Sí.*

I.- *¿Cómo?*

Ro.- *Multiplicando. Sí me puede ayudar. Pero yo es que lo he hecho de la otra manera.*

I.- *¿Y de qué modo te podía haber ayudado?*

Ro.- *Pues para saber el resultado antes. Yo que sé.*

I.- *Sí, pero me refiero al empleo.*

Ro.- *¡Ah!, porque es más rápido.*

I.- *Más rápido.*

Ro.- *Claro.*

I.- *¿Cómo sería más rápido?*

Ro.- *Pues cogiendo la calculadora, si lo haces terminas antes. Es que no entiendo.*

I.- *¿Y por qué no lo has hecho con la calculadora si terminas antes? Tú has hecho la multiplicación manualmente...*

Ro.- Sí.

I.- ...y yo te pregunto si la calculadora te podría haber ayudado en algo.

Ro.- Claro.

I.- ¿En qué? ¿Por qué no has utilizado la calculadora?

Ro.- Porque he marcado los números y me faltaba el 9.

I.- Te faltaba el 9.

Ro.- Sí.

I.- Y por eso has desistido...

Ro.- No, yo qué sé. No sé.

I.- Bueno, pasamos a otra.

Ningún indicio de uso Formal del algoritmo. La alumna tan sólo lo emplea de un modo Técnico aunque incorrectamente, pues omite un paso de la secuencia al multiplicar por las decenas del multiplicador.

Como puede observarse a través del diálogo, ni tan siquiera llega a entender lo que se le estaba preguntando sobre la posibilidad de usar la calculadora.

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Ningún diálogo destacable. Como muestra el registro escrito, la alumna resuelve correctamente esta situación. Se pone de manifiesto un empleo Técnico correcto del algoritmo estándar escrito del producto.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

Ro.- ¿El algoritmo de la multiplicación?

I.- Sí, el método que conoces para multiplicar.

Ro.- Para multiplicar. [Tras 1' 10'' en silencio intentando sin éxito utilizar el algoritmo en la disposición de factores inicial]. ¿Puedo hacer en forma horizontal?

I.- Tú lo haces como quieras. [Transcurren en silencio otros 50'' hasta obtener el resultado]. Dime una cosa, has hecho 251 por 6, ¿no?

Ro.- Sí.

I.- ¿Podías haber hecho 6 por 251?

Ro.- Claro, si es lo mismo multiplicarlo de una manera que otra.

I.- ¿Y lo podrías hacer? Porque creo que lo has estado intentado.

Ro.- Sí.

I.- ¿Y qué ha pasado?

Ro.- No, que me resulta más fácil así.

I.- ¿Y de la otra manera no podrías haberlo hecho?

Ro.- Sí lo puedo hacer pero que...

I.- ¿Cómo sería?

Ro.- Pues lo mismo. 1 por 6, 6. Después multiplicas el 5: 5 por 6, 30, me llevo 3 y así.

I.- Venga.

Ro.- ¿Que lo haga de esta manera?

I.- Sí, hazlo a ver.

Ro.- [Ahora dispone el producto 6 por 251 pero lo que realmente hace es multiplicar 251 por 6 con el algoritmo]. 1 por 6, 6; 6 por 5, 30, me llevo 3 y 2 por 6, 12 y 3, 15.

En principio, la alumna intenta aplicar el algoritmo tal cual, en la disposición inicial. Manifiesta dificultad, desiste (ver tachón) y decide cambiar el orden de los factores.

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 251 \\ \hline 6 \\ 30 \end{array}$$

Es tachado

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

Ro.- [Una vez leído el enunciado]. *Tengo que poner los dos éstos.*

I.- *No. El multiplicador es el de abajo y el multiplicando el de arriba. Entonces, ¿sabrías decir cuántas cifras tiene el multiplicador?*

Ro.- *¿Cuántas cifras?*

I.- *Sí. No cuáles son esas cifras sino cuántas hay, cuántas cifras tiene.*

Ro.- *Cinco.*

I.- *Cinco, ¿cuál?*

Ro.- *El... [Permanece en silencio unos 15'']. Sí, creo que cinco el multiplicador. Creo... No, me he equivocado. Cinco tendría el multiplicando que es el de arriba.*

I.- *¿Por qué?*

Ro.- *Porque sí. Cuando estás multiplicando tienes que multiplicar cada una de ellas. Claro, tiene cinco. Sí.*

I.- *¿Pero ese cinco de dónde sale? ¿Por qué dices que tiene cinco?*

Ro.- *Pues de estos números.*

I.- *¿Y el multiplicador?*

Ro.- [Tras unos instantes de reflexión en silencio]. *Uno, creo.*

I.- *Uno. ¿Por qué?*

Ro.- *Porque es que... tiene que tener una. ¡Es que no sé explicarme!*

I.- *Bueno, inténtalo. [Transcurren aprox. 15'' en silencio]. O sea, el de arriba cinco y el de abajo una.*

Ro.- [Permanece en silencio unos instantes]. *Sí.*

I.- [25'' en silencio]. *¿Qué piensas? ¿Qué estabas pensando?*

Ro.- *Ahora nada.*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a otra.*

Respuesta de tipo 6a

Situación 7

Ro.- *¿Pongo aquí los números?*

I.- *Bueno, se ha ocultado el multiplicando y entonces se trata de, aún así, encontrar los números que hay en esos huecos.*

Ro.- *¿Pero aquí también se ponen los números si los sabes? [En referencia a las cifras del multiplicador].*

I.- *Como quieras.*

Ro.- [Transcurren unos 40'' en silencio]. *Es complicado.*

I.- *¿Es complicado? ¿Por qué piensas que es complicado?*

Ro.- *Porque sí. Porque faltan muchos números.*

I.- [La alumna permanece en silencio durante aprox. 2' 30'' reflexionando sobre la tarea]. *¿Qué pasa? ¿Qué problema tienes?*

Ro.- [Se ríe].

I.- *¿Por qué te ríes?*

Ro.- *Estoy pensando, no sé.*

I.- *¿No puedes completar los huecos esos?*

Ro.- *Es que este número...*

I.- *¿Por qué has puesto ahí un 1?*

Ro.- *Porque he multiplicado 3 por 5, 15, ¿no?, para que te dé 5.*

I.- *Entiendo.*

Ro.- *Entonces me llevo 1.... No, 3 por 1.... Es así. [Unos 40'' en silencio]. Por ejemplo, si aquí pongo un 6, 6 por 3, 18, me llevo 1 y no puede ser un 1. [Otros 15'' de silencio]. Aquí tiene que ser 6.*

I.- [Transcurren aprox. 30'' en silencio]. *¿Qué estás intentando ahora?*

Ro.- *Es que he puesto un 6, ¿no?, porque 6 por 3 son 18. Entonces me llevo 1 pero no puedo poner aquí un 1 porque 3 por 1 son 3, me llevo 1, sería 4.*

I.- *Entiendo.*

Ro.- *Entonces...*

I.- *¿Y en estos huecos no puedes completar ninguna cifra más? [Se insiste una última vez para ver si la alumna es capaz de superar la dependencia en las cifras del multiplicando].*

Ro.- *Sí. [Instantes en silencio]. No, no sé.*

I.- *Bueno, pasamos a la siguiente si quieres.*

Tal como la alumna ha abordado la tarea, podemos concluir que su uso del algoritmo está condicionado por el conocimiento de las cifras de los factores, en este caso del multiplicando. Asimismo, al igual que Raúl (3º ESO), está influenciada por el orden de la secuencia algorítmica estándar.

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

Ro.- *¿Todas las multiplicaciones se pueden realizar?*

I.- *¿A qué te refieres?*

Ro.- *Que si los números...*

I.- *¿Que si se pueden completar con números?*

Ro.- *Sí, todas.*

I.- *Sí, sí se puede. ¿Por qué preguntas eso?*

Ro.- *Porque es que aquí lo puedo multiplicar por 2, pero también por 4, ¿no?, y por 8 [unidades del multiplicando de la primera M CCD]. Pero es que el número que me dé no va a acabar en 3. Creo, es que no lo sé. [Instantes de silencio]. Ah, sí. Creo que sí. [Después de unos 3' 50'' de trabajo en silencio completa las dos M CCD].*

Esta tarea llega ser resuelta con cierta dificultad. Además del tiempo requerido, se llega a observar al inicio de la primera M CCD una dependencia en el orden algorítmico establecido. No obstante, hemos de señalar que la alumna fue capaz de superar dicha limitación e incrementar el uso de relaciones no-usuales entre pasos algorítmicos en los dos casos en ambas M CCD's. Por ello:

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

Ro.- *¿Esto qué quiere decir?*

I.- *Vamos a ir una por una.*

Ro.- *Vale.*

I.- *La primera: ¿qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse cuando uno multiplica?*

Ro.- [Permanece en silencio unos 15'']. *Porque sí.*

I.- *3 por 6, 18...*

Ro.- *Me llevo 1.*

I.- *...me llevo 1. ¿Eso por qué es?*

Ro.- [Instantes en silencio]. *Porque sí, porque no vas a poner aquí 18. 6 por 3, 18 y después la juntas con la otra y esto. ¿No? Es que no... no sé.* [Indicio no-Formal].

I.- [Tras 15'' en silencio]. *¿Y por qué crees que se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada una del multiplicando?*

Ro.- *¿Que por qué se debe multiplicar?*

I.- *¿Por qué hay que multiplicar 3 por 6, 3 por 4, 3 por 1 y después 2 por 6, 2 por 4, 2 por 1...? [La alumna permanece en silencio unos 15''] ¿Qué crees tú?*

Ro.- *Yo qué sé. Es que es una pregunta... no sé. ¿Por qué hay que multiplicarse? Es que no lo entiendo, no sé. Porque son... [Vuelve a quedarse en silencio durante otros 15'' aprox.]. [Indicio no-Formal].*

I.- *Dime, ¿qué crees tú? ¿O por qué hay que ir colocando los resultados parciales uno debajo del otro?*

Ro.- [Tras permanecer 25'' en silencio]. *No sé. Yo siempre hago multiplicaciones y nunca me he parado a pensar eso.*

I.- *¿Y lo del hueco? ¿Por qué se deja un hueco en esa fila? ¿Qué significado tiene ese hueco?*

Ro.- [15'' de silencio]. *Pues no sé qué significado tiene pero... es que no sé, es que no lo sé. Es que, mira, yo siempre hago multiplicaciones así, ¿no?, normales, como todo el mundo y yo nunca me he parado a ver por qué se tienen que llevar, por qué se colocan así,.... Este hueco porque nos lo han enseñado así, yo qué sé. Nunca me han dicho el porqué. Siempre cuando se multiplica el segundo, pues ya falta el espacio y después así, siempre cuando.... Es que no lo sé.* [Indicio no-Formal].

I.- *¿No se te ocurre ninguna explicación? ¿O piensas que eso es así porque sí?*

Ro.- [Transcurren 15'' sin que la alumna haga ni diga nada].

I.- *¿Y por qué se tienen que sumar al final los números estos en columnas?*

Ro.- [Se ríe].

I.- *¿Por qué te ríes, mujer? Porque tú sabes que al final se tienen que sumar.*

Ro.- *Claro.*

I.- *¿Y eso por qué es?*

Ro.- [Tras unos instantes en silencio]. *No sé.*

I.- *Bueno, pues si quieres lo dejamos aquí.* [Viendo que no aporta ningún comentario explicativo].

Ro.- [Se pone a leer la última cuestión].

I.- *Puedes leer la última pregunta.*

Ro.- *¿Alguna propiedad?*

I.- *Bueno, ¿conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar, que justifique todo este mecanismo o todo lo anterior?*

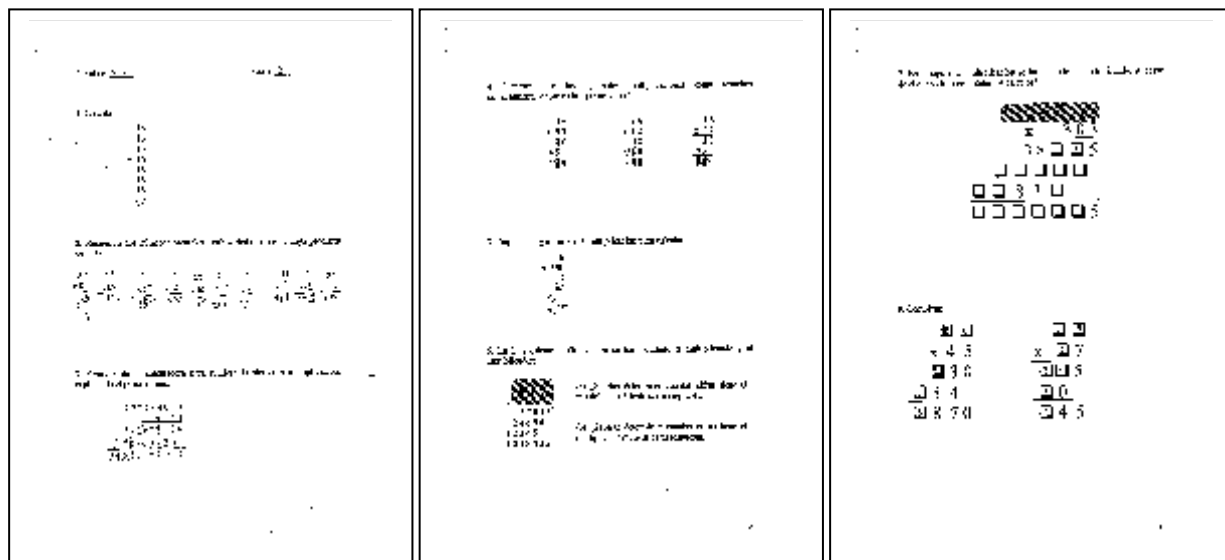
Ro.- [Permanece de nuevo en silencio durante aprox. 20'']. *Lo más seguro que la conozca pero no me acuerdo. ¡Qué va!*

I.- Bueno, lo dejamos aquí.

No se aprecia ninguna manifestación de empleo Formal del algoritmo estándar escrito. En este aspecto muestra un comportamiento similar a, por ejemplo, Raúl (3º ESO).

Respuesta de tipo 9a

Raúl (3º ESO) [08/05/2003]



Situación 1

Investigador.- Perdona, ¿cómo has hecho éste?

Raúl.- He sumado todos los 6 y luego todos los 1.

I.- Todos los 6: 6 más 6 más 6 más 6...

Ra.- Sí.

I.- ¿Y lo podías haber hecho de otro modo?

Ra.- Multiplicando 6 por la cantidad de 6 que haya.

I.- ¿Cómo sería eso?

Ra.- Pues haces 6 por [contando] 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. 6 por 7 que da 42, que es lo que me ha dado, como si lo hubiera sumado. Entonces le sumabas 4 por los [contando de nuevo] 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Entonces da 112.

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

I.- Tienes que encontrar dos números naturales, sin decimales, cuyo producto sea 177. No vale 177 por 1 porque entonces sería muy sencillo.

Ra.- Tiene que ser un número...

I.- Por otro número...

Ra.- Para que te dé eso.

I.- *Que te dé 177. Tienes aquí espacio para escribir.* [Transcurren 1' 25'' aprox. en los que el alumno emplea reiteradamente el algoritmo estándar escrito de un modo Técnico]. *¿Qué estás probando?*

Ra.- *Multiplicarlo por 10.*

I.- [Continúan los intentos en silencio durante otros 50''] *¿Y ahora qué estás pensando?*

Ra.- *Multiplicar algún número por el 9 para ver si da.*

I.- *Por el 9.* [Tras un 1' 15'' en silencio de intentos infructuosos]. *Bueno, ¿y se te ocurre hacer otra cosa?*

Ra.- *No, si no es probar por dos números.... Siempre llego a 180.*

I.- *Bueno, pues si quieres pasamos a la siguiente.*

Ra.- *Vamos a pasar, si no...*

Tal como se observa en el registro escrito, el alumno evidencia un empleo Técnico del algoritmo estándar escrito. Además, no se da indicio alguno de usarlo de un modo Analítico.

Respuesta de tipo 2b

Situación 3

I.- *Se trata de hacer esa multiplicación ayudándote de la calculadora, puedes utilizar la calculadora para resolverla. Como tú quieras.* [El alumno permanece en silencio durante aprox. 50'' realizando algunos intentos con la calculadora]. *¿Qué pruebas has hecho con la calculadora?*

Ra.- *A ver si se metían todos los números pero no caben.*

I.- [Pasados 2' 20'' en silencio en los que el alumno utiliza de forma Técnica y correctamente el algoritmo estándar escrito del producto para obtener el resultado]. *¿Ya?*

Ra.- *Ya.*

I.- *¿Cómo la has hecho, entonces? ¿Has utilizado la calculadora?*

Ra.- *No.*

I.- *Nada. O sea, has multiplicado con...*

Ra.- *De cabeza.*

I.- *De cabeza. ¿Y lo podías haber hecho de otro modo?*

Ra.- [Permanece en silencio unos instantes]. *No sé. Yo lo he hecho así. Hombre, con la calculadora también pero que de otro no sé.*

I.- *Con la calculadora también.*

Ra.- *Sí.*

I.- *¿Cómo lo harías con la calculadora?*

Ra.- *Pues, si no caben todos los números.... Entonces multiplicaría, como no cabe, pues 4 por... [instante de silencio] 4 por 999 y lo que te dé ahí. Luego lo que te dé eso lo sumas por éste, luego multiplicas 444...*

I.- *¿Cómo? 4 por 999.*

Ra.- *No, es que no sé cómo se hace con calculadora.*

I.- *¿Pasamos a la siguiente?*

Ra.- *Pasamos.*

En esta tarea se aprecia un uso Técnico del algoritmo. Con la calculadora el alumno intuye que quizá se podría “trocear” el multiplicando y realizar la multiplicación por

partes aunque no llega a precisar el procedimiento concreto. No muestra, pues, capacidad de empleo Formal del algoritmo.

Respuesta de tipo 3a y 3b'

Situación 4

Ningún dialogo destacable. El registro escrito muestra con claridad la resolución correcta de la tarea mediante un uso acertado del algoritmo estándar escrito.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

Ra.- *El algoritmo ¿Eso qué es?*

I.- *Bueno, el método de multiplicar. Se trata de multiplicar 6 por 251 como siempre.*

Ra.- *¿Éstos, así como están?*

Como puede observarse, el alumno aplica la secuencia algorítmica estándar manteniendo la disposición inicial de los factores. No obstante, el empleo Técnico del algoritmo se ve afectado por tal disposición, dando lugar a una aplicación incorrecta del mismo.

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

I.- *¿La 6 la entiendes?*

Ra.- *Sí, tendría que tener arriba cinco y abajo tres [respuesta directa, rápida y sin dudas aparentes].*

I.- *¿Abajo, por qué tres?*

Ra.- *Porque salen tres para abajo.*

I.- *Salen tres para abajo, tres filas.*

Ra.- *Sí, tres filas, sí. Y cinco porque hay cinco números pues ya al multiplicar tres veces de cinco.*

I.- *Cinco, porque hay cinco números en cada una de las filas.*

Ra.- *Claro.*

I.- *Entiendo. ¿Quieres decir algo más o pasamos a la siguiente?*

Ra.- *No, ya está.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

I.- [Tras 45'' de reflexión en silencio por parte del alumno]. *¿Qué estás intentando, qué estás pensando?*

Ra.- *No, que me he equivocado.*

I.- *Bueno, lo puedes corregir.*

Ra.- *¿Si no sé eso cómo lo voy a hacer?!*

I.- *¿Cómo?*

Ra.- *¿Si no sé eso [el multiplicando], cómo lo voy a hacer?*

I.- *Que no sabes como hacerlo si no conoces el multiplicando. [Transcurren unos 40'' en silencio]. ¿Por qué has puesto un 1 ahí?*

Ra.- *No, que me he equivocado. Pues sin esa es que no sé hacerla. No sé, 3 por 5, 15, a lo mejor. ¿Y luego el 3 por qué se multiplica?*

I.- [Tras otros 35'' en silencio] *¿No se te ocurre nada?*

Ra.- *No.*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

Ra.- *Si es que sin cosa de esa no sale hacerla.*

El alumno muestra un fuerte condicionamiento o dependencia de las cifras del multiplicando así como del orden establecido en la secuencia algorítmica estándar.

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

I.- [Transcurridos 1' 50'' aprox. de intentos de resolución en silencio de la primera MCCD] *¿Qué estás intentado ahí?*

Ra.- *No, como aquí da 8 [centenas del resultado total] pues entonces sería aquí 4 [centenas del 1^{er} resultado parcial]. Ahora tengo que saber cómo se pone ahí el 4. Para que dé eso, para meter ahí 4.*

I.- [Tras 25'' de silencio] *¿Y el 6 por qué lo has puesto?*

Ra.- *Porque si da 5 por 6, 30, y aquí me llevo 3.*

I.- [Después de estar en silencio 1' 20'' aprox.]. *¿Qué sucede?*

Ra.- *No me sale.*

I.- *¿Qué has puesto aquí?*

Ra.- *Un 4 [centenas del 1^{er} resultado parcial] y en el de arriba un 8 [decenas del multiplicando].*

I.- *Un 8.*

Ra.- *Y entonces daría 40.*

I.- [Tras otros 30'' de silencio] *¿Qué problema tenías?*

Ra.- *No, que me había confundido. Como había puesto ahí tantos números me creía que era otro.*

I.- *Entiendo.*

Ra.- [Se pasa a la segunda MCCD. Tras aprox. 1' 25'' de reflexión en silencio completando huecos]. *Este resultado puede ser el que tú quieras porque puedes poner el número que quieras ahí. Como no te pone nada, ninguno. [En referencia a las decenas del multiplicador].*

I.- *¿Dónde?*

Ra.- *Éste.*

I.- *El 1 ese.*

Ra.- *Te puedo poner.... Si lo multiplicas por el que sea, el 2 por 5, 10, el 4 por 5, 20, yo qué sé.*

I.- *Y has puesto el 2.*

Ra.- *Sí, he multiplicado 2 por 5, 10; entonces, ya era 1 y 2 más 1, 3. [Se equivoca al completar el hueco correspondiente al 2^o resultado parcial. Error propio de la faceta Técnica].*

I.- [Tras unos instantes de silencio]. *Bueno, ¿pasamos a la siguiente?*

La dependencia en el orden de la secuencia algorítmica se manifestó en la primera MCCD aunque el alumno consiguió romperla para flexibilizar algunos pasos del proceso algorítmico. En la segunda MCCD se volvió a observar un uso Analítico del algoritmo.

Parece que existe la tendencia común entre algunos de los sujetos entrevistados a mostrar en un principio una fuerte dependencia en el orden algorítmico para después suavizarla cuando el espacio de reflexión es más reducido (mccd's de tamaño 2 x 2).

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

I.- ¿Entiendes la primera?

Ra.- ¿Por qué se lleva... por qué hay que llevarse?

I.- Ajá.

Ra.- [Permanece en silencio unos instantes]. *Porque aquí en 18 te tienes que llevar 1 para allá porque es 18 y el 1 te lo tienes que sumar ahí, ¿no?*

I.- ¿Y por qué hay que sumárselo ahí?

Ra.- *Porque el 18 es como si siguiera ahí el 18 y entonces ponía el 3 por 4, 12 y entonces el 2 se sumaría con el 1. Entonces sería 3 y el 1 se sumaría con el 3 por 1 y entonces sería 4. Algo así. [Indicio no-Formal].*

I.- ¿Esa es la razón por la que hay que llevarse?

Ra.- [Asiente].

I.- ¿Y por qué crees que se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando cuando se multiplica?

Ra.- *Porque se inventó y dijo eso y ya está.*

I.- ¿Lo entiendes, no? Es decir, ¿por qué hay que multiplicar 3 por 6, 3 por 4, 3 por 1 y después...? ¿Por qué eso va así?

Ra.- [Instantes de silencio] *Pues no sé. ¡Porque es así!*

I.- *Porque es así.*

Ra.- *No sé.*

I.- ¿No se te ocurre ninguna explicación?

Ra.- *No. [Indicio no-Formal].*

I.- ¿Y por qué se van situando en filas los resultados parciales, uno debajo del otro? Es decir, multiplicas por el 3 y se coloca acá [primera fila]. Multiplicas por el 2 y se coloca aquí [segunda fila]. Se van colocando por filas.

Ra.- *Para saber con qué números has multiplicado, pues si es todo junto ya no sabrías con qué número has multiplicado. Haces 3 por 6, 18, pues entonces los pones en una fila. Y luego el 2 por ése en otra fila para saber con cuál has multiplicado. [Indicio no-Formal].*

I.- *Entiendo. ¿Y lo del hueco? ¿Por qué se deja un hueco ahí, en esta fila? [El alumno permanece en silencio unos 40''] ¿Qué dices?*

Ra.- *¡Yo qué sé! Para adelantarlo o algo. No lo sé. [Indicio no-Formal].*

I.- *Para adelantarlo. [Pasados 15'' en silencio] ¿Y lo de sumar en columnas al final? ¿Por qué se tienen que sumar estos así en columna?*

Ra.- *Porque no se daría el resultado... no estaría terminado.*

I.- *No estaría terminado.*

Ra.- *Se quedaría incompleta la multiplicación. [Indicio no-Formal].*

I.- *Oye, ¿y...?*

Ra.- [Leyendo la última cuestión] *¿Conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar?*

I.- *Eso. ¿Alguna propiedad matemática que justifique por qué se multiplica así?*

Ra.- [Instantes de silencio] *No.*

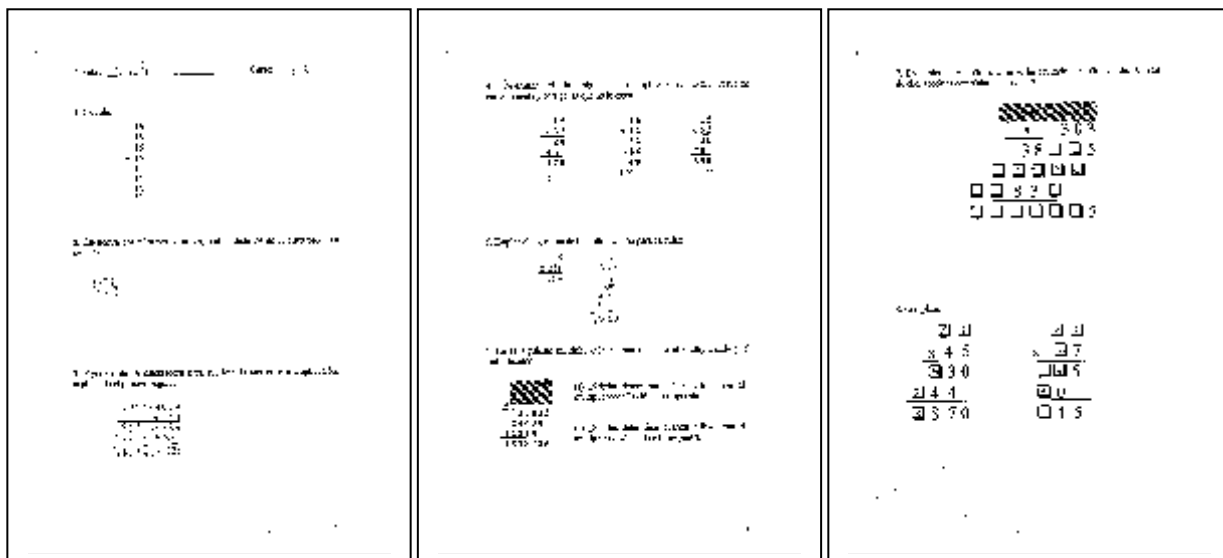
I.- *Bueno, pues ya está. Ya hemos terminado.*

A través de las explicaciones dadas no observamos ninguna manifestación de empleo Formal del algoritmo. Las justificaciones dadas se alejan de los principios que fundamentan el algoritmo. Por tanto:

Respuesta de tipo 9a

Jennifer (3º ESO) [09/05/2003]

Esta alumna provocó dificultades en la transcripción del registro de audio debido a su mala pronunciación y al hecho de que continuamente estaba con la mano en la boca.



Situación 1

Investigador.- [Tras obtener la alumna 112 como resultado]. *¿Cómo lo has hecho?*

Jennifer.- *Pues ir sumando los 6 y entonces ya pues le sumas los 1. También se podía multiplicar los 6, ¿no?*

I.- *¿Cómo sería?*

Je.- *Multiplicando 6 por..., vamos a ver, por 7, ¿no? Entonces ya se suman los 1.*

Resuelve la tarea sumando aunque reconoce que la podría haber resuelto multiplicando 6 por 7. En cualquier caso, no manifiesta un uso (Técnico) del algoritmo estándar escrito del producto.

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

I.- *¿Entiendes la tarea?*

Je.- *Más o menos.*

I.- *Tienes que encontrar dos números...*

Je.- *Sí.*

I.- *...cuyo producto sea 177.*

Je.- *¡Ah!*

I.- *Pero no pueden tener decimales. Son números naturales.*

- Je.-** ¡Uff! Vamos a ver...
- I.-** Tienes aquí espacio para escribir lo que quieras.
- Je.-** [Tras unos instantes de silencio]. Es que ya me he puesto nerviosa [se ríe].
- I.-** Ah, que te has puesto nerviosa. Bueno, tranquila mujer.
- Je.-** Es que no me sale éste.
- I.-** No te sale ése. ¿Qué es lo que estabas intentando?
- Je.-** Por lo mismo que he hecho éste, nada más que los números... sería... [Tras 15'' en silencio]. ¡No me sale!
- I.-** ¿Pero qué estás pensando? ¿O qué estás intentando?
- Je.-** [Permanece en silencio unos instantes]. ¿Por una cifra sólo?
- I.-** Dos números.
- Je.-** [Otros 35'' en silencio]. ¿Pero no lo puedo dividir ni nada?
- I.-** Puedes hacer lo que quieras.
- Je.-** ¡Si me sale mal...! [Durante aprox. 30'' en silencio intenta dividir 177 entre 2]. No, porque no me da exacto. ¡No me sale!
- I.-** ¿Qué es lo que has intentado aquí?
- Je.-** Porque a lo mejor dividiendo esto [177] te sale por el que puedas multiplicar.
- I.-** Y has dividido por 2 y no te sale. [Transcurren 25'' en silencio]. ¿Y ahora qué estabas pensando? ¿No se te ocurre nada más que dividir por 2 y ya está?
- Je.-** Multiplicando, pero.... A lo mejor restarlo por... [se queda en silencio].
- I.-** Multiplicando o restando.
- Je.-** [Tras otros 20'' en silencio]. No me sale.
- I.-** ¿Por qué has dicho restando? ¿Por qué has dicho multiplicando?
- Je.-** Porque a lo mejor restándole, pero no. Porque... [Otro intervalo en silencio de unos 15'']. Es que dividiendo, pues si daba la mitad, pues sumabas la otra mitad, ¿no? Entonces te da 177. Pero como no es exacta, a lo mejor, no da.
- I.-** [Tras aprox. 25'' en silencio]. Pues si quieres pasamos a la siguiente.
- Je.-** Es que no me sale. Tienes dos cifras para sumar para que te dé esto.
- I.-** No, dos cifras cuyo producto sea 177. Producto es multiplicación, ¿no?
- Je.-** [Tras 20'' en silencio]. No, porque 17 no...
- I.-** Bueno, pasamos a la siguiente si quieres.
- Je.-** Mira, 8 por 2 da 16, entonces no... que no me da eso.
- I.-** Bueno, pasamos a la siguiente.

No emplea el algoritmo estándar escrito del producto de ningún modo.

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

- I.-** Aquí tienes una multiplicación y se trata de hacerla. Debes hacer la multiplicación y dispones de una calculadora que puedes utilizar.
- Je.-** [Permanece en silencio unos 30'' intentando introducir todas las cifras del multiplicando en la pantalla]. ¡Nada, que no da el número! [Se ríe].
- I.-** ¿Cómo?
- Je.-** Que no da el otro número.
- I.-** Que no cabe.
- Je.-** No. Vamos a ver... [20'' en silencio]. ¿Todo eso había que sumarlo? ¡Qué jaleo, vaya! [Transcurrido 1' en silencio]. Estoy cabreada ya.
- I.-** ¿Cómo?
- Je.-** ¡Que estoy cabreada aquí! [se ríe nuevamente].

I.- [Después de 2'' en silencio en los que la alumna continúa aplicando el algoritmo estándar escrito]. *¿Ya está? ¿Y entonces la calculadora para qué la habías utilizado?*

Je.- *Para nada porque como no daría el resultado por mirar la calculadora, pues lo he hecho a mano.*

I.- *Que lo has hecho a mano. ¿Y no se te ha ocurrido utilizar de otro modo la calculadora para hacer esa cuenta?*

Je.- *No.* [Permanece unos 20'' sin aportar nada más].

I.- *Bueno, pasamos a la siguiente.*

La alumna intenta usar la calculadora pero al observar que no es posible introducir todas las cifras del multiplicando decide aplicar el algoritmo estándar escrito de forma Técnica. Durante este proceso comete múltiples errores, sobre todo con las llevadas y con los hechos numéricos básicos. Además, muestra una lentitud considerable en el uso del procedimiento.

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Je.- [Respecto a la primera multiplicación]. *Ésta sí está bien. ¿Lo pongo abajo?*

I.- *Sí, las que estén mal las corriges o pones un bien...*

Je.- [En la segunda multiplicación]. *Esta está mal. Porque el 6 tenía que estar aquí y el 1 aquí [desplazados un lugar hacia la izquierda]. ¿Le pongo el resultado?*

I.- *Sí, como quieras.*

Ningún diálogo destacable. Tan sólo que la alumna admite que la primera multiplicación no incluye ningún error.

En realidad, por lo observado en las situaciones 3 y 4, podríamos afirmar respecto a la esfera Técnica de empleo del algoritmo que esta alumna reconoce la secuencia algorítmica estándar pero no manifiesta la destreza necesaria para llegar a resultados correctos. Sobre todo porque en reiteradas ocasiones no tiene en cuenta las llevadas.

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

Je.- *¿Qué tengo que hacer aquí, multiplicar?*

I.- *Multiplicarlo, sí.*

Je.- [En un principio aplica el algoritmo estándar escrito para resolver 251 por 6, proporcionando un resultado correcto].

I.- *Fíjate, aquí en realidad has multiplicado 251 por 6: 6 por 1, 6; 6 por 5, 30, me llevo 3 y 6 por 2, 12 y 3, 15. ¿Pero lo podías haber hecho multiplicando 6 por 251? Aplicando el método. Tú sabes que el método de multiplicar es éste [señalando a una de las multiplicaciones corregidas en la situación 4].*

Je.- *Pero que es más fácil así, ¿no?, que...*

I.- *Sí, parece que es más fácil. ¿Pero sabrías hacerlo del otro modo?*

Je.- *¿De éste? Sí.* [Comienza a aplicar el algoritmo estándar escrito en la disposición original 6 por 251]. *Vamos a ver... así no. No, no. No sé, ya me he equivocado [sitúa mal 30 pero a continuación corrige su posición].*

Tal como muestra el registro escrito, la alumna no se ve especialmente afectada por la disposición no usual del multiplicando y multiplicador.

Respuesta de tipo 5b**Situación 6**

Je.- [Tras leer el enunciado] *¡Ésta es difícililla!* [Risas].

I.- *¿Sí, te parece difícil?*

Je.- *A ver, se hace... ¿no? No sé.*

I.- *El multiplicador es el de abajo y el multiplicando el de arriba. Y tienes que ver, según tú, cuántas cifras tiene el multiplicador...*

Je.- *Tres.*

I.- *...y cuántas el multiplicando. ¿Tres?*

Je.- *Tres abajo y abajo pues... cuatro arriba, ¿no?*

I.- *¿Por qué dices tres abajo?*

Je.- *Porque como hay tres de esto.*

I.- *Tres filas.*

Je.- *Sí.* [Se queda en silencio].

I.- *¿Y arriba qué has dicho?*

Je.- *Cuatro.*

I.- *¿Por qué?*

Je.- *Porque.... Imagino que es porque aquí tiene cinco, ¿no?, y siempre algún número es mayor, puede ser mayor, entonces te... tiene otra cifra el resultado. O puede tener cuatro si la cifra es menor.*

I.- *Cuatro si la cifra es...*

Je.- *Vamos a ver, que... Éste es 2, ¿no?, y aquí es 3, pues coges multiplicando 2 por 3, 6, entonces no tienes que poner otra cifra y son nada más que cuatro. Puede tener cuatro o cinco. No. Cuatro o cinco.*

I.- *Entonces, tres aquí abajo y arriba...*

Je.- *Cuatro o cinco.*

Respuesta de tipo 6b**Situación 7**

I.- *Se trata de encontrar las cifras que hay en los huecos.*

Je.- *Aquí puede haber un 5 [unidades del multiplicando oculto]. 3 por 5, 15...*

I.- [Transcurren unos 45'' en silencio]. *¿A ver, en qué estás pensando?*

Je.- *Que aquí puede haber un 5 porque 3 por 5, 15, que me llevaría 1..., podía poner aquí un 2 [decenas del multiplicando]. 3 por 2, 6 y ésta que me llevo, 7. [Tras 20'' en silencio]. Pues no sé.*

I.- *¿No se te ocurre qué números pueden ir en los huecos?*

Je.- [Instantes de silencio]. *Aquí sí [segundo resultado parcial] porque aquí es 0 [decenas del multiplicador]. Aquí es 0. [Tras un 1' 25'' aprox. de reflexión en silencio]. Es que no me sale esta cifra que tiene que haber por aquí....*

I.- *A ver, ¿qué estás intentando ahora?*

Je.- *Esta cifra más o menos sé cuál es. Es 3 por 5, aquí tiene que haber un 5.*

I.- *¿Y no puedes completar más huecos de abajo aunque no conozcas estas cifras [las del multiplicando]?*

Je.- *Éstos [en el 1^{er} resultado parcial], pero si luego los multiplicas por aquí [en el 3^{er} resultado parcial] te puede dar otra cifra y.... Claro, que se necesitan éstos [las cifras del multiplicando].*

I.- *Entiendo. Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

Je.- *Tiene que haber otra forma.*

Del diálogo establecido se observa que la alumna manifiesta dependencia en el orden alfabético y sobre todo en las cifras del multiplicando.

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

Je.- [En la resolución de la primera M CCD]. *Ya me he equivocado.*

I.- *¿Por qué te has equivocado?*

Je.- *Porque no me da aquí. 5 por 6, 30, me llevo 3. 5 por 1, 10, entonces me da 13.*
[Tras 30'' de reflexión en silencio]. *Aquí tiene que haber otro 4 porque 4 y 4....*

I.- *Aquí tiene que haber otro 4.*

Je.- *Claro, porque al sumarlas aquí...*

I.- [Casi un 1' 30'' después]. *¿Qué problema tienes aquí al final?*

Je.- *24... ¿es 32, no?* [Vuelve a manifestar problemas con los hechos numéricos básicos, en concreto con el resultado de 4 por 8].

I.- *No entiendo. ¿Qué quieres decir?*

Je.- *Vamos a ver: 5 por 6, 30, esto lo tengo bien.*

I.- *5 por 6, 30.*

Je.- *5 por 8, 40, más 3 que te llevabas, 43. 6 por 4, 24, me llevo 2.... Me da 26 más 2 que me llevaba, 24.*

I.- *¿Cuánto?*

Je.- *34, ¿sería así, no?*

I.- *¿Qué me estás diciendo?*

Je.- *Esto está bien. No.*

I.- *¿Por qué hay un problema?*

Je.- [Instantes de silencio]. *No sé, aquí es 34, ¿no? Está bien.*

I.- *No lo sé. No sé qué problema tienes. Todavía no llego a entenderlo.*

Je.- *Ahora sí está bien.*

I.- *Bueno, la siguiente.*

Je.- [Tras 25'' de reflexión silenciosa sobre la segunda M CCD]. *7 por 5, 35, me llevo 3. Vamos, que no.*

I.- *¿Que no qué?*

Je.- *No me sale.* [Tras 15'' en silencio]. *Aquí tiene que haber un 4.* [Después de 1' concluye la resolución de forma incorrecta pues vuelve a olvidar unas llevadas].

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

I.- [Una vez leído el enunciado por parte de la alumna] *¿La primera qué te parece?*

Je.- *Porque... si no sumas con las que te has llevado pues dónde las meterías, digo yo. Por ejemplo, si te sobra 2...*

I.- *O si te sobra 1, ¿no?, de 3 por 6.*

Je.- *Si no las sumo pues entonces no da nada. No tiene... vamos que la multiplicación no tiene sentido.*

I.- *¿Que no tiene, qué?*

Je.- *Que no tiene sentido, yo qué sé. Porque no... no da resultado.* [Indicio no-Formal].

I.- *No da resultado. [Transcurren unos instantes de silencio]. ¿Y la segunda pregunta? ¿Por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?*

Je.- *Porque es igual que 2 por 2, si no multiplicas esto no te da el resultado.*

I.- *A ver, no lo entiendo bien.*

Je.- *Porque si no multiplicas esos dos números...*

I.- *¿Cuáles?*

Je.- *Los dos.*

I.- *Es decir, la pregunta es: ¿por qué hay que multiplicar 3 por 6, 3 por 4, 3 por 1 y después 2 por 6, 2 por 4, 2 por 1,...*

Je.- *Porque si no, no te da el resultado. No vas a multiplicar lo de abajo.*

I.- *¿Cómo? No vas a multiplicar lo de abajo.*

Je.- *Que no puedes multiplicar lo de abajo para que te dé a lo mejor el resultado, digo yo. Lo que sí puedes dividir esto para que te dé el resultado pero que no... que si no multiplicas estos dos, no... [indicio no-Formal].*

I.- *Sí, ya. Hay que multiplicar el 146 por el 23.*

Je.- *Si no lo multiplicas, entonces no te da el resultado de nada.*

I.- *¿Pero por qué hay que multiplicar el 3 por todo lo demás y el 2 por todo lo demás? ¿Por eso que me dices?*

Je.- *Por lo mismo porque multiplicar esto... pues te van dando los resultados.... Se multiplica todo porque tienes que buscar un resultado.... Da lo mismo pero que es más fácil haciéndolo así, ¿no? [Indicio no-Formal].*

I.- *Entiendo. ¿Y lo de situar los resultados parciales en filas?*

Je.- *Porque luego no se pueden sumar.*

I.- *¿Cómo?*

Je.- *Que luego no se pueden sumar.*

I.- *Que luego no se pueden sumar.*

Je.- *Bueno, sí se pueden sumar mentalmente pero que si lo colocas ahí todo de golpe.... Que encuentras más fácil haciéndole, poniéndolo en su sitio. [Indicio no-Formal].*

I.- *¿Y lo del hueco aquí? ¿Qué significado tiene ese hueco?*

Je.- *0.*

I.- *Es un 0.*

Je.- *Digo yo.*

I.- *¿Por qué?*

Je.- *Tú tienes ahí un 0 porque como... porque no puedes poner ahí ningún número. Porque ahí te imaginas que es un 0, entonces ya sabes que tienes que pegar los huecos.*

I.- *¿Pero por qué es un 0?*

Je.- *Porque ahí no se pone número, entonces si quieres poner alguno, pues pone uno un 0 para saber que no hay ninguno. [Indicio no-Formal].*

I.- *Entiendo. ¿Y al final por qué se tiene que sumar en columnas?*

Je.- *Para que te dé el resultado de toda la multiplicación.*

I.- *Para que te dé el resultado de toda la multiplicación. [Tras unos instantes de silencio]. Sí, pero digo yo que por qué se tendrá que sumar y no seguir multiplicando, por ejemplo, o restar.*

Je.- *Porque la multiplicación ya ha terminado, ya no tiene más que multiplicar. Entonces ya se suman todos. Porque si sigues multiplicando es como si estuvieras haciendo más multiplicaciones. Eso significa de que ha acabado la multiplicación. [Indicio no-Formal].*

I.- Entiendo. Y por eso hay que sumarlo. [Instantes de silencio]. *¿Y conoces alguna propiedad que se utilice en este método de cálculo para justificar por qué se multiplica así? ¿Alguna propiedad matemática que tú pienses que se utiliza para explicar por qué se multiplica así? El porqué se va multiplicando el 3 por el 6, el 3 por el 1, etc.; la disposición de las cifras y todo eso.*

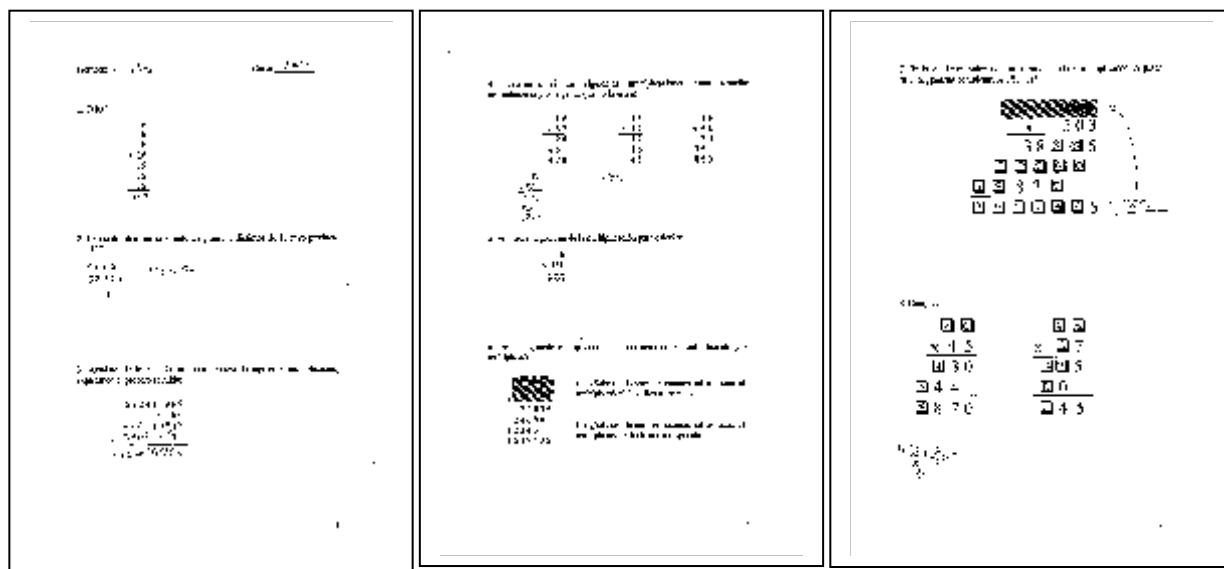
Je.- Pues no. [Transcurren unos 25'' en silencio]. *Pues no me acuerdo.*

I.- Bueno, pues ya hemos terminado.

No se aprecia ninguna manifestación de empleo Formal del algoritmo. Por ejemplo, su interpretación del hueco como 0 no tiene nada que ver con la justificación real. Por tanto:

Respuesta de tipo 9a

Carlos (3º ESO) [12/05/2003]



Situación 1

Investigador.- *¿Cómo lo has resuelto?*

Carlos.- *Pues, si el 6 se repite tantas veces pues multiplico por ese número y luego sumo todos los 1 y los que me llevo se los sumo también.*

I.- *¿Lo podías haber hecho de otro modo?*

Ca.- *Claro, sumando 6 más 6, 12 más 6, 18, ... así.*

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

Ca.- [Tras 30'' aprox. de reflexión en silencio] *¿Divido esto?*

I.- *Tú haz lo que quieras. Tienes todo el espacio para escribir lo que quieras.* [Transcurren 1' 10'' de silencio, donde el alumno realiza la descomposición en factores primos de 177 para obtener los dos números buscados]. *De acuerdo, ¿lo podías haber hecho de otro modo?*

Ca.- [Instantes de silencio] *Simplemente dividiendo. 177 entre 3 te daría 59 y luego multiplicas eso para hallar la... el algoritmo de la división ahí.*

I.- *Y luego multiplicas.*

Ca.- *El dividendo por el... dividiendo.*

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

I.- *Tienes aquí una calculadora y se trata de hacer esta multiplicación. Tú lo haces como quieras. Puedes utilizar la calculadora para ello.*

Ca.- [Introduce en la calculadora las cifras del multiplicando] *¿No marca más 9?*

I.- *¿Cómo?*

Ca.- *¿No marca más números?*

I.- *No.*

Ca.- [Transcurridos unos 20'' en silencio] *¿Cómo que no puede marcar todos los números?*

I.- *Porque es una calculadora a la que sólo le entran 8 dígitos.*

Ca.- [Tras otro 50'' de intentos en silencio] *No se puede sumar 64 por 9, no se le puede sumar a ese número, ¿no?*

I.- *A ver, ¿qué es lo que estabas intentando?*

Ca.- *Pues, este número [el 22244499], sin el 9, multiplicarlo por 64 y lo que me dé lo sumo a 64 por 9 y se lo sumo al resultado, ya que no puedo poner todas las cifras.*

I.- *Entiendo lo que quieres hacer. ¿Y qué te ocurre? ¿Que no lo puedes hacer con la calculadora?*

Ca.- *Claro, no puedes sumárselo a eso. 64 por 9 no puedes sumárselo [22244499 por 64 sigue dando un resultado demasiado grande]. ¿Esto hay que hacerlo obligatoriamente con la calculadora?*

I.- *Bueno, tú lo haces como quieras. Te puedes ayudar de la calculadora para hacerlo. Aquí lo que pasa es que te da un error porque el número, como resultado, habrá sido demasiado grande.*

Ca.- [Pasados 1' 15'' aprox. desiste de la calculadora y decide emplear el algoritmo estándar escrito de forma Técnica para multiplicar]. *Voy a hacerlo ya así...*

I.- *Como quieras. [Transcurren 1' 30'' de silencio dedicados a la aplicación del algoritmo] ¿Ya está? Al final, ¿no te ha servido para nada la calculadora?*

Ca.- *Podría ser para ir multiplicando paso por paso pero entonces sería más largo.*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 3b y 3b'

Situación 4

Tal como se observa en el registro escrito, el alumno identifica y corrige de un modo correcto el error en la primera multiplicación. No obstante, reconoce explícitamente que la segunda y tercera multiplicación están bien hechas:

Ca.- [Tras analizar las dos últimas multiplicaciones] *Ésta también está bien. Las otras dos sí están bien.*

I.- *Las otras dos están bien.*

Ca.- *Sí.*

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

I.- A ver, ¿cómo lo has hecho?

Ca.- Multiplicar 6 por 1, 6; 6 por 5, 30, me llevo 3; 6 por 2, 12 y 3, 15: 1506.

[Cambia el orden de los factores al multiplicar].

I.- O sea, que en realidad lo que has multiplicado...

Ca.- El orden de los factores no altera el producto.

I.- Pero, aún así, ¿podías haber hecho en esa disposición la multiplicación? O sea, ¿multiplicar 6 por 251?

Ca.- Siempre es más fácil poner el más grande arriba. Es lo mismo multiplicar 251 por 6 veces que 6 veces por 251.

I.- Entiendo lo que dices. Pero, aún así, te repito: ¿podías haberlo hecho de esta manera: 6 por 251?

Ca.- Sí.

I.- ¿Cómo sería?

Ca.- ¡Ya lo he hecho!

I.- Tú lo que has multiplicado ha sido 251 por 6, ¿no?

Ca.- Sí.

I.- Entonces, yo te pregunto: ¿podías haber hecho 6 por 251 aplicando el algoritmo de la multiplicación, el método que conoces para multiplicar?

Ca.- ¿6 por 251? Sí.

I.- ¿Y cómo quedaría?

Ca.- 1506.

I.- ¿Así tal cual?

Ca.- Sí. Luego, si divides 1506 entre 251 te daría 6. Es que no entiendo lo que me quieres preguntar.

I.- Sí, tú has multiplicado aquí 251 por 6.

Ca.- Bueno, yo al multiplicar eso lo he hecho al revés.

I.- Vale, 6 por 1, 6 por 5 y 6 por 2, ¿no?

Ca.- Sí.

I.- Pero, ¿y al revés?

Ca.- Claro que se puede: 251 por 6.

I.- Bueno, pasamos a la siguiente.

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

Ca.- [Tras leer el enunciado en silencio] Eso no lo sé. Supongo que será cuatro porque cada vez que salen cuatro multiplicas por cuatro números que hay arriba.

I.- A ver, la primera. El multiplicador es el de abajo y el multiplicando el de arriba. Entonces, ¿cuántas cifras tiene el multiplicador, según tú? ¿Y cuántas cifras tiene el multiplicando?

Ca.- El multiplicador, una.

I.- El multiplicador, una.

Ca.- Sí.

I.- ¿Por qué?

Ca.- Es que no se sabe determinar, es que eso no se sabe. No te puede dar la solución si sabes dónde estás haciendo.

I.- ¿Y el multiplicando?

Ca.- *Yo creo que podría ser el multiplicando cuatro y el multiplicador uno. Porque como sale aquí cinco cifras, pues vas multiplicando y al final te llevas una.*

I.- *Y al final te llevas una.*

Ca.- *No creo que sea así pero bueno.*

I.- *¿Por qué dices que no crees que sea así?*

Ca.- *No se puede decir que.... No sabría determinarlo.*

Respuesta de tipo 6a

Situación 7

I.- *¿Entiendes la pregunta? Tienes una multiplicación en la que se ha ocultado el multiplicando. Se trata de encontrar las cifras que hay en cada uno de los huecos.*

Ca.- *¿Lo pongo aquí primero, el multiplicando?*

I.- *Tú puedes escribir lo que quieras.*

Ca.- [Comienza intentando determinar las cifras del multiplicando. Transcurren unos 45'' en silencio]. *¿No hay ningún número!*

I.- *¿No hay ningún número? [Tras otro silencio de 1' 15'' aprox.] A ver, ¿qué estabas intentando?*

Ca.- *Sabemos que en el multiplicando tiene que haber cinco cifras porque el 0 lo multiplico. Multiplicado por el número que sea si es que están cinco cifras, que siempre va a ser 0 el resultado, tiene que haber aquí cinco cifras. O sea, que ya no tengo más. [Después de unos 35'' de reflexión en silencio]. De acuerdo, ya está: 38 aquí [en el 3^{er} resultado parcial], 83, 5...*

I.- *¿Y ahora?*

Ca.- *Porque si.... Un número multiplicado por 3 te tiene que dar lo mismo que si luego lo multiplicas por 3. Si éste resultado te da no sé qué, 83 y aquí da 38 y 5, pues se supone que aquí será 83, que ya te lo dice aquí abajo. Y aquí [primer resultado parcial] 38 y 835; el multiplicando por 3. Y ahora sumarlo.*

[Tras la suma y pasados unos 25''] *Éste número [el resultado] se dividiría entre 303 y te daría eso [el multiplicando].*

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

No se llega a establecer ningún diálogo. Interesa, no obstante, hacer explícita la observación de que el sujeto mostró una comprensión importante (entendida en términos de decisión y seguridad en el empleo), de la relación existente entre el producto y la división como operaciones opuestas. De hecho, fue la estrategia que usó el alumno para determinar las cifras del multiplicando en la primera MCCD, aunque para ello tuvo que identificar primero que la cifra oculta del 1^{er} resultado parcial es un 4.

La segunda MCCD fue resuelta sin dificultad aparente y de forma rápida identificando las relaciones no-usuales contenidas para la detección de las cifras.

De lo observado en las situaciones 7 y 8 llegamos a la conclusión de que estamos ante un sujeto que muestra un cierto grado de flexibilidad hacia el orden establecido (empleo Analítico).

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

I.- Si quieres empezamos por la primera. ¿Qué sentido tienen las llevadas? ¿Por qué hay que llevarse cuando uno multiplica?

Ca.- Porque si multiplicas 3 por 3, 9, pues eso se sabe que es por el 9 pero a lo mejor hay un número que lo multiplicas por eso y te da a lo mejor 49. Si pones tú 9 y no te llevas 4 entonces no sabes si es 9 o es otro número, entonces al llevarte el 4 o el 5 o el que sea sabes que es 59 o 49 o lo que sea. Te lo tienes que llevar para sumárselo al otro.

I.- Y se lo pones al otro... ¿cómo has dicho?

Ca.- No, y luego al multiplicarlo se lo sumas. No es lo mismo sumar 9 más 9 que sumar 99 más 99, por ejemplo.

I.- Esto último no lo he entendido. ¿Por qué me has dicho eso de 9 más 9?

Ca.- Que no era a lo mejor: 3 por 3 sería 9, ¿no? No es lo mismo sumar 9 más 9 que, si a lo mejor si es 59 y llevarte el 5, sumar 59 más 59. Si es 9 y 9, sería 18; 59 y 59 no sería lo mismo. Entonces por eso hay que llevarse.

I.- Entiendo. ¿Y por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?

Ca.- Porque esa es la clave del resultado. Tienes que ir multiplicándolas... cada cifra... para que dé el resultado.

I.- Porque esa es la clave.

Ca.- Si no multiplicas cada cifra que hay en el multiplicador por el que hay en el multiplicando no hayas la solución.... No sé, así es como me lo han enseñado, es como hay que hacerlo. [Explicación alejada de lo Formal].

I.- ¿Y por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno dejado de otro?

Ca.- Para luego a lo mejor tener una predisposición a la hora de sumar.

I.- Para tener una predisposición a la hora de sumar.

Ca.- Claro, al estar lineados pues ya sabes en qué número corresponde cada uno y luego ya pues ir sumándolos así.... Porque será... supongo que será mejor, más cómodo también.

I.- ¿Y por qué se deja un hueco en la segunda fila?

Ca.- Porque... [Permanece en silencio unos 20''] Porque es como si aquí, el 2, está sustituyendo a las decenas, ¿no? Y es como si aquí hubiese un 0, o sea, como si estuvieses multiplicando por 20. Entonces, 6 por 0 sería 0, entonces se deja el 0 siempre. Esto son unidades, pues claro, se multiplica todo y se pone pues desde las unidades. Esto, como son decenas, pues se empieza desde las decenas. Se supone que aquí hay un 0. [Indicio de uso Formal].

I.- ¿Y si hubiese otra fila?

Ca.- Pues lo mismo. Si empiezas en las centenas, pues aquí hay dos 0. Entonces, se empezaría aquí y aquí hay dos 0... que no se suelen poner, se dejan huecos.

I.- Entiendo. ¿Y al final por qué se deben sumar las cifras en columnas para llegar al resultado? ¿Por qué se tiene que sumar al final?

Ca.- Pues, porque la fila de arriba es el resultado de multiplicar 3 por 146 y la fila de abajo es el resultado de multiplicar 146 por 2... o por 20.

I.- A ver, ¿por 2 o por 20?

Ca.- Pues eso ya... [Permanece en silencio]

I.- Entonces, ¿qué?

Ca.- Porque 146 por 3 da un resultado y 146 por 2 da otro resultado [contradictorio con la explicación dada sobre el hueco]. Entonces, luego hay que sumar los resultados

para saber el número... el único número verdadero, el de 146 por 23 que es lo que te están preguntando. ¿Comprendes la respuesta?

I.- Entiendo lo que dices, sí. Pero no me ha quedado claro esto de que multiplicas por 2, 146 por 2.

Ca.- 146 por 2... [Instantes de silencio] Entonces luego ya se suman los dos resultados que te han dado aquí, se suman, ¿no?, para que te dé el resultado final que sería 146 por 23. Porque así es más cómodo que hacerlo.... Es que del tirón no se podría, si no es con calculadora.

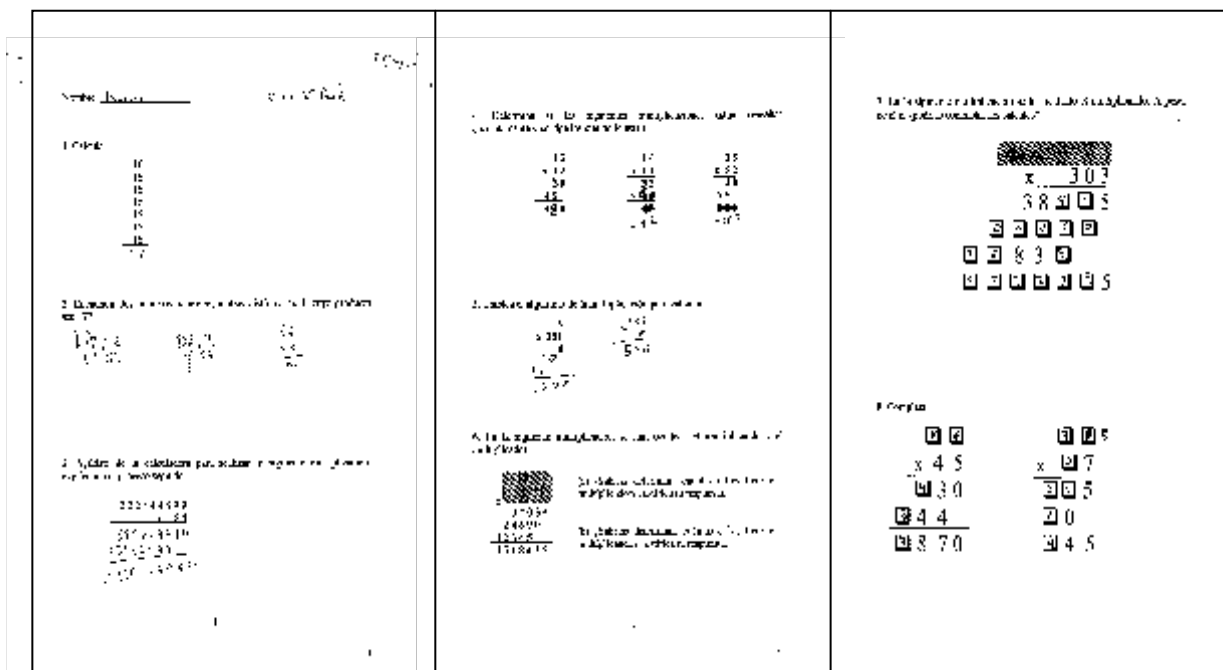
I.- ¿Y conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar? Es decir, ¿alguna propiedad matemática que justifique todo esto que me estás diciendo?

Ca.- Porque luego, el resultado final 3358 lo divides entre 23 y te da 146 o viceversa. Entonces se comprueba si los pasos que has dado están correctos.

I.- Bueno, pues ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9b

Mariano (1º Bachillerato) [21/05/2003]



Situación 1

Investigador.- ¿Cómo lo has hecho?

Mariano.- Pues he ido sumando de 15 en 15 y luego le he sumado lo... el que faltaba.

I.- Has ido sumando de 15 en 15.

Ma.- Claro. Le he quitado 1, entonces: 15, 30, 45, 60,... Ya está, luego le he sumado pues los 7 que faltaban.

I.- Entiendo. Bueno, ¿lo podrías haber hecho de otro modo?

Ma.- Pues como... se suele hacer normal. Pues sumando 6, 6, 6,...

I.- Entiendo lo que dices.

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

I.- *¿Entiendes la pregunta, no?*

Ma.- *Sí, hay que buscar dos números que...*

I.- *Dos números que multiplicados den 177.*

Ma.- *Sería... Espérate... Eso no sé hacerlo. [Tras 15'' aprox. en silencio] ¡Eso no sé hacerlo!*

I.- *¿No se te ocurre nada?*

Ma.- *No sé, una división para buscar los números.*

I.- *Una división... Puedes escribir aquí, ¿eh? Puedes hacer todas las cuentas que quieras.*

Ma.- *Ya, pero... [35'' de cálculos en silencio]. El 59 por 3.*

I.- *Y dime una cosa, Mariano: ¿lo podrías haber hecho de otra manera?*

Ma.- *Pues, no lo sé. Es esa la que se me ha ocurrido. He hecho esa...*

I.- *Esa es la que se te ha ocurrido. No se te ocurre otra, entonces.*

Ma.- [Asiente con la cabeza]

I.- *Bueno, pasamos a la siguiente.*

Utiliza de un modo técnico el algoritmo estándar escrito de la división. Se observa un uso Técnico del algoritmo estándar escrito del producto como procedimiento de prueba de la división, lo cual es otro problema. Por tanto:

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

I.- *Se trata de hacer esa multiplicación como quieras sólo que te puedes ayudar de la calculadora. Puedes utilizar la calculadora para hacerla.*

Ma.- *Pero eso es muy grande, ¿no? [Prueba a introducir en pantalla el multiplicando] ¡Me lo imaginaba!*

I.- *¿Qué?*

Ma.- *Me lo había imaginado que no cabían todos los números. [Tras permanecer 40'' pensando en silencio y sin escribir nada]. Espera, ¿así se podía hacer? Mira, multiplicas 4 por 999, luego 444 y luego 222. Luego coges éste [el 6], lo multiplicas y lo sumas.*

I.- *Bueno, tú lo haces como quieras. Ahí tienes espacio... Me dices qué estabas haciendo o qué vas a hacer, ¿qué?*

Ma.- *Voy a coger las tres cifras, ¿no? [el 999] y multiplicar por 4. Luego estas tres [el 444] por 4... y luego las mismas por 6 y luego sumarlas.*

I.- *Entiendo lo que dices.*

Ma.- *Pero es que no sé si se puede hacer.*

I.- *No sabes si se puede hacer.*

Ma.- *¡A ver si tampoco sale!... ¿Y si la hago sin calculadora?*

I.- *Como quieras. La puedes hacer sin calculadora, si quieres... se trata de hacer la multiplicación.*

Ma.- [El alumno emplea el algoritmo de un modo técnico para resolver la multiplicación. La operación le lleva 1' 15'' aprox., periodo en el que permanece en silencio].

I.- *De acuerdo. Entonces, con la calculadora no...*

Ma.- *Pues que no caben las cifras y no lo entiendo bien.*

I.- *Y no lo entiendes bien.*

Ma.- *¡Claro! No sé qué... operación realizar y todo eso.*
Respuesta de tipo 3a y 3b'

Situación 4

Ningún diálogo destacable. La producción escrita del alumno resulta suficiente para determinar con claridad lo realizado, en especial lo referido al empleo Técnico del algoritmo.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

Ma.- *¿Y no es más fácil hacer así? [Cambia la disposición de las cifras, situando el 251 como multiplicando y el 6 como multiplicador. Emplea el algoritmo de un modo Técnico con la nueva disposición de los números].*

I.- [Tras el cálculo] *A ver, lo que has hecho ha sido darle la vuelta.*

Ma.- *Para... ¡Es más fácil...!*

I.- *¿Aunque sea más fácil dándole la vuelta, serías capaz de hacer la multiplicación en esa disposición [la original]?*

Ma.- [Asiente con la cabeza afirmativamente y utiliza el algoritmo de forma Técnica con corrección, siendo 6 el multiplicando y 251 el multiplicador, tal como se observa en el registro escrito].

Respuesta de tipo 5b

Situación 6

Ma.- *¿El multiplicador es el de abajo, no?*

I.- *El multiplicador es el de abajo, sí.*

Ma.-... *Tres, ¿no?*

I.- *Tres.*

Ma.- *Porque hay tres... tres números de éstos.*

I.- *Porque hay tres...*

Ma.- *¡Pues tres filas de éstas! Como cada fila es un ese... es una cifra... ¿Lo pongo ahí?*

I.- *No, no es necesario ponerlo. O sea, tres porque...*

Ma.- *Hay tres filas.*

I.- *De acuerdo.*

Ma.- [Leyendo en voz alta] *¿sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicando? [Tras 15'' aprox. en silencio] Eso no se sabe, ¿no? [Instantes de silencio] Supuestamente tendría que ser de cinco pero... la última cifra como te puedes dejar dos, te puedes llevar y... se puede coger dos.*

I.- [Asiente por entender lo que dice el alumno]

Ma.- *Es cinco o cuatro.*

I.- *Cinco o cuatro... Por eso que me estás diciendo, ¿no?*

Ma.- *Claro.*

I.- *Entiendo.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

Ma.- *Esto daría 0... ¿no? [en referencia al 2º resultado parcial]. Por 0, entonces me da por lo que sea, por 0. Claro... [20'' aprox. de trabajo en silencio, donde el alumno logra detectar las cifras ocultas por los huecos]. ¿No?*

I.- *¿Cómo?*

Ma.- *Como están... si están aquí los números que faltan a éste.*

I.- *Que están ahí los números...*

Ma.- *Estos dos [el 8 y el 3 del 3º resultado parcial] son los que faltan aquí [en el 1º resultado parcial].*

I.- *El 8 y 3 son los que faltan arriba.*

Ma.- *Sí. Como es 3 también aquí, es el mismo 3... [comparación de las centenas y unidades del multiplicador].*

I.- *Entiendo.*

Respuesta de tipo 7b**Situación 8**

I.- [Una vez resuelta la primera MCCD y antes de pasar a la segunda]. *De acuerdo. ¿Cómo has determinado el 8? ¿Por qué has puesto ahí un 8?*

Ma.- *Porque he estado haciendo combinaciones [ejemplo de uso de relaciones entre partes no contiguas del algoritmo]. Porque me tenía que llevar 3 y 2, entonces necesitaba un número que diera 0, ¿no? Porque... para el 3 éste [decenas del 1º resultado parcial]. ¿Como me sobraban 3 [de las llevadas]! Y aquí [en el 2º resultado parcial] un número que acabara en 2 para sumarle los 2 [las llevadas de 4 por 6]... y da el 8: 32 y si le sumo 2, 34. Y éste le daba 40 [8 por 5]...*

I.- *Entiendo*

El registro escrito muestra que el alumno resolvió con éxito la tarea, las dos MCCD's, manifestándose por tanto indicios de empleo Analítico.

Tras la resolución de la 2ª MCCD no se estableció diálogo interesante alguno y se pasó directamente a la siguiente situación.

Respuesta de tipo 8c**Situación 9**

Ma.- [Entre dientes] *¿Qué sentido tienen las llevadas?... ¿Por qué hay que llevarse?*

I.- *¿Por qué hay que llevarse cuando uno multiplica?*

Ma.- *Porque... porque si no te dejas los números sueltos, te dejas cifras sueltas y... y no da.*

I.- *Porque te dejas cifras sueltas.*

Ma.- *¡Claro! Y entonces la multiplicación pues ya no daría porque... esto es como la suma, como si sumas 23 veces 146. Y si vas dejando números sueltos pues... números por ahí... no da, no da bien.*

I.- *Y por eso hay que llevarse.*

Ma.- *Claro, porque... [Permanece en silencio]*

I.- *¿Y por qué se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Es decir, ¿por qué se tiene que hacer 3 por 6, 3 por 4, 3 por 1 y después con la siguiente cifra lo mismo?*

Ma.- [Tras unos instantes de silencio] *No tengo ni idea. Porque... no lo sé.*

I.- *¿No se te ocurre ninguna explicación?*

Ma.- [Tras 20'' de silencio] *Por el mismo sentido de antes... Entonces te vas dejando números, si no multiplicas ése con ése y te lo dejas suelto, entonces es como si no lo sumaras las 23 veces. Es como si le sumaras pues 3 veces o 2. [Indicio de uso de la propiedad distributiva].*

I.- *Entiendo. ¿Y por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? O sea, tú multiplicas por 3 y el resultado se coloca aquí [en la fila correspondiente al resultado del primer producto parcial] y con las siguientes cifras se va colocando abajo, por filas. ¿Eso por qué es?*

Ma.- *Porque si a un número... Yo qué sé, será porque si es un número muy grande y lo vas poniendo todo debajo de otro, pues no daría el resultado que debería dar, ¿no? Daría de una cifra muy pequeña mientras que el número es muy grande. Vaya que... no sé, que esto daría 600 siendo así y eso en verdad no es, es 3000.*

Cada cifra hay que ponerla, situarla un poco... un espacio más adelante [En realidad, el alumno está proporcionando una justificación del hecho de ir desplazando los sucesivos resultados parciales un lugar hacia la izquierda].

I.- *Entiendo. Bueno, ¿entonces el hueco por qué hay que dejarlo? ¿Qué significado tiene ese hueco?*

Ma.- *El hueco... [Permanece unos 25'' en silencio]. Eso es una especie de... para que no se junte todo el número, para que no salga el número mal.*

I.- *Para que no salga el número mal.*

Ma.- *Es como cuando te llevas. Tienes que dejarte el hueco porque si no sale el número muy... sale junto y no sale el resultado verdadero.*

I.- *Cuando dices "sale junto", ¿a qué te refieres?*

Ma.- *Porque... pues si lo coges puesto aquí, así en tres filas, en las tres columnas, pues sale un número... A lo mejor tienes 23 cifras, por 23 números y te sale un número muy pequeño, te sale 23000 o por ahí, mientras que el numerador [se refiere al segundo factor que él supone de 23 cifras como ejemplo] te sale un número grande.*

I.- *Entiendo. Oye, ¿y al final por qué se tienen que sumar las cifras en columnas para llegar a un resultado?*

Ma.- [Instantes de silencio] *Porque como cada número se multiplica por cada... por la fila, ¿no?, luego al final pues cada número pues se suman los dos. Cada vez tienes que multiplicarlo por cada número, ¿no?, por cada número que hay, entonces tienes que sumarlo cada número.*

I.- *En este caso, ¿cómo quedaría?*

Ma.- *¡Yo es que...!*

I.- *Creo entender...*

Ma.- *Explicando.*

I.- *Creo entender lo que dices.*

Ma.- *Porque si no quedaría... si te quitas el resultado quedaría 438 y 292. Pero eso no te da nada. Te da como si hubieses multiplicado 146 por 3 y luego aparte 146 por 2. Por eso hay que sumarlo para obtener el resultado para el final. [Nuevo indicio de uso de la propiedad distributiva aunque no del sistema de numeración posicional].*

I.- *¿Y la última pregunta? ¿Conoces alguna propiedad matemática que se utilice en este método de multiplicar que justifique todos los pasos y todo esto que hemos estado comentando?*

Ma.- [Sonriendo] *¿Como no sea eso del orden de los factores no altera el producto! Pero que tampoco lo sé.*

I.- *Sí, sé lo que dices.*

Ma.- *Es que no lo sé...*

I.- *Pero entiendes la cuestión, ¿no? Una propiedad matemática que sirva para justificar esto, que se utilice aquí para justificar todo lo que me estás diciendo.*

Ma.- *Sí pero... eso sí que no tengo ni idea.*

I.- *Bueno, pues ya está Mariano. Ya hemos terminado.*

Respuesta de tipo 9b

Inés (1º Bachillerato) [22/05/2003]

Nombre: _____ Fecha: 22/05/03

1. Calcula

$$\begin{array}{r} 11 \\ 12 \\ 13 \\ -14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{array}$$

2. Encuentra los números naturales que dividan a 120 y que sean primos entre sí.

3. Encuentra los números naturales que dividan a 120 y que sean primos entre sí.

4. Calcula el D.C. de los números siguientes con sus respectivos signos y ponlos en su sitio.

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 12 \\ - 8 \\ + 4 \\ - 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ + 12 \\ - 8 \\ + 4 \\ - 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ + 12 \\ - 8 \\ + 4 \\ - 7 \end{array}$$

5. Escribe un número de tres cifras que sea divisible por 2, 3 y 5.

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 251 \\ - 253 \\ \hline 250 \end{array}$$

6. Escribe un número multiplicado por una decena de unidades que sea divisible por 2, 3 y 5.

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 251 \\ - 253 \\ \hline 270 \end{array}$$

7. Escribe un número que sea divisible por 2, 3 y 5.

8. Escribe un número que sea divisible por 2, 3 y 5.

9. La siguiente multiplicación de la unidad 4 está incorrecta. ¿Por qué? ¿Cómo se debería hacer?

$$\begin{array}{r} 38005 \\ \times 3000 \\ \hline 114015000 \end{array}$$

10. Encuentra los números naturales que dividan a 120 y que sean primos entre sí.

$$\begin{array}{r} 45 \\ + 30 \\ - 44 \\ \hline 870 \end{array} \quad \begin{array}{r} 77 \\ + 25 \\ - 80 \\ \hline 45 \end{array}$$

11. Encuentra los números naturales que dividan a 120 y que sean primos entre sí.

$$\begin{array}{r} 140 \\ + 30 \\ - 40 \\ \hline 130 \end{array}$$

12. Encuentra los números naturales que dividan a 120 y que sean primos entre sí.

13. Encuentra los números naturales que dividan a 120 y que sean primos entre sí.

14. Encuentra los números naturales que dividan a 120 y que sean primos entre sí.

15. Encuentra los números naturales que dividan a 120 y que sean primos entre sí.

Situación 1

Investigador.- *A ver, ¿ésta cómo la has hecho?*

Inés.- *Pues 6 por... 3, 4, 5, 6, y 7. 6 por 7, 42. Sumo éste y le sumo 4.*

I.- *Sumas los 1, ¿no?*

Inés.- *Claro y le sumo 4.*

I.- *¿Y lo podías haber hecho de otro modo?*

Inés.- *No sé, sumando 6 más 6 más 6.... O 16 por 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.*

I.- *O 16 por 7. Bueno, la siguiente.*

La alumna reconoce que la tarea podría resolverse multiplicando 16 por 7. Consideramos que establece un vínculo entre esta situación y un método para multiplicar que con seguridad sería el algoritmo estándar escrito del producto.

Respuesta de tipo 1b

Situación 2

Inés.- *¿Dos números naturales?*

I.- *O sea, no pueden tener decimales. [Transcurren unos 35'' de reflexión entre dientes]. Puedes hacer todas las cuentas que quieras, ¿vale?*

Inés.- *¡Es que yo para esto soy más tonta! Vamos a ver, si... por ejemplo... por 12, ¿qué me daría? [Utiliza el algoritmo estándar escrito para multiplicar 13 por 12. Transcurre aprox. 1' de reflexión en silencio con comentarios entre dientes imperceptibles]. ¿Cómo me podía dar 7?*

I.- *¿Cómo?*

Inés.- *¡¿Cómo me podía dar 7?!*

I.- *¿Qué estás intentando?*

Inés.- *Que me dé un 7.*

I.- *Que te dé un 7.*

Inés.- *Es que me da 6, buscando un número...*

I.- [Tras 45'' en silencio]. *¿En qué piensas ahora?*

Inés.- *En eso. Es que debía de ser un número más o menos de ésta... pero que me dé un 7, ¿no?*

I.- *Que te dé un 7.*

Inés.- [Tras unos 15'' en silencio]. *1 por 7, a ver si pillo 17. ¡Qué tonta! [Permanece en silencio 1' 10'' realizando diversas pruebas]. Madre mía, que ya estoy nerviosa y ya no lo sé.*

I.- *¿Cómo?*

Inés.- *Nada, que estoy nerviosa y...*

I.- *Ah, que estás nerviosa. Tranquila, mujer, tranquila.*

Inés.- *Y aparte que no sé.*

I.- *Sigues con la estrategia que me contabas, ¿no?*

Inés.- *No da 177. Entonces, necesito una... [De nuevo se mantiene en silencio y murmurando en ocasiones durante un 1' aprox.]. Es que si aquí pongo para que me dé un 6 y aquí para que me dé un 2, un 1... ¿Tienen que hacerse los dos productos?*

I.- *¿Cómo?*

Inés.- *Sólo es la multiplicación de dos, ¿no?*

I.- *Sí, son dos números que al multiplicarlos da 177.*

Inés.- *Pues si puedo pasar a otro.*

I.- *Sí, claro.*

En principio se observa un uso Técnico del algoritmo estándar escrito que evoluciona hacia un uso Analítico del mismo, aunque sin éxito.

Respuesta de tipo 2c

Situación 3

I.- *Se trata de hacer esta multiplicación y te puedes ayudar de la calculadora. Puedes utilizarla para lo que quieras para hacer esa multiplicación.*

Inés.- *Entonces haciéndola ya la pongo, ¿no? [Permanece en silencio 1' 10'']. Durante este tiempo prueba a introducir, sin éxito, las cifras del multiplicando en la calculadora. Decide entonces calcular los productos 999 por 64 y 444 por 64 y plantear la suma de los resultados]. Esto es una tontería, ¿verdad?*

I.- *¿Cómo? Dime, ¿qué estás haciendo?*

Inés.- *Si multiplico los tres 9 por el 64 y después lo sumo...*

I.- *¿Y después lo sumas con qué?*

Inés.- *Multiplico esto [999] por esto [64], eso [444] por eso [64] y eso [222] por eso [64] y lo sumo los resultados. Pero es una tontería, eso no da. ¿Da o no da?*

I.- *No sé. ¿Por qué dices que es una tontería?*

Inés.- *Porque no sé si está bien hecho eso. Multiplicado por el.... Es como si fuera... [escribe el producto 999 por 64 en columnas], ¿no? Y otra multiplicación... [escribe el producto 444 por 64 en columnas]. Me dan unos resultados... no sé. [Instantes en silencio]. No lo sé, yo creo que está mal eso.*

Si lo multiplico por 4... vamos a ver, primero por 4. [Comienza a emplear el algoritmo estándar escrito de forma Técnica para resolver la multiplicación. Transcurren 1' 40'' de silencio hasta completar el producto].

I.- *De acuerdo.*

Inés.- *A ver si me saldría bien así.*

Observamos la intención de descomponer la multiplicación en productos más simples utilizando para ello las propiedades que ofrece el sistema de numeración posicional y las operaciones aritméticas simples (suma y multiplicación). No obstante, la alumna no las aplica correctamente por no estar segura de ellas. Podemos afirmar, por tanto, que se manifiesta un indicio de uso Formal incorrecto del algoritmo.

En el empleo Técnico del algoritmo que hace la alumna comete un error al final del segundo producto parcial (omite una llevada).

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Ningún diálogo destacable. Resuelve con corrección la tarea identificando y corrigiendo los errores.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

Inés.- *¿Esto qué es? [en referencia al término algoritmo].*

I.- *El método que utilizamos para multiplicar normalmente. [Transcurren unos 15'' en silencio en los que la alumna invierte la disposición inicial de factores y emplea el algoritmo para multiplicar 251 por 6]. Aquí lo que has hecho ha sido darle la vuelta. ¿Pero podías haberlo hecho en esta disposición [la inicial]?*

Inés.- *Sí, lo mismo. Lo que pasa que ahora 1 por 6, 6. 5 por 6, 30... lo mismo.*
[Vuelve a aplicar el algoritmo para 251 por 6].

I.- *Lo mismo.*

Inés.- *Pero multiplicaría 1 por 6...*

I.- *Multiplicarías 1 por 6.*

Inés.- *5 por 6, 30, me llevo 3. 2 por 6, 12, 13, 14 y 15.*

I.- *Así tal cual. Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

La alumna no llega a aplicar el algoritmo estándar escrito en la disposición de cifras presentada. Su comprensión del algoritmo, en términos de empleo Técnico, se muestra limitada por este aspecto.

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

Inés.- *¿El multiplicador es el de abajo, no?*

I.- *Sí, el multiplicador es el de abajo.*

Inés.- [Leyendo la cuestión] *¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicador? Tendría... ¿cinco?... no tiene porqué. Cuatro.*

I.- *Dime, ¿el multiplicador cuántas cifras?*

Inés.- *Yo creo que cuatro.*

I.- *El multiplicador cuatro. ¿Por qué?*

Inés.- *Lo de siempre. Cuando vas multiplicando y siempre te llevas 1...*

I.- *¿Y si te llevas 1, cómo?*

Inés.- *Bueno, que vas multiplicando, ¿no?...*

I.- *Sí.*

Inés.- [Instantes en silencio] *Es que tampoco tiene porqué. Por qué si, por ejemplo, son números bajos, no tienes por qué añadirle otra, ¿entiendes? Por ejemplo, si multiplicas 6 por algo, 6 por 5, 30, pues pones el 30 al final. Pero si es un número bajo, 1 por 3, 3, debe haber cinco.*

¿Qué pongo cuatro o cinco? Sin son números bajos va a ir cinco pero si son números altos va a ver cuatro.

I.- *De acuerdo. ¿Y el multiplicando? ¿O de qué me estás hablando, a ver? ¿Y el de arriba?*

Inés.- *En el de arriba... [Tras 40'' de reflexión en silencio] Aunque no tiene porqué haber cuatro. En el de arriba es en el que tiene que haber cuatro. Entonces, lo que te he dicho aquí es el de arriba. Y si son números bajos, el de abajo... [instantes de silencio] es que abajo no tiene porqué haber... [Transcurren unos 25'']. Abajo, no sé.*

I.- [Tras otros 30'' de reflexión en silencio]. *¿En qué piensas ahora?*

Inés.- *Estoy comparando y es muy relativo. Puede ser.... Por ejemplo, aquí hay dos y dos y hay tres. Aquí hay tres y uno y hay cuatro [compara el número de cifras de los factores con el del resultado que aparece en las multiplicaciones de las dos situaciones anteriores]. Entonces, yo de arriba sí creo que tiene que haber unos 4. Porque para multiplicar un número.... Pues si arriba digo que hay cuatro abajo tiene que haber uno. Claro, si arriba digo que hay cuatro abajo tiene que haber uno. ¡Ay! ¡Qué tonta, abajo hay tres!*

I.- *¿Por qué? ¿Ahora por qué dices tres?*

Inés.- *Que estoy viendo la multiplicación, pues claro. Claro, abajo hay tres y arriba hay cuatro.*

I.- *Y arriba cuatro.*

Inés.- *Qué tonta, es que me pongo nerviosa.*

I.- *Tú tranquila.*

Inés.- *No, porque estaba haciendo la multiplicación y digo: pues claro, pues si hay tres cuando me he puesto a hacerla.*

I.- *¿Y por qué hay tres?*

Inés.- *Tú multiplicas uno y lo pones en esta fila. Multiplicas otro, en esa fila,....*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

I.- *Se trata de encontrar las cifras que hay en cada uno de estos huecos, lo que pasa es que se ha ocultado el multiplicando. A pesar de ello, ¿podrías completar los huecos?*

Inés.- *Es que si no te pone nada aquí, nada aquí, nada aquí [en referencia a las cifras del multiplicando], ¿qué pones aquí? Puedo poner el número lo que yo quiera, ¿no? [Instantes en silencio]. Me tiene que salir un 3. 3 por 1, 3 y 1, 4, entonces el 15 no es. [Reflexiona conjuntamente con el primer y tercer producto parcial. Transcurren 15'' en silencio]. Tiene que ser el 5. Otro número no hay que te dé 5. [Otros 15'' de silencio]. Tiene que ser el 5 pero al llevarme 1 ya no me puede dar.... 3 por 5, 15, me llevo 1... no puede ser [parece que mantiene la posibilidad de 1 decena para el multiplicando]. Es que en la tabla del 3 no hay ningún número que te dé 5. Bueno, menos el 15 pero me refiero que acabe en 5. [Tras 20'' en silencio]. Me da 5 pero luego aquí 3 por 5, 15, te llevas 1. 3 por 1, 3, me tengo que llevar 1 y ya serían 4. Entonces aquí el 5 no sería. [Mantiene la idea de 1 decena en el multiplicando].*

I.- [Después de 30'' en silencio]. *Entonces, ¿qué pasa? ¿No puedes completar ningún hueco?*

Inés.- *Pero si es que para que me dé ahí un 5 tiene que ser 3 por 5, 15. Y me llevo 1. Entonces ya miro aquí [tercer producto parcial], al llevarme 1, lo mínimo para que me dé un 3 sería un 1. 3 por 1, 3, como me llevaba 1,...*

I.- *Entiendo lo que dices.*

Inés.- *¿Entonces qué hago! ¿Esto se puede hacer?*

I.- *¿Cómo?*

Inés.- *Me refiero a que sí se puede hacer, ¿no?*

I.- *Se puede hacer. Sí se puede hacer, claro. Aquí puedes encontrar unas cifras para los huecos.*

Inés.- [Permanece aprox. 50'' en silencio]. *Es que yo como creo que lo estoy haciendo bien pues ya me he encabezonado en eso...*

I.- *Ya, ya.*

Inés.- *... y ya no encuentro otra manera. Luego a lo mejor es una tontería, igual que la otra, pero ahora no la encuentro.*

I.- *Bueno, si quieres pasa a la siguiente.*

La alumna se muestra condicionada por las cifras del multiplicando. Observamos dependencia en el orden de la secuencia algorítmica, lo que impide flexibilizar las acciones sobre la multiplicación. En esta situación no manifiesta de forma clara un uso Analítico del algoritmo.

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

I.- [Tras la resolución de la primera MCCD]. *¿Cómo la has hecho?*

Inés.- Los números que acaban más en 0 es el 5 por 6, 30. Entonces lo he hecho con el 4: 6 por 4, 24, aquí sería que me llevaba 2. Falta buscar un número que me dé un 2. Entonces he buscado y me da 32. También podía utilizar el 12, o sea, el 6, pero es que si utilizaba el 6...no daba aquí... 3 por 4, 12.

Inés.- [Transcurren 2' en silencio hasta que la alumna logra completar la segunda MCCD].

En la resolución de la primera MCCD, aunque la alumna no haya seguido el recorrido pensado de antemano, manifiesta sin embargo indicios de haber usado el algoritmo de un modo Analítico, tal como éste es definido. Igual sucede en la segunda MCCD: el empleo Analítico es el que le posibilita completar los huecos.

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

Inés.- ¿Por qué hay que llevarse? Por ejemplo, si pongo 18, me llevo 1.

I.- ¿Eso por qué?

Inés.- No sé, porque como... como no da un número exacto, sino que da un número de dos cifras, pues se la sumas a la siguiente. ¡Ah!, porque como esto son unidades y décimas, ¿no? Por ejemplo 18, las unidades, las... espérate, ¿cómo eran? ¿Unidades? ¿Decimales?

I.- ¿Cómo se llamaba eso?

Inés.- Las centésimas.

I.- Centenas y decenas.

Inés.- Eso, las centenas y las decenas. O sea, unidades, las decenas y las centenas, ¿no? Pues como te da 18, esto ya no son unidades, ya son decenas, pues se lo tienes que sumar a las decenas. Entonces te la llevas para sumárselas. [Indicio de uso Formal].

I.- Entiendo. ¿Y por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? ¿El 3 por el 6, por el 4 y por el 1 y después...?

Inés.- Pues, si lo estás haciendo por 23... [se queda en silencio unos instantes].

I.- ¿Cómo?

Inés.- Que si lo estás haciendo por 23, pues yo que sé, primero con el 3 y después con el 2. [Unos 15'' en silencio]. No encuentro un porqué. Será porque como no puedes multiplicar el 23 a la vez, ¿no?, y además... pues ya el 3 multiplicarlo por todo, pillas el 2, multiplicarlo por todo y lo sumas el resultado. [Propiedad distributiva].

[Instantes de silencio]. Pero si es lo que digo yo, tendrían que sumarse todos juntos y no éste más para allá, más para allá. Nunca había pensado eso. Me han enseñado así... pero yo creo que es por eso. Como no se puede hacer por 23, pues primero por el 3, después por el 2.... [Leve indicio de uso Formal].

Y esto se correrá por lo que he dicho yo antes. Las decenas, centenas...

I.- ¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas?

Inés.- Eso es lo que estaba diciendo yo, que como.... Será por eso, porque esto son las decenas, pues se ponen ya debajo de las decenas para sumarlo. Centenas debajo de las centenas.

[Permanece en silencio unos instantes leyendo la cuestión (d)] ¿Este hueco? Es lo mismo que esto, ¿no?

I.- Dime.

Inés.- Por eso, porque como.... Éstas las unidades, éstas las decenas, ¿no? Pues se van colocando al principio de cada.... Si éstas son las decenas, pues al principio de las

decenas. Vienen aquí decenas, centenas al principio de centenas. [Indicio de uso Formal].

[Leyendo la quinta cuestión] *¿Por qué se deben sumar las cifras en columnas? Pues como aquí es de 3, el resultado del 23 pues se suman el resultado de todo.*

I.- *El resultado de todo.*

Inés.- *Lo que pasa que se va sumando así. Que aquí ya no cuentan las decenas y las centenas, es del 23.*

I.- *¿Y conoces alguna propiedad matemática que se utilice para justificar este procedimiento?*

Inés.- *¿Que está bien hecho?*

I.- *Bueno, que está bien hecho.... Para justificar todos los pasos que uno da, todo esto que me acabas de decir. El porqué hay que situarlos de esta forma, en filas, dejando un hueco,...*

Inés.- *¿Que si conozco alguna propiedad? [Tras unos 20'' en silencio]. Pues eso de las centenas con las centenas, las decenas con las decenas, ¿o no tiene nada que ver?*

I.- *No sé. ¿Qué opinas tú? ¿Cómo has dicho?*

Inés.- *Nada, como me has dicho que si conoces alguna propiedad, pues yo la que te he dicho: las centenas con las centenas.... [Indicio cercano a lo Formal]. No lo sé. Pues, por ejemplo, eso de que la suma es conmutativa, que se puede sumar... ¿eso es una propiedad a la que te refieres tú? Pero con la multiplicación.*

I.- *¿Cómo?*

Inés.- *Pues que da lo mismo sumarla al revés. Que da lo mismo sumar 5 coma 6 que 6 más 2.*

I.- *Ya.*

Inés.- *¿Ésa es la propiedad a la que te refieres? ¿A esa clase de propiedades te refieres?*

I.- *Bueno, sí, a esa clase de propiedades. En fin, ya hemos terminado.*

Se observan claras manifestaciones de empleo Formal del algoritmo con justificaciones que incluyen terminología matemática y mención de propiedades del sistema de numeración posicional. Por ello, consideramos una:

Respuesta de tipo 9c

Tomás (1º Bachillerato) [22/05/2003]

The image displays three panels of handwritten mathematical work. The first panel shows a grid of numbers arranged in rows and columns, with some numbers circled. The second panel shows a large number 3845 written in a grid-like format, with some numbers circled. The third panel shows a large number 3845 written in a grid-like format, with some numbers circled. The work includes various mathematical notations and diagrams, such as a grid of numbers and a large number 3845.

Situación 1

Tomás.- *¿Aquí puedo hacer lo que yo quiera, no?*

Investigador.- *Sí, claro. Puedes escribir lo que quieras y puedes hacerlo como quieras.*

Tras esto, el alumno decide emplear el algoritmo de un modo Técnico para obtener el resultado de la suma, tal como se observa en el registro escrito. No hubo ningún diálogo destacable y se pasó directamente a la siguiente situación problemática.

Respuesta de tipo 1b**Situación 2**

To.- [Tras permanecer en silencio durante 1' aprox. tratando de resolver la tarea].
¡Esto no se puede!

I.- *¿Cómo?*

To.- *No se puede.*

I.- *No se puede. ¿Por qué dices que no se puede?*

To.- *Pues porque no... bueno, entre 1 o entre 2, ¿no?*

I.- *Ah bueno, por lo menos entre 2 no...*

To.- [Continúa en silencio probando dividir entre 3; tarda un 1' 15'' aprox. en hallar la solución correcta al problema]

I.- *Perdona Tomás, lo has hecho dividiendo...*

To.- *Sí. [Uso del algoritmo estándar escrito de la división].*

I.- *¿Y lo podías haber hecho de otro modo?*

To.- *Sí, pero... ahora mismo no... no veo yo ningún otro.*

I.- *No ves ningún otro. O sea, dividiendo y ya está. No se te ocurre otra forma así...*

To.- *Ahora mismo, no.*

I.- *Bueno, continúa si quieres.*

To.- *Bueno, hubiese sido... he sumado los tres números de 177 y me da 15, que es múltiplo de 3. [Empleo del criterio de divisibilidad por 3].*

I.- *A ver, perdón.*

To.- *He sumado, 7, 7 y 1. Me da 15 que es múltiplo de 3.*

I.- *Entiendo, por eso...*

To.- *Por eso me he quedado pensando un ratillo y después he puesto 3.*

I.- *De acuerdo, entiendo. [Se pasa a la siguiente situación]*

Respuesta de tipo 2a**Situación 3**

I.- *Mira Tomás, aquí te voy a dejar una calculadora y se trata de hacer esta multiplicación. Para ello puedes utilizar la calculadora. Tú ya lo haces como quieras.*

To.- [Intenta introducir todas las cifras del multiplicando en la pantalla de la calculadora]. *Era con la calculadora.*

I.- *Sí bueno, puedes utilizarla. Tú la utilizas como quieras.*

To.- *¡Como todos los números no caben! [En seguida comienza a emplear el algoritmo estándar escrito de forma Técnica para obtener el resultado de la multiplicación. Interesa subrayar que este uso resulta incorrecto].*

I.- [Una vez que el alumno ha finalizado el cálculo]. *De acuerdo, ¿entonces la calculadora qué?*

- To.-** *Que como no caben todos los números pues no he podido usarla.*
- I.-** *No has podido usarla.*
- To.-** *Bueno, podría haberla usado pero tardaría más tiempo.*
- I.-** *A ver, cómo. ¿Por qué dices que tardarías más tiempo?*
- To.-** *Vamos a ver. Pues así.*
- I.-** *¿Cómo utilizarías la calculadora?*
- To.-** *Pues descomponiéndolo y después.... Lo divido entre 10, por ejemplo, y después lo voy multiplicando.*
- I.-** *Lo divides entre 10.*
- To.-** *Entre... [fragmento ininteligible] diez, diez,...*
- I.-** *¿Pero qué divides?*
- To.-** *Por ejemplo, 2 ocho números. El doscientos millones, sólo, tendría que dividirlo entre 10 para que cupiera y después lo que me dé al multiplicarlo por 64, pues multiplicarlo por 10. Pero tardaría más tiempo.*
- I.-** *Tardarías más tiempo. Pero aún así, me podrías hacer un poco.... ¿Cómo sería? Es que no entiendo bien cómo sería.*
- To.-** *Empezaría cogiendo número a número: un 9 por 64, después un 90, después 900, 4000... y multiplicando.*
- I.-** *¿Y después cuando lo hagas con todos? Es decir, me estás diciendo 64 por 9, después 64 por 90, 64 por 900,...*
- To.-** *Sí.*
- I.-** *¿Y después?*
- To.-** *[Comienza a utilizar la calculadora; instantes de silencio]. Pues no, así como yo digo no. Te daría... no sé.*
- I.-** *[Ante un nuevo silencio del alumno, esta vez sin acción alguna, se decide pasar a la siguiente tarea]. Bueno, pasamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 3b y 3a'

Situación 4

No se llegó a establecer ningún diálogo relevante tras la resolución de la tarea. Tan sólo destacamos el hecho de que el alumno no llegó a identificar el error incluido en la tercera multiplicación.

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

- To.-** *¿Qué hay que hacer aquí?*
- I.-** *De lo que se trata es de realizar esta multiplicación con el método que conocemos y que acabas de emplear hace un momento.*
- To.-** *¿Yo puedo cambiar el orden de los factores?*
- I.-** *Sí, puedes hacer lo que quieras.*
- To.-** *[Realiza la multiplicación con el orden de los factores cambiado; obtiene el resultado correcto]*
- I.-** *[Una vez realizado ese cálculo]. Perdona un momento, has cambiado el orden de los factores. Pero, ¿podías haber hecho la multiplicación en la disposición original, aunque hayas decidido cambiar el orden de los factores?*
- To.-** *Sí.*
- I.-** *¿Cómo sería?*

To.- [Aplica el algoritmo correctamente de forma Técnica en la disposición inicial de factores].

Respuesta de tipo 5b

Situación 6

To.- [Tras leer el enunciado]. *Pues el multiplicador tiene tres porque... tres cifras porque hay... se han hecho tres multiplicaciones distintas.*

Y el multiplicando pues, en teoría, cinco o cuatro porque hay cinco cifras.

I.- *Cinco o cuatro porque hay cinco cifras.*

To.- *Claro.*

I.- *¿Y cuatro, entonces, por qué?*

To.- *Porque puede ser que la... que cuatro hayan salido de aquí, del 37, 24 o el 12.*

I.- *Entiendo lo que quieres decir. Bueno, pasamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

I.- *Entiendes el ejercicio, ¿no? Se trata de encontrar las cifras que hay ocultas, que faltan en los huecos. Lo que sucede es que se ha ocultado el multiplicando. Pero a pesar de ello, ¿podrías completar esos cálculos?*

To.- [Tras unos 20'' de reflexión en silencio]. *Y esto es todo cero* [en referencia a las cifras del 2º resultado parcial].

[De un modo directo, en unos 45'' y sin aparente dificultad, el alumno determina correctamente el resto de cifras ocultas correspondientes a los huecos].

I.- *De acuerdo, ¿tienes algo que decir o no?*

To.- *No.*

I.- *Pasamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

Ningún diálogo destacable. El alumno estuvo trabajando en completo silencio durante la resolución. Conviene señalar que la primera MCCD fue resuelta con decisión aunque de manera incorrecta siguiendo un procedimiento Técnico. El alumno no llegó a percatarse del error cometido.

La segunda MCCD, en cambio, obtuvo una respuesta correcta.

En ningún momento, el estudiante manifestó indicios de estar ante una tarea de dificultad.

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

To.- [Tras leer la primera parte del enunciado y la primera pregunta]. *¿Qué quiere decir la primera pregunta?*

I.- *Si te parece vamos a ir recorriendo todas las preguntas. La primera dice: ¿qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse cuando uno multiplica?*

To.- *Pues para sumar las... hombre, si en las unidades tienes diez unidades, sería una decena, habría que llevarte una decena. Al grupo de las decenas. [Indicio de uso Formal].*

I.- ¿Para?

To.- Al grupo de las decenas, a la fila de las decenas.

I.- Al grupo de las decenas. Por eso aquí, por ejemplo, en el 3 por 6...

To.- Pues esto llevaría una decena. [Instantes de silencio]. Por si tienes... se te da 18, pero aquí sólo puedes poner las unidades. Entonces la decena que sobra pues la llevas.

I.- Entiendo lo que quieres decir. Oye, ¿y por qué se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? En este caso, el 3 por el 6, el 3 por el 4, el 3 por el 1 y después lo mismo pero con la siguiente cifra.

To.- Pues... [Permanece en silencio durante unos instantes] porque es más fácil.

I.- Porque es más fácil.

To.- Creo yo.

I.- ¿Por qué dices que es más fácil?

To.- Porque sería muy difícil multiplicar todo el número por uno.

I.- Todo el número por uno. ¿Cómo por uno?

To.- No, por ejemplo por el 3.

I.- Esto último no me ha quedado claro.

To.- ¡Es que yo tampoco...! [Indicio de uso No-Formal].

I.- Dime, dime.

To.- Que tampoco lo entiendo mucho porqué se hace eso.

I.- Pues... ¿y lo de los resultados? ¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? Es decir, tú multiplicas por 3: 3 por 146 y el resultado se va colocando aquí [en el espacio correspondiente al 1^{er} resultado parcial]. Posteriormente los otros resultados se van colocando en filas, uno debajo de otro. ¿Eso por qué es?

To.- Para después sumarlos.

I.- Para después sumarlos.

To.- Claro para averiguar las unidades... del total.

I.- Para averiguar...

To.- Sí porque aquí cada número... cada resultado de esto [resultados parciales] es un número sólo.

I.- Dime una cosa, ¿y lo del hueco qué significa? ¿Por qué se deja un hueco en esta fila [la segunda, correspondiente al 2^o resultado parcial]?

To.- Pues... porque aquí, por ejemplo, el 2 sería 20; no sería una unidad.

I.- Serían 20. ¿Y?

To.- Hombre, por lo cual no puedes empezar poniendo unidades.

I.- ¿Y por eso se deja un hueco?

To.- ¡Creo que sí! [Indicio de uso Formal].

I.- Si hubiese, por ejemplo, otra cifra a la izquierda del 2...

To.- Pues habría que dejar otro hueco debajo.

I.- Habría que dejar otro hueco.

To.- Claro.

I.- ¿Y eso por qué sería en ese caso?

To.- Porque la cifra a la izquierda del 2 no sería una decena, sería una centena, con lo cual no puedes ponerla en las decenas.

I.- Entiendo lo que dices. ¿Y por qué se tienen que sumar al final todas estas cifras [la de los resultados parciales] en columnas para obtener el resultado? ¿Por qué se tienen que sumar al final las cifras?

To.- Eso para averiguar el resultado total de la multiplicación.

I.- Para averiguar el resultado total...

To.- De la multiplicación.

I.- Sí, ¿pero por qué hay que sumar para llegar al resultado?

To.- Porque así, sin sumar sólo tienes los resultados de cada número: del 3 y del 20.

I.- Del 3 y del 20.

To.- Donde tendría que ir el hueco tendría que ir un cero.

I.- ¿Cómo?

To.- Que aquí en el hueco tendría que ir un cero.

I.- En el hueco tendría que ir un cero. ¿Entonces qué es lo que tienes?

To.- Porque 146 por 3 es 438 y 146 por 20 es 2920.

I.- Entiendo. Y al final hay que sumarlas...

To.- Hay que sumarlos los dos.

I.- Para que salga...

To.- El resultado de 23.

I.- Para que salga el resultado de 23.

Oye Tomás, ¿conoces alguna propiedad matemática que se utilice para justificar este método que solemos utilizar para multiplicar?

To.- Pues sí, lo conocía pero no me acuerdo.

I.- Las sabrías describir, al menos. Aunque no sea el nombre, sabrías describir alguna propiedad que permita justificar todo esto que me acabas de decir en los apartados anteriores.

To.- Me parece que es el resultado entre el multiplicando.

I.- El resultado...

To.- Entre el multiplicando para que te dé el multiplicador.

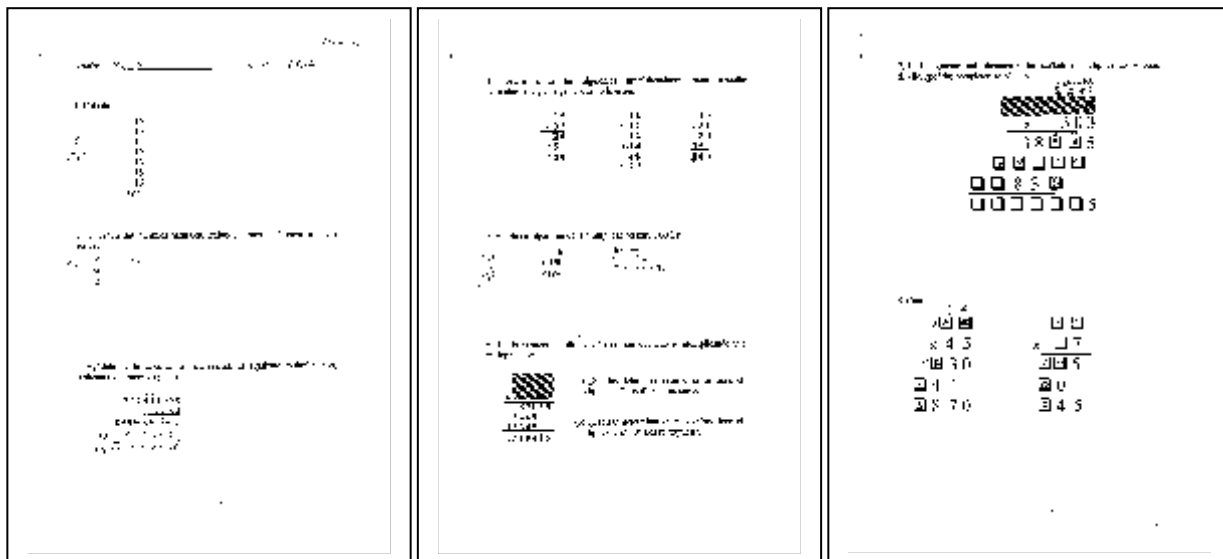
I.- ¿Y alguna otra?

To.- No.

I.- Bueno, pues ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9c

David (1º Bach) [26/05/2003]



Situación 1

No llega a establecerse ningún diálogo pues el alumno emplea directamente el algoritmo estándar escrito del producto para resolver la suma.

Respuesta de tipo 1b**Situación 2**

David.- *Esto no me acuerdo.*

Investigador.- *Que no te acuerdas. Se trata de encontrar dos números naturales, o sea sin decimales, sin coma, que al multiplicarlos dé 177. [Transcurren unos 55'', en los que el alumno permanece en silencio]. ¿No se te ocurre nada sobre cómo hacerlo?*

Da.- *¿Tendrán que ser dos multiplicados por sí mismo?*

I.- *No, no. Tienen que ser dos números que al multiplicarse entre sí dé 177. ¿Qué es lo que estabas pensando?*

Da.- [Tras 40'' aprox. en silencio]. *Aquí que dé 7.*

I.- *¿Cómo?*

Da.- *Que dé 7 aquí [se manifiesta un indicio de empleo analítico del algoritmo].*

I.- *Que dé 7. [Transcurren otros 40'' en silencio]. A ver, ¿qué estás intentando?*

Da.- *Encontrar un número que multiplicado pues acabe aquí en 7.*

I.- [Instantes de silencio] *¿Y no se te ocurre ninguno?*

Da.- [Permanece en silencio otros 2' intentando la tarea, aunque sin éxito alguno].

No me sale.

I.- *No te sale. Pero estabas intentando...*

Da.- *Aquí me sale 3 y 7 pero luego el otro que me queda no me sale.*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a otra.*

Respuesta de tipo 2c**Situación 3**

I.- *Se trata de hacer la multiplicación ésta utilizando la calculadora, es decir, puedes utilizar la calculadora para hacerla, si quieres.*

Da.- [Transcurren 40'' en silencio en los que intenta introducir las cifras del multiplicando en la pantalla de la calculadora. En concreto, multiplica 22244499 por 4 y anota el resultado como 1^{er} resultado parcial, sin percatarse aún de que el multiplicando no cabe al completo. Seguidamente, intenta multiplicar con calculadora 222444999 por 6 pero ahora detecta que las 9 unidades no caben]. *Falta una cifra, ¿no? Falta una cifra.*

I.- *No cabe todo el número. [El alumno decide dejar la calculadora para emplear el algoritmo de un modo técnico; permanece en silencio durante aprox. 2' 50'' hasta obtener un resultado que es incorrecto, esto es, aplica mal el algoritmo]. De acuerdo, ¿entonces la calculadora para qué la has utilizado?*

Da.- *Para 9 por 6, esto, no me acordaba.*

I.- *¿Para?*

Da.- *9 por 6.*

I.- *Que no te acordabas. ¿Y no la podías haber utilizado de otro modo para hacer la multiplicación? [El alumno realiza algunos intentos con la calculadora en silencio durante un 1' aprox.] ¿No se te ocurre? ¿Qué estabas intentando ahí, en la calculadora?*

Da.- *Pues poniéndola así en tres, a lo mejor.* [Llega a intuir que la calculadora se podría haber usado como ayuda para multiplicar 4 por 999, 4 por 444, etc. De hecho, realiza alguna de estas comprobaciones pero desiste de inmediato].

I.- *¿De tres en tres o cómo?*

Da.- *Sí.* [Permanece en silencio].

I.- *Bueno, pasamos a otra.*

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Ningún diálogo destacado. Se observa mediante el registro escrito que el alumno identifica los errores incluidos en las tres multiplicaciones y los corrige empleando correctamente el algoritmo de forma técnica.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

Da.- [En referencia al término *algoritmo*] *¿Qué es esto que pone aquí?*

I.- *El método que utilizamos para multiplicar normalmente.* [Transcurren unos 20'' en silencio hasta que el alumno obtiene el resultado]. *Fíjate que tú lo que has hecho ha sido darle la vuelta a las cifras. ¿Pero podías haber multiplicado con las cifras dispuestas de esa manera, el 6 arriba y el 251 abajo, aunque no sea muy usual?*

Da.- *Sí.*

I.- *¿Cómo sería si multiplicas de esa manera?*

Da.- *Pues, 6 por 1, 6; 6 por 5, 30; 6 por 2, 12, aquí.*

I.- *¿Cómo sería?*

Da.- *Pues, éste [6] por éste [1].*

I.- *6 por 1. Sí, pero si quieres...*

Da.- *¿Lo escribo?*

I.- *Sí, ponlo ahí...* [Tras 20''] *A ver, ¿qué has multiplicado?*

Da.- *6 por 1, 6; 6 por 5, 30; 6 por 2, 12 más 3 que te llevas...*

I.- *Tú pones 6 por 1, 6. Me dices, 6 por 5, 30. ¿Dónde colocas el 30?*

Da.- *Pues aquí. Luego me llevo 3: 6 por 2, 12 y 3, 15.*

El alumno se ve influenciado por la disposición en columnas, no-estándar, de los factores. En tal disposición no llega a aplicar el algoritmo sino otro procedimiento diferente.

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

Da.- [Tras leer el enunciado] *Cinco.*

I.- *Cinco. ¿El multiplicador o el multiplicando? Multiplicador es el de abajo y multiplicando el de arriba.*

Da.- *Bueno, éste cuatro, el de abajo cuatro.*

I.- *El de abajo cuatro cifras.*

Da.- *Sí. ¿Lo escribo?*

I.- *No es necesario. ¿Y por qué?*

Da.- *Porque multiplicando este número no da... [permanece en silencio unos instantes]. Sí, cuatro porque el número que acabas de multiplicar no puede dar 37, 24, 12,..., ¿no?*

I.- *Creo entender lo que dices.*

Da.- *Un número aquí que acabe [dígito más significativo del multiplicador] multiplicándolo por uno de arriba no puede dar esto.*

I.- *37, ¿no?*

Da.- *24,12,...*

I.- *Entiendo. ¿Y el multiplicando cuántas cifras tendrá?*

Da.- [Instantes de silencio] *Yo creo que cinco. [Se vuelve a quedar en silencio].*

I.- *¿Cinco por qué?*

Da.- [Tras unos 20'' meditando en silencio] *El de arriba no lo sé. [Otros 15'' de silencio]. Yo creo que también cuatro.*

I.- *Cuatro también. ¿Y por qué razón?*

Da.- *Es que no lo sé, por eso no.... ¡Ah, cinco aquí!, cinco cifras. Digo yo.*

I.- *Dices tú. Bueno, ¿entonces en qué quedamos?*

Da.- *En cuatro las dos.*

I.- *Cuatro las dos.*

Da.- *¿Lo escribo?*

I.- *No, no es necesario. Pasamos a la siguiente, ¿vale?*

Respuesta de tipo 6a

Situación 7

I.- *Se trata de encontrar las cifras de los huecos, lo que sucede es que ha ocultado el multiplicando.*

Da.- *¿Escribo el de arriba?*

I.- *Puedes hacerlo como quieras.*

Da.- [Tras un instante de silencio] *¡Pero entonces me lo puedo inventar, ¿no?! Porque si éste está libre [el multiplicando], estos dos puedo poner aquí el que sea [cifras desconocidas del 1^{er} resultado parcial].*

I.- *No sé. Se trata de completar los cálculos, los huecos éstos, a pesar de que se haya escondido...*

Da.- *¡Ah!, ¿por aquí arriba no puedo escribir nada?*

I.- *No, tú lo puedes hacer como quieras.*

Da.- [Transcurre 1' aprox., en el que el alumno intenta en silencio determinar las cifras del multiplicando como vía para completar los huecos restantes]. *Es que me falta aquí uno. Falta un número aquí [en principio propone un multiplicando de cuatro cifras].*

I.- *Te falta un número al multiplicar por 0.*

Da.- *¿Qué?*

I.- *Que te falta un número al multiplicar por 0.*

Da.- *Sí. [Transcurren en silencio 1' 50'' de nuevos intentos centrados en la determinación de las cifras del multiplicando]. Éste no me sale.*

I.- *No te sale. ¿Y por qué?*

Da.- *Porque cuando llego aquí, al último, me da 5 por 3, 15. Aquí sí, éste, pero éste no.*

I.- *Que el 3 no te cuadra.*

Da.- [Asiente].

I.- *¿Entonces?*

Da.- *Y si lo cambio, éste [la propuesta de 6 como centena del multiplicando], lo tengo que cambiarlo todo.*

I.- *¿Si cambias, cuál?*

Da.- *El 6. Entonces aquí arriba ya no me da [en referencia al 1^{er} resultado parcial].*

I.- [El alumno continúa insistiendo sin comentar nada. Transcurren otros 2' aprox.] *¿Y ahora qué estabas intentando?*

Da.- *Pues, corregir lo que hay. [Tras unos 40'' más]. ¿Que no me sale!*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

Como se observa en el registro escrito, esta situación no llega a ser resuelta aunque el alumno fue capaz de completar huecos y obtener cifras del multiplicando empleando conjuntamente información de partes no contiguas del algoritmo. Por tanto:

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

I.- [Una vez resuelta la primera MCCD y antes de pasar a la segunda] *Aquí un 8, un 6 y un 4.*

Da.- *Sí.*

I.- *¿Y éste 4?*

Da.- *6 por 5, 30; 8 por 5, 40 y 3, 43. Este 4 y este 4 tienen que dar 8.*

No se produjo ningún diálogo más. En cortos espacios de reflexión el alumno fue capaz de establecer relaciones no-usuales entre los pasos que componen el algoritmo estándar escrito del producto.

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

Da.- *¿Lo tengo que escribir o te lo voy diciendo?*

I.- *No, me lo vas diciendo. Vamos a ir contestando una por una, si te parece.*

Da.- [Tras leer la primera cuestión] *¿Esto qué quiere decir: qué sentido tienen las llevadas?*

I.- *Eso, ¿por qué hay llevarse cuando uno multiplica? En este caso: 3 por 6, 18. ¿Por qué hay que llevarse 1?*

Da.- *Pues, porque te sobra un número. Un número que te sobra tienes que llevárselo al siguiente. Cuando tiene dos cifras el número que te da no las puedes poner, entonces la primera cifra del... Por ejemplo, si te da 18, pues el 1 se lo tienes que elevar al siguiente. Entonces, lo que te dé se lo sumas, el 1 eso.*

I.- *¿Y por qué hay que llevárselo entonces?*

Da.- *Pues, porque te da dos cifras y no puedes ir poniendo dos cifras y dos cifras. Pones una y luego la que te sobre te la llevas arriba [indicio no-Formal].*

I.- *Entiendo. ¿Y por qué se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?*

Da.- *Pues, porque si no, no sería una multiplicación.*

I.- *Porque si no, no sería una multiplicación.*

Da.- *Claro.*

I.- *Es decir, ¿por qué hay que multiplicar 3 por 6, 3 por 4, 3 por 1 y después hacer lo mismo con la otra cifra?*

Da.- Porque la multiplicación es así.

I.- La multiplicación es así.

Da.- Y tienes que ir en orden. No te puedes saltar números porque si no, no te da bien. Tienes que ir con cada cifra multiplicando los números y así [no-Formal].

I.- ¿Y por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo de otro? Es decir, tú multiplicas por 3 y el resultado se va poniendo aquí, en la primera fila. Haces lo mismo con la otra cifra y lo vas poniendo en la segunda fila y así sucesivamente. ¿Por qué se colocan en filas?

Da.- ¿Pero cómo en filas?

I.- Sí, esos resultados. Tú coges 3 por 146 y el resultado lo pones aquí [primera fila]. Haces lo mismo con la siguiente cifra y lo pones aquí [segunda fila] y así sucesivamente.

Da.- Pues, porque luego tienes que sumarlos. Los resultados que te dan tienes que sumarlos. No los puedes poner aquí juntos porque luego la multiplicación, si es de dos cifras, te tiene que dar una suma. Aunque se puede hacer esto por... ¿o no? [Permanece en silencio durante un instante]. Sí, también se puede hacer así: 146 por 23.

I.- A ver, ¿cómo?

Da.- Con la calculadora, ¿no? Lo puedes hacer directamente [no-Formal].

I.- ¿Cómo?

Da.- 146 por 23. No te hace falta estar poniendo esto.

I.- ¿Cómo lo harías directamente?

Da.- Pues, 146 por 23.

I.- A ver, no entiendo bien qué es lo que quieres decir.

Da.- Pues esto.

I.- Ah, con calculadora. Pero, ¿y sin calculadora?

Da.- Sin calculadora, pues si eres malo de cabeza, pues así. La ley que hay que hacerlo es así. Luego, si es de dos cifras o de tres.... Si es de una, no, pero si es de dos o más tienes que ir colocándolo en filas, dejándote siempre un hueco.

I.- ¿Y por qué se deja un hueco?

Da.- Pues, porque aquí hay un hueco.... El 3 como ya no lo estás multiplicando, que es el 2, pues te pones aquí. Siempre te saltas el número éste.

I.- ¿Entonces qué significa lo del hueco?

Da.- Pues el número éste que hay aquí, del multiplicador.

I.- ¿En este caso?

Da.- Sería el 3. Como el 3 aquí lo has multiplicado, ahora aquí ya no se multiplica, que es el 2. Así. Y aquí, si hubiese un 1, pues el 2 ya no se va a multiplicar, pues aquí. [No-Formal].

I.- Entiendo. O sea, que hay que poner éste 2 [decenas del 2º resultado parcial] aquí para que esté en línea, ¿o cómo?

Da.- Claro. Porque como a éste [las 3 unidades del multiplicador] ya no lo vas a multiplicar aquí abajo, pues es como si dejases el hueco de éste [del 3]. Y si hubiese otro, pues aquí [se dejarían dos huecos].

I.- Oye, ¿y al final por qué se tienen que sumar las cifras en columnas para llegar al resultado?

Da.- Pues, porque es así. Hay que sumar.

I.- ¿Por narices hay que sumar?

Da.- Claro, si no lo haces con la calculadora, sí.

I.- ¿Pero por qué hay que sumar y no hacer otra cosa?

Da.- *No sé. Pues, porque es la suma el único medio. ¡No vas a hacer una resta en una multiplicación! Si haces otra multiplicación, no te da el número. Porque se hace: primero se multiplica y después se suma. Es lo más razonable para que te dé el número.*

I.- *Es más razonable.*

Da.- *No lo vas a dividir o a multiplicar. [No-Formal].*

I.- *¿Y conoces alguna propiedad matemática que se utilice para justificar el método de multiplicación que nosotros utilizamos?*

Da.- *¿Alguna propiedad?*

I.- *Sí. ¿Que permita alguna explicación de por qué se tiene que multiplicar de la manera en la que lo hacemos?*

Da.- *No sé, no me acuerdo. ¿No será la propiedad de las potencias, no?*

I.- *La propiedad de las potencias.*

Da.- *No sé.*

I.- *¿A cuál te refieres?*

Da.- *No sé, ¿alguna propiedad que siga este mismo paso?*

I.- *No, que sirva para justificar por qué se multiplica así, por qué hay que poner los resultados en fila, por qué hay que dejar un hueco, todo eso.*

Da.- *No. [Instantes de silencio]. Esto pertenece a álgebra.... No sé.*

I.- *Bueno, pues ya está. Ya hemos terminado.*

Respuesta de tipo 9a

Rubén (1º Bachillerato) [27/05/2003]

1. Calcula el producto de las expresiones algebraicas $(x+2)(x-3)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 2 \\ \times x - 3 \\ \hline x^2 - 3x + 2x - 6 \\ \hline x^2 - x - 6 \end{array}$$

2. Realiza el producto de los binomios $(x+1)(x+2)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 1 \\ \times x + 2 \\ \hline x^2 + 2x + x + 2 \\ \hline x^2 + 3x + 2 \end{array}$$

3. Calcula el producto de los binomios $(x+3)(x+4)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 3 \\ \times x + 4 \\ \hline x^2 + 4x + 3x + 12 \\ \hline x^2 + 7x + 12 \end{array}$$

4. Calcula el producto de las expresiones algebraicas $(x+2)(x-3)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 2 \\ \times x - 3 \\ \hline x^2 - 3x + 2x - 6 \\ \hline x^2 - x - 6 \end{array}$$

5. Realiza el producto de los binomios $(x+1)(x+2)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 1 \\ \times x + 2 \\ \hline x^2 + 2x + x + 2 \\ \hline x^2 + 3x + 2 \end{array}$$

6. Calcula el producto de los binomios $(x+3)(x+4)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 3 \\ \times x + 4 \\ \hline x^2 + 4x + 3x + 12 \\ \hline x^2 + 7x + 12 \end{array}$$

7. Calcula el producto de las expresiones algebraicas $(x+2)(x-3)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 2 \\ \times x - 3 \\ \hline x^2 - 3x + 2x - 6 \\ \hline x^2 - x - 6 \end{array}$$

8. Realiza el producto de los binomios $(x+1)(x+2)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 1 \\ \times x + 2 \\ \hline x^2 + 2x + x + 2 \\ \hline x^2 + 3x + 2 \end{array}$$

9. Calcula el producto de los binomios $(x+3)(x+4)$.

$$\begin{array}{r} x \\ + 3 \\ \times x + 4 \\ \hline x^2 + 4x + 3x + 12 \\ \hline x^2 + 7x + 12 \end{array}$$

Situación 1

Rubén.- ¿Tengo que ir explicando cómo lo tengo que hacer?

Investigador.- Como quieras.

Ru.- ¿O lo hago directamente?

I.- Tú lo haces directamente. Después yo ya te haré las preguntas que vea. [Tras unos instantes de silencio]. ¿Cómo has hecho la suma?

Ru.- Pues he contado los 6 que hay y he multiplicado 6 por tantos 6 como hay. Entonces, he puesto el número, me lo he llevado y luego le he sumado los 1.

I.- Y luego le has sumado los 1.

Ru.- A las decenas.

I.- O sea, ¿qué has hecho 1 más 1 más 1...? ¿O cómo?

Ru.- Me ha dado 42 y entonces 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11.

I.- ¿Y lo podías haber hecho de otra manera?

Ru.- Sí. Decir: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35; 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42. Y ya lo otro lo de aquí.

I.- Entiendo.

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

Ru.- ¿Qué eran números naturales?

I.- Que no tienen decimales, sin coma.

Ru.- Ajá.

I.- Entonces, son dos números que al multiplicarlos de 177.

Ru.- ¡Madre mía! [Tras unos 15'' en silencio] ¿Y no se puede usar la calculadora?

I.- No. Tienes aquí espacio para escribir todo lo que quieras.

Ru.- Pero ahí no me acuerdo de nada... Y encima me pongo nervioso.

I.- ¿Te pones nervioso?

Ru.- Como estás aquí viendo lo que hago, pues...

I.- No hombre, tú haz lo que puedas. Si después esto yo me lo voy a llevar y lo voy a mirar más tranquilamente. O sea, que tú haz todo lo que te dé la gana con toda la tranquilidad del mundo.

Ru.- [Permanece 1' 10'' en silencio, donde intenta dividir 177 entre 2]. Yo es que no tengo ni idea.

I.- ¿No se te ocurre nada? A ver, ¿qué estabas intentando?

Ru.- No sé, he pensado que al dividir 177 entre 2 daría el número, pero no.

I.- ¿Y luego?

Ru.- Pues probando. Pensaba que me iba a dar más o menos el número, u orientado al menos, entonces ya nada más que tienes que probar.

I.- ¿Con qué número has probado?

Ru.- Con el 89. Como con 88 daba resto... [Transcurren unos 15'' en silencio]. Pero esto sería mejor hacérselo a los de Ciencias Naturales, ¿no? Porque los de Humanidades, si nos hemos quitado de matemáticas, será por algo.

I.- No, no importa, da igual. Ni tan siquiera sé las notas que sacáis en matemáticas, si estáis dando matemáticas, ..., me da igual.

Ru.- [El alumno desiste de esta tarea y pasa momentáneamente a la siguiente]. En éste sí se hace con la calculadora, ¿no?

I.- Sí, ese sí. Pero dime, ¿no se te ocurre ninguna otra cosa?

Ru.- Sí. [Permanece unos 25'' en silencio]. Hacer el mínimo común múltiplo y todas esas cosas, pero yo eso es que no... no me acuerdo de nada. Encontrar un múltiplo de 177... y ya pues entonces sí, pero... [Tras 35'' en silencio] ¡Pues no tengo ni idea!

I.- Bueno, si quieres pasamos a la siguiente. No pasa nada.

En el registro escrito se muestra (tachado) el intento (a) de dividir 177 entre 2 con el algoritmo estándar escrito de la división y (b) de multiplicar 89 por 2 mediante el planteamiento de la multiplicación correspondiente. No obstante, en ningún momento se observa un uso evidente del algoritmo estándar escrito del producto, tan sólo el planteamiento mencionado.

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

I.- *De lo que se trata es de hacer esta multiplicación ayudándote de la calculadora. O sea, puedes utilizar la calculadora.*

Ru.- *¡Pues marcar ahí y multiplicar! Digo yo, ¿no?*

I.- *Bueno, no sé. Tú hazlo como quieras.*

Ru.- [En silencio, comienza a introducir las cifras del multiplicando en la calculadora]. *¡Pero si no caben!*

I.- *No caben. [El alumno permanece en silencio durante unos 55'' aprox.] ¿En qué piensas?*

Ru.- *En reducir el número pero no encuentro manera tampoco.*

I.- *En reducir el número.*

Ru.- *Claro. Por ejemplo, reducía entre 2 y luego éste también lo reducía entre 2 y ya está.*

I.- *Entiendo.*

Ru.- [Instantes en silencio] *Pero... tampoco.* [Permanece en silencio unos 3' realizando los cálculos que se muestran en el registro escrito]. *No habrá salido, pero bueno.*

I.- *Bueno, ¿cómo lo has hecho? Explícame un poco el proceso que has seguido.*

Ru.- *¡Cómo va a salir esto, si esto es imposible! [en referencia al resultado]. Ah no, es que se me ha olvidado.... A lo mejor multiplicando esto por 4... [Transcurre en silencio aprox. 1' 10'']. Si ahora que me estoy dando cuenta: si no cabe ni esto [el multiplicando] en la calculadora, ¿cómo al multiplicarlo va a caber? Con menos motivo.*

I.- *Bueno, no sé. A ver, explícame el método que...*

Ru.- *Pues, al ver que no cabía en la calculadora lo he reducido como he podido. He extraído... lo he dividido [el multiplicando] en dos números que al sumarlos dé ese número y entonces pues... uno de los números ha sido 22 millones. No, 222 millones, pero como seguía sin caber lo he reducido entre 4. Entonces he pensado que si ese lo he reducido entre 4, pues el número que lo tengo que multiplicar también lo tenía que reducir entre 4. Entonces ya, lo he multiplicado y lo que ha salido pues lo he multiplicado por 4, porque como he reducido por 4 los dos....*

Pues ese ha sido uno y luego el otro, como ya sí me cabía, lo he multiplicado por 64, lo he sumado y eso ha salido. Pero eso no es, vamos.

I.- *Ya, entiendo el método que has utilizado.*

Ru.- *Si pero creo que.... Bueno creo, eso no es correcto, ¿no? Pero bueno.*

En esta ocasión el alumno manifiesta un uso Formal del algoritmo estándar escrito del producto al emplear conscientemente propiedades del sistema de numeración posicional (descomposición del multiplicando en sumandos; reconocimiento del orden de las cifras) y la propiedad distributiva del producto respecto a la suma. También utiliza, aunque de forma incorrecta, relaciones de proporcionalidad. Si bien la solución no ha sido correcta, observamos indicios de lo que hemos catalogado como empleo Formal del algoritmo.

Respuesta de tipo 3b

Situación 4

En el registro escrito se observa que este alumno resuelve correctamente la situación. No llega a establecerse ningún diálogo que aporte nueva información.

Respuesta de tipo 4c**Situación 5**

Ru.- *¿Qué es el algoritmo?*

I.- *El método que utilizamos para multiplicar normalmente.*

Ru.- *¿Hago esta cuenta?*

I.- *Sí.*

Ru.- *¿La puedo hacer al revés que lo veis mejor?*

I.- *Como quieras. [El alumno aplica el algoritmo estándar escrito invirtiendo el orden de los factores. Obtiene una solución correcta]. ¿Y lo podías haber hecho en esta disposición?*

Ru.- *Sí, pero una vez viendo eso para controlar si lo haría bien.*

I.- *¿Cómo quedaría en esta disposición? ¿Cómo sería?*

Ru.- *¿O no? No sé. Porque entonces se tenía que ir poniendo debajo, ¿no? Creo. [Instantes en silencio] ¿El 30 se pondría debajo ya, no?, digo yo. [Después de 20'' en silencio] ¿Así? No sé. [Permanece otros 20'' en silencio]. Si hubiera hecho así, directamente [sin multiplicar previamente con los factores cambiados de orden], a lo mejor hubiera pensado que el 0 iba debajo del 6, pero así ya he controlado mejor.*

Este alumno se manifiesta condicionado por la disposición de los factores al emplear el algoritmo estándar escrito del producto. Tal como reconoce, ha necesitado el apoyo de la disposición usual de factores para aplicar los pasos de la secuencia en la presentación no-usual.

Respuesta de tipo 5a**Situación 6**

Ru.- [En referencia a la primera cuestión]. *Pues tendría que tener tres cifras porque al haber tres... tres filas.*

I.- *¿De quién me estás hablando?*

Ru.- *Del multiplicador.*

I.- *¿Y el multiplicando?*

Ru.- [Instantes de silencio]. *Pues no lo sé. [Continúa en silencio por unos 35'' más]. El multiplicando creo que no lo podría saber.*

I.- *¿Por qué dices eso?*

Ru.- *No sé. [Permanece unos 50'' sin decir nada].*

I.- *¿No se te ocurre nada de cuántas podría tener el multiplicando?*

Ru.- *Pero es una tontería. Digo yo que a lo mejor seis pero por el hueco que está tapando. No veo otra cosa. [Instantes en silencio]. Pero no... no se me ocurre nada.*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

Respuesta de tipo 6a**Situación 7**

I.- *¿Entiendes la tarea?*

Ru.- *¡Pero eso es imposible!*

I.- *Se trata de encontrar las cifras que hay en cada uno de estos huecos, lo que pasa es que se ha ocultado el multiplicando. Aún así, a pesar de ello, ¿podrías completar los cálculos?*

Ru.- [Permanece en silencio unos instantes] *¿Sin calculadora?*

I.- *Sin calculadora, claro.*

Ru.- [Tras aprox. 25'' en silencio]. *En ésta sería todo 0 porque si has multiplicado por 0.... ¿Lo escribo?*

I.- *Sí, tú ve completando los huecos.*

Ru.- [Instantes de silencio]. *Y si es por 3 [unidades del multiplicador] y es por 3 [centenas del multiplicador], debe ser igual.* [Transcurren unos 35'' en los que el alumno completa los huecos sin dificultad aparente]. *¿Paso a la siguiente?*

I.- *Sí.*

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

Ru.- [Sobre la primera MCCD]. *Creo que no es correcto.*

I.- *¿Por qué dices eso?*

Ru.- *No es correcto porque si... el 5 lo tenías que multiplicar.... El 5 por el número que lo multipliques da o 0 o 5, ¿no?*

I.- *O 0 o 5.*

Ru.- *En las unidades, digo, ¿no? Digo yo.* [Tras 20'' de silencio]. *Vamos a ver, sigo pensando.*

I.- [Nuevo silencio de unos 45''] *¿Qué problema tienes?*

Ru.- *¿Me puede dar la última hoja?*

I.- *Sí, toma.* [20'' en silencio] *¿Y ahora qué estás mirando ahí?*

Ru.- *Las multiplicaciones.* [Intenta encontrar una multiplicación que se corresponda con la MCCD].

I.- [Tras 25'' en silencio] *A ver, ¿ese 4 para qué lo has puesto?*

Ru.- *¿Ése? Porque si eso es la suma y esto 8 y hay un 4, tendrá que ser otro 4.*

I.- *Bueno, ¿y qué problema tienes, entonces, en completar el multiplicando?*

Ru.- *Pues no lo sé, estoy pensando.*

I.- [Otros 20'' en silencio] *Si quieres puedes pasar a la siguiente, ¿eh?*

Ru.- *No, no, ésta la saco.* [Transcurren 2' 20'' de reflexión en silencio hasta completar la primera MCCD]. *Creo que es así.*

I.- *¿Y la siguiente?*

Ru.- [Tras 20'' en silencio] *Esto es lo mismo que antes: si es 4 y ahí hay un 0... [45'' en silencio]. Eso será un 5 porque si ahí es 5 y ahí hay un 0... tiene que ser por el primero que se multiplica, será 5.* [Transcurren aprox. otros 55'' en silencio] *Esto puede tener más de dos soluciones, ¿no? Porque ahí puedes poner cualquiera.*

I.- *Bueno, tú pones la que tú veas.*

Ru.- *Aquí digo yo que es... que será 35.* [Unos 35'' de reflexión en silencio]. *Y ahí ya vale cualquiera, ¿no?, que acabe... que sea múltiplo... que al multiplicarlo por 5 acabe en 0, digo yo. Pues, el 2 mismo que es más fácil.*

I.- *Vale, pues vamos a la última.*

Conviene subrayar que aunque el alumno llega a completar las dos MCCD, manifiesta durante el proceso dificultades importantes. No obstante, lo que realmente nos interesa son los indicios mostrados de un uso Analítico del algoritmo estándar escrito del producto. Para este estudio no consideramos la velocidad en la resolución de las tareas como criterio de comprensión.

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

Ru.- *¿Pero esto es en general? ¿Se refiere a todas las multiplicaciones?*

I.- *Te he puesto ésta como ejemplo para, si quieres, ayudarte en las explicaciones.*

¿Por qué hay que llevarse cuando uno multiplica?

Ru.- *¡Uf! Porque nos lo han enseñado así.*

I.- [El alumno permanece sin decir nada durante unos 30''] *¿Por qué hay que llevarse 1 cuando uno multiplica 3 por 6 y dice 18?*

Ru.- *Pues, porque luego tienes... porque tienes que hacer otra cuenta. Yo qué sé, porque... si pones 18, pues entonces la otra la tenías que poner más para allá todavía y entonces daría más de lo que en realidad es. Por ejemplo, si dices 3 por 6, 18 y pones así el 18 [sin la acción de llevarse] y luego haces la siguiente, pues entonces la tendrías que ir haciendo así. Entonces, ahí te daría una expresión con más de tres dígitos. [Indicio no-Formal].*

I.- *Entiendo. Oye, ¿y por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Es decir, ¿el 3 por el 6, por el 4, por el 1 y después lo mismo con la otra cifra?*

Ru.- [Instantes de reflexión en silencio]. *No sé.*

I.- *¿No se te ocurre nada?*

Ru.- *Pues para simplificarlo un poco más, digo yo. 146 por 3 es 3 veces 146, pues entonces es como si dijeras 3 veces el 6, 3 veces 4 y 3 veces el 1 pero llevándose... no sé, digo yo. Es que no lo sé. [Se reconoce la propiedad distributiva pero las particularidades del sistema de numeración posicional].*

I.- *¿Y por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? Es decir, multiplicas por 3 y el resultado lo colocas aquí [primera fila] y después vas colocando sucesivos resultados en filas.*

Ru.- *Pues, eso es porque al multiplicar por 23, si primero lo haces con el 3, lo colocas el primero que son las unidades. Pero el 2 ya serían las decenas del 23, entonces hay que colocarlo debajo para sumarlo pero no justo debajo porque si no también serían unidades. Una unidad más para la izquierda porque tiene más valor, entonces la suma ya le da más valor a las decenas. [Indicio de uso Formal; reconocimiento del valor posicional de las cifras].*

I.- *¿Y por qué se deja entonces un hueco?*

Ru.- *¿Dónde?*

I.- *Aquí, en esta fila. ¿Qué significado tiene ese hueco?*

Ru.- *Por eso, porque si, por ejemplo, el 292 lo pones debajo del 438, justo debajo, pues entonces la suma no sería eso, sería muchísimo menos porque le estarías dando menos valor. Porque en realidad no estás multiplicando por 2 sino por 20 [indicador de uso Formal]. Digo yo que será por 20. Entonces por eso te dejas un valor que sería el de las unidades que es el 3; en el 23 el 3 son las unidades y ese es el que te dejas.*

I.- *¿Entonces el hueco?*

Ru.- *Eh...*

I.- *¿Qué es el hueco, entonces?*

Ru.- *¿El hueco? Vamos a ver... [permanece en silencio sin aportar ninguna explicación más].*

I.- *Bueno, ¿y por qué se tiene que sumar al final en columnas para obtener un resultado?*

Ru.- *Pues, porque no has multiplicado 23 directamente. Primero has multiplicado el 3 y después has multiplicado el 2 [contradicción con el reconocimiento anterior de estar multiplicando 20]. Por eso. Entonces luego lo tienes que sumar.*

I.- ¿Y conoces alguna propiedad matemática que se utilice o que sirva para justificar este método de multiplicar?

Ru.- No.

I.- ¿Que justifique todas estas explicaciones que me has dado?

Ru.- ¿Alguna propiedad...?

I.- Matemática, sí.

Ru.- Pues no. ¿Alguna propiedad? Es que no lo entiendo.

I.- Sí, tú me has dado aquí una explicación, ¿no? Pero eso se sustenta en propiedades matemáticas. ¿Conoces alguna propiedad que se aplique aquí, que se utilice aquí o que tú veas que se puede utilizar aquí?

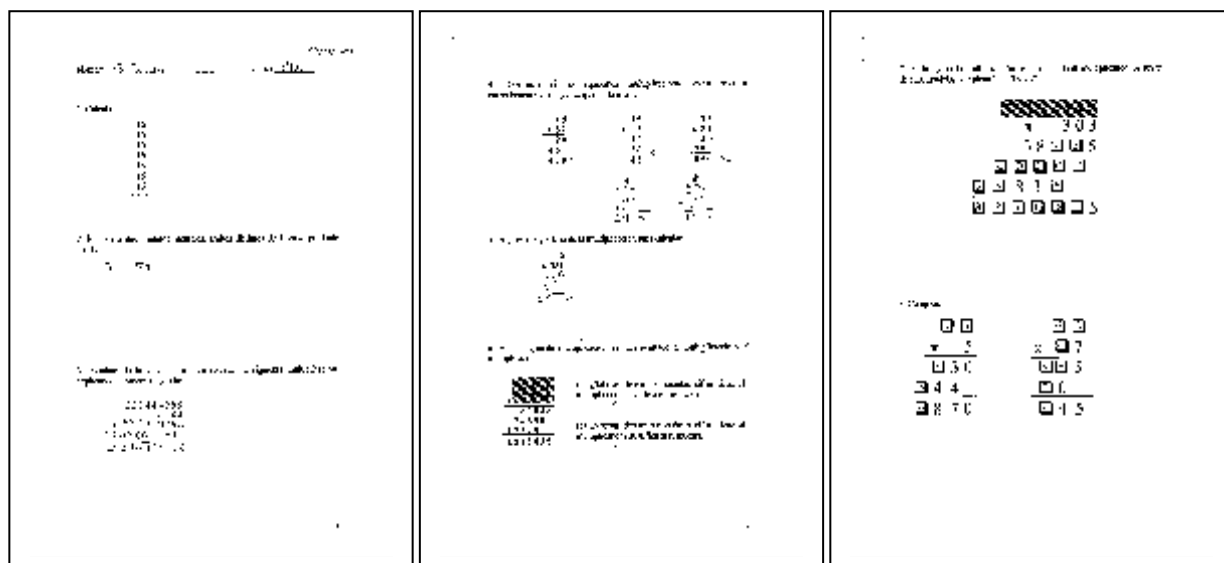
Ru.- Pues, no sé.

I.- Bueno, ya hemos terminado.

Este alumno muestra indicios de un uso Formal del algoritmo estándar escrito. Sin embargo, este uso no es de todo completo en el sentido de que las explicaciones dadas resultan incompletas y en fases puntuales llegan a contradecirse. No se manifiesta una coherencia total en las respuestas aunque sí síntomas de empleo Formal. En consecuencia:

Respuesta de tipo 9b

Guillermina (1º Bachillerato) [29/05/2003]



Guillermina.- ¿En éste se podía utilizar la calculadora?

Investigador.- No, ya te lo comentaré. Es en el 3. En éste no. Se trata de calcular, de hacer esa suma. [Después de un 1' en el que la alumna ha permanecido en silencio resolviendo la tarea] 112. ¿Cómo lo has hecho?

Gui.- Sumando 16 todas las veces.

I.- ¿Cómo?

Gui.- Sumando: 16 más 16, 32; 32 más 16 y así. Porque multiplicar 16 por 7 pues no me entero. 16 elevado a 7, 16 por 7 veces, ¿cuántas son?

I.- ¿Y lo podías haber hecho, entonces, de otra forma aparte de esa que tú has utilizado?

Gui.- ¿Con... sin calculadora?

I.- *Sí, sin calculadora.*

Gui.- *No. Yo creo que no.*

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

I.- *¿Entiendes esta pregunta? Se trata de encontrar dos números...*

Gui.- *Que no pueden ser ni el 1 ni el 177.*

I.- *Claro y que al multiplicarlos dé 177.*

Gui.- *Vale.*

I.- *Y no valen decimales, por eso pongo números naturales. [Transcurren unos 25'' en silencio sin que la alumna realice ninguna acción observable]. Puedes escribir ahí todo lo que quieras.*

Gui.- *Es que...*

I.- *No importa que emborrones, ¿vale? No pasa nada.*

Gui.- *Vale.*

I.- [Tras 1' 15'' aprox. de reflexión en silencio por parte de la alumna]. *¿Ya?*

Gui.- *Sí.*

I.- *¿Cómo has llegado a hacerlo?*

Gui.- *Primero he sumado éstos [las cifras de 177] para saber qué múltiplo era, me salía un 15 y como 15 es múltiplo de 3.... Y después he probado a multiplicar por un número que me diera 27 y luego otro que sumándole 2 me diera 17 al multiplicarlo por 3. [Indicio de empleo analítico (mental) del algoritmo estándar escrito].*

I.- *O sea, que has utilizado la descomposición en factores primos. ¿Y lo podías haber hecho de otra manera?*

Gui.- *Pues a lo mejor sí, pero ahora mismo no se me ocurre ninguna.*

Respuesta de tipo 2c

Situación 3

Gui.- *¿Esto lo tengo que hacer con calculadora?*

I.- *Se trata de hacer esa multiplicación ayudándote de la calculadora, o sea, que puedes utilizar la calculadora para hacerla.*

Gui.- [Intenta introducir en la pantalla las cifras del multiplicando]. *No me deja introducir el 9 éste [unidades del multiplicando].*

I.- *No te deja introducirlo.*

Gui.- *¿Entonces qué, te multiplico con esto?*

I.- *Como quieras. Tú lo haces como quieras.*

Gui.- [A partir de aquí se centra en el cálculo usando conjuntamente la calculadora y el algoritmo estándar escrito de un modo técnico. Realiza los cálculos con corrección excepto en el último paso. Demora unos 5' en completar el cálculo; tiempo excesivo].

I.- *¿Ya? Bueno, ¿explícame para qué has utilizado la calculadora?*

Gui.- *Pues, como no me deja introducir todos los dígitos, primero he ido multiplicando esto [unidades del multiplicador] por 999 y la última cifra que me daba se la sumaba a la primera de la que me daba por 4, por 444. Y así hasta haber conseguido las cifras y luego lo he sumado.*

I.- *De acuerdo y lo has sumado normal.*

Gui.- *Sí.*

I.- *¿Y lo podías haber hecho de otro modo? O sea, ¿utilizar la calculadora de otra manera para hacer la multiplicación?*

Gui.- *Pues, en vez de coger por 3, pues haber cogido éste entero y... algo así.*

I.- *El 444999.*

Gui.- [Asiente].

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Ningún diálogo destacable. Tan sólo subrayar que la alumna considera correcta la aplicación del algoritmo estándar escrito en la primera multiplicación. Las otras dos multiplicaciones son corregidas con acierto.

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

Gui.- *¿Qué quiere decir eso?*

I.- *Es el método que nosotros utilizamos normalmente para multiplicar.*

Gui.- *¿Que te haga la multiplicación?*

I.- *Sí, se trata de hacer la multiplicación.*

Gui.- [En unos 20'' aplica en silencio y de forma correcta el algoritmo estándar escrito sin modificar para ello la disposición de los factores, tal como se muestra en el registro escrito].

I.- *Pues, la siguiente.*

Respuesta de tipo 5b

Situación 6

Gui.- [Tras leer en silencio el enunciado y contestar a ambas cuestiones]. *¿Te explico aquí por qué he puesto un 3? 3 porque son tres líneas de éstas. Y 4 porque he sumado ésta [las cifras de 1^{er} resultado parcial], son cinco, y le he quitado una porque puede ser que al ser un número mayor que éste, me dé 27 o 37 o algo así.*

I.- *Y por eso pones cuatro, dices que son cuatro.*

Gui.- *Sí.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

I.- *¿Entiendes la tarea, no? Se trata de encontrar las cifras de los huecos.*

Gui.- *¿Pero que puedo poner aquí el valor de las cifras que yo creo que son?*

I.- *Bueno, lo puedes hacer como quieras. Lo que ocurre es que para encontrar esos huecos se ha ocultado el multiplicando. Aún así, se trata de encontrar las cifras.*

Gui.- *Vale.* [A partir de aquí la alumna identifica con facilidad las cifras ocultas tras los huecos haciendo uso de las relaciones no-usuales entre partes del algoritmo dispuestas en la tarea y necesarias para su resolución].

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

I.- [Tras completar la alumna las dos MCCD]. *Explícame cómo has hecho esta primera.*

Gui.- *Pues, he buscado un número que multiplicándolo por 5 en las unidades me dieran 0 y otro que sumándole a ese número 3 me diera 3. Y como aquí abajo tengo que... sería 4 más otro número, igual a 8, pues es un 4. Sería 5 por 8. Y ya está. [Indicio de un uso flexible de las relaciones entre los pasos del algoritmo. Empleo analítico del algoritmo].*

I.- *Entiendo.*

Gui.- *Y ya, de aquí, pues ya saco éste.*

I.- *El 3 de abajo.*

Gui.- *Sí.*

Para la segunda MCCD no establecemos ningún diálogo. El registro escrito muestra que la tarea es completada de forma incorrecta, no llegándose a considerar todas las relaciones no-usuales necesarias para la resolución correcta. Por tanto:

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

I.- *Si quieres vamos comentándolas una por una. Por ejemplo, la primera. ¿Qué opinas?*

Gui.- *¿Qué sentido tienen las llevadas?*

I.- *¿Por qué hay que llevarse?*

Gui.- [Permanece en silencio unos 15'']. *Porque cuando multiplicas por 6 [unidades del multiplicando] estás multiplicando unidades y te da un número que tiene decenas. Al multiplicar por 4 [decenas del multiplicando] estás multiplicando decenas y tienes que sumarle la decena de las unidades para tener ésta. Y luego ya te da también el 4 y da centenas.*

Aquí estás multiplicando centenas pues le sumas la centena del 4 y ya tienes la centena. [Indicio de empleo Formal].

I.- *Entiendo lo que dices. ¿Y por qué se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Es decir, ¿por qué hay que multiplicar 3 por 6, 3 por 4, 3 por 1 y después lo mismo con la siguiente cifra [decenas del multiplicador]?*

Gui.- *Porque estás multiplicando 146, que es un número completo, por 3. No puedes dejarte una cifra porque entonces ya no sería 146. Sería, por ejemplo, 46 o 14 y no te daría el mismo resultado.*

I.- *Entonces, me dices que es porque estás multiplicando un número completo. Y con la siguiente cifra...*

Gui.- *Lo mismo. [Indicio de empleo Formal].*

I.- *Lo mismo, por la misma razón. ¿Y los resultados que se van obteniendo, los resultados parciales, por qué se van colocando en fila?*

Gui.- *¿Y que se deje un puesto? ¿Que por qué se deja un puesto?*

I.- *¿Un puesto? ¿A qué te refieres con un puesto?*

Gui.- *Esto. [Señala al "hueco" en el 2º resultado parcial].*

I.- *Ah, un hueco. Bueno, esa es la siguiente pregunta. En fin, tú sabes que multiplicas 3 por 146 y pones aquí el resultado [primera fila] y después vas situando resultados parciales uno debajo de otro. ¿Eso por qué? ¿Por qué se colocan así?*

Gui.- *Porque al multiplicar el 3 por 146 te da una cifra y esta cifra pues lleva hasta las unidades porque el 3 sería una unidad. Luego tienes que hacer otra fila para el 2 que serían ya las decenas. Para que te salga el número completo de 23 por 146 tienes que sumarlas.*

I.- ¿Y entonces lo del hueco o lo del puesto, como tú dices?

Gui.- Porque el 3 es unidad y el 2 es decena y entonces tienes que ir juntando unidad con unidad, decena con decena, centena con centena y milésima con milésima.

I.- Bueno, ¿entonces qué significado tiene ese hueco?

Gui.- Es hueco que... aquí no estás multiplicando por unidades, has empezado por decenas. 2 por 6 ya sería... el resultado ya sería una decena en vez de una unidad. [Indicio de empleo Formal].

I.- ¿Y por eso se deja entonces el espacio?

Gui.- Yo creo que sí.

I.- Oye, ¿y al final por qué se tienen que sumar todas estas cifras en columnas para llegar al resultado?

Gui.- Porque primero haces la multiplicación de 3 por 146 y te da un resultado. Luego haces la del 2 por 146, te da otro resultado. Si no las sumas, no te puede dar el resultado total de 23 por 146. [Indicio de empleo Formal].

I.- Y por eso hay que sumarlos y no hacer otra operación, ¿no?

Gui.- Sí.

I.- ¿Y conoces alguna propiedad matemática que se utilice aquí, en este procedimiento de cálculo, que permita justificar estas explicaciones que tú me acabas de dar?

Gui.- No. A nosotros nos lo han enseñado así y ya está.

I.- Y ya está. Pero, ¿sabes qué te estoy preguntando, no? Aquí se están utilizando unas propiedades matemáticas para justificar todos estos pasos y demás.

Gui.- Pero como no te lo explican, pues...

I.- ¿No se te ocurre ninguna que se haya podido utilizar, que se utilice?

Gui.- A lo mejor lo que te he dicho de tener, si cuentas unidades por unidades, decena por decena, pero que no... no se me ocurre otra.

I.- Bueno, pues ya está. Ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9c

José (1º ASI) [23/04/2003]

Nombre: JOSÉ Curso: 1º ASI

1. Calcula:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ + 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 112 \end{array}$$

2. Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.

10 x 17 = 170
17 x 10 = 170
59 y 3

3. Ayúdame de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación, explicando el proceso seguido:

$$\begin{array}{r} 222444999 \\ \times 64 \\ \hline 913469994 \\ 1334669994 \\ \hline 74236999436 \end{array}$$

1. Calcula:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ + 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 112 \end{array}$$

2. Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.

10 x 17 = 170
17 x 10 = 170
59 y 3

3. Ayúdame de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación, explicando el proceso seguido:

$$\begin{array}{r} 222444999 \\ \times 64 \\ \hline 913469994 \\ 1334669994 \\ \hline 74236999436 \end{array}$$

1. Calcula:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ + 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 112 \end{array}$$

2. Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.

10 x 17 = 170
17 x 10 = 170
59 y 3

3. Ayúdame de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación, explicando el proceso seguido:

$$\begin{array}{r} 222444999 \\ \times 64 \\ \hline 913469994 \\ 1334669994 \\ \hline 74236999436 \end{array}$$

1. Calcula:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ + 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 112 \end{array}$$

2. Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177.

10 x 17 = 170
17 x 10 = 170
59 y 3

3. Ayúdame de la calculadora para realizar la siguiente multiplicación, explicando el proceso seguido:

$$\begin{array}{r} 222444999 \\ \times 64 \\ \hline 913469994 \\ 1334669994 \\ \hline 74236999436 \end{array}$$

Situación 1

Investigador.- *Explícame un poco cómo has hecho eso.*

José.- *Pues, como no me sabía el 6 por 7, que me he quedado en blanco, pues he ido agrupando de dos en dos. 6, o sea, 12, 24, 36,... y luego el 6, que serían 42. Me llevo 4, luego los 7 que son 11.*

I.- *¿Lo podías haber hecho de otra forma?*

Jo.- *Sí bueno, agrupando los... los 16: 16 y 16, 32; 32 y 32, 64; y 32...umm, 96 y 16, 112.*

I.- *Muy bien... [Dando paso a la siguiente tarea y no en tono aprobatorio].*

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

Jo.- Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177. Distintos de 1...

I.- Sí, que no puede ser el...

Jo.- 10 por 17. No...no, porque sería 170. Eh, 11 por.... Distintos de 1 cuyo producto sea 177...

I.- Claro, es para que no pongas 177 por 1.

Jo.- Claro, claro. [Instante de silencio] 170, 17...Esto sería ir probando divisiones. [Tras 30'' de reflexión de voz baja]. Esto hay un proceso de hacerlo pero no me acuerdo cómo era. 177, dos números naturales distintos de 1 cuyo producto sea 177...Bueno, tienen que ser enteros, ¿no? No puede ser el 17'7 por 7.

I.- Efectivamente, naturales. Sin coma.

Jo.- Sin decimal.

I.- ¿Qué se te ocurre hacer? ¿O qué estás intentando? [en referencia a la división de 177 entre 3].

Jo.- Ir dividiendo...para buscarle un divisor. 3 por 5, 15, me sobran 2... 59 y 3. ¿No? 3 por 5, 15, me sobran 2; 3 por 9, 27...entonces el 59 y el 3. [Instante de silencio] 5 por 3, 15, me llevo 2... sí, la cuenta está bien.

I.- O sea, que lo has hecho dividiendo.

Jo.- Sí.

I.- ¿Y se te ocurre algún otro modo de hacerlo o de abordar la cuestión?

Jo.- Pues, en principio no. [Instante de silencio] Porque como el producto es el resultante, es éste [el 177], pues ambos tienen que ser los dos divisores de este número. Entonces, pues ir probando. Lo suyo sería ir probando 1, 2, 3,... por si acaso el número es primo, porque cabe la posibilidad de que sea primo.

I.- Ya.

Jo.- Entonces, se puede hacer eso que veíamos en Programación de... para que un número sea primo lo que se tiene que dar [se refiere al algoritmo de Euclides visto en la asignatura "Fundamentos de Programación en Lenguajes Estructurados", impartida por el investigador a los estudiantes participantes en el estudio y pertenecientes al Primer Curso del Ciclo Formativo de Grado Superior en Administración de Sistemas Informáticos].

I.- Entiendo.

Jo.- O sea, sería hacerlo primero eso para saber si es primo, porque puedes estar ahí matándote haciendo divisiones, 1, 2, 3,..., así. Entonces, sería primero ver si es primo, que de ya por cierto no me acuerdo, y luego si no es primo pues entonces ir probando con números.

I.- De acuerdo. Bueno, pues la siguiente.

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

Jo.- Ayúdame de la calculadora para realizar la siguiente... ¡ah, con calculadora!

I.- Exactamente. Aquí tienes una calculadora...

Jo.- ¿Pero hay que escribirlo así, en las dos líneas o no?

I.- Como tú quieras. Se trata de hacer esa tarea...

Jo.- Sí.

I.-...de hacer esa multiplicación ayudándote de la calculadora, puedes utilizar la calculadora.

Jo.- *[Instantes de silencio] Lo que pasa es que no van a salir los números. [Prueba a introducir las cifras del multiplicando y el multiplicador en la calculadora científica para efectuar el producto]. Elevado a 9. ¡Uff!, eso no sé lo que es. ¿Elevado a 09 qué es, que le sigue... que hay que multiplicarlo por 9 ceros, ¿no? Por un 1 y nueve ceros...*

I.- *A ver, ¿qué estás intentando?*

Jo.- *Multiplicarlo de una vez, pero es que lo multiplico así...*

I.- *Dos, dos, dos; cuatro, cuatro, cuatro,...*

Jo.- *Nueve, nueve, nueve. ¡Es que no sale... el 9! Entonces pues... solía hacerlo a mano. [Comienza a aplicar el algoritmo de un modo Técnico]. 4 por 9... 4 por 9, 36, me llevo 3; 36 y 9, me llevo 3; 36 y 9, me llevo 3. 4 por 4, 16 y 3, 19; llevo 1, 17; llevo 1, 17. 8 y 1 que me llevo... 8 y 8.*

[Secuencia de pasos correspondiente a la segunda fila, al producto de las decenas del multiplicador con el multiplicando]. 6 por 9, 54, me llevo 5; 54 y 5, 59, me llevo 5. 54 y 5, 59, me llevo 5. 6 por 4, 24 y 5, 29, me llevo 2. 24 y 2, 26, me llevo 2. 24 y 2, 26, me sigo llevando 2. 12 y 2, 14, me llevo 1. 12 y 1, 13, me llevo 1. 12 y 1, 13.

[Secuencia de pasos correspondiente a la suma]. 6, 13, 19, 20, 17, 14, 16, 13, 12, 4 y 1. [A continuación, realiza con la calculadora el producto 222444999 por 64 para comprobar la corrección del resultado. Aunque no caben todas las cifras, en concreto las 9 unidades, la acción le servirá para comprobar al menos la parte del resultado correspondiente a las cifras del mayor valor relativo]. Dos, dos, dos, cuatro, cuatro, cuatro, nueve, nueve, nueve por 64: 1, 4, 2, 3, 6, 4, 7, 9,... ahí tiene que haber un fallo. ¡Ah, sí! 13, me llevaba 1 que aquí era 0, entonces aquí me llevo 2 que serían 21... 4, 7,... 6, 9 y 4, 13, me llevo 1. 9 y 9, 18 y 1, 19. 19 y aquí me vuelvo a llevar 1, sí, sí, sí, sí.

[El alumno había cometido un error al sumar que es detectado con el uso de la calculadora y subsanado seguidamente tras dos intentos en forma de comprobaciones aplicando el algoritmo estándar escrito para la suma de números naturales].

I.- *¿Entonces para qué te ha servido la calculadora?*

Jo.- *Para nada. Porque... no sé, yo he deducido que si no sale en la pantalla... que no salía bien. Y luego como tampoco estaba seguro de que el 09 fuera multiplicarlo por 10, que ahora me he dado cuenta que sí porque salía 1'4. Es decir, habría que multiplicarlo... uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve. [Vuelve a contar las cifras del resultado]. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve... 10 por 9. Es decir, sería diez ceros el exponente, por eso salía 1'4. Pero esto aquí no ha servido para nada [en referencia a la utilidad de la calculadora en las demás fases del algoritmo].*

I.- *Bueno, pues la siguiente.*

Respuesta de tipo 3a y 3b'

Situación 4

Los comentarios del alumno se reducen a la verbalización de las acciones realizadas en la identificación de los errores, que no son otras que las correspondientes a la ejecución de los pasos algorítmicos establecidos (uso Técnico del algoritmo) y su comprobación con lo presentado en la tarea.

Para esta tarea, por tanto, no consideramos relevante la transcripción de los comentarios verbales del alumno dado que no aportan información complementaria al registro escrito producido.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

Jo.- *Emplea el algoritmo de la multiplicación para calcular... ¿el algoritmo de la multiplicación?*

I.- *Sí.*

Jo.- *¿Multiplicar?*

I.- *Sí, multiplicar.*

Jo.- *Pues, bajaría el 6.*

I.- *Bueno, a ver...*

Jo.- *6 por 1, 6. 6 por 5, 30, me llevo 3. 6 por 2, 12, ..., 15. Y ahora hay que ver si da lo mismo.*

I.- *Bueno, yo te iba a preguntar...*

Jo.- *6, me vendría una para acá. Serían 30... y aquí me vendría una para acá... serían 12. Uno, cinco, cero, seis. Pues nunca la había hecho así. Pero que lo primero que te viene a la cabeza, como el de arriba es menor, pues darle la vuelta.*

I.- *De acuerdo, la siguiente tarea.*

Respuesta de tipo 5b**Situación 6**

Jo.- [Leyendo el enunciado] *En la siguiente multiplicación se han ocultado el multiplicando y el multiplicador, ¿sabías determinar cuántas cifras tiene el multiplicador? El multiplicador es el de abajo, ¿no?*

I.- *El de abajo. Y el multiplicando, el de arriba.*

Jo.- *Tiene 3 cifras. El de abajo tiene 3 cifras porque hay 3 líneas.*

I.- *Porque hay 3 líneas.*

Jo.- *¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicando? Pues, si tenemos 5 [cifras] en cada uno [en cada resultado parcial]... [Tras un instante de silencio]. Pueden ser 5 pero también puede ser 4. Porque puede ser que fueran mayores. [Permanece en silencio durante un instante]. Porque aquí, por ejemplo, 37 podría ser de 4... el de arriba podría ser de 4 cifras pero si el de abajo es un 6: 6 por 6, 36 y me vengo trayendo 1... O sea, puede ser de 4 cifras o de 3, perdón, de 5 o de 4.*

I.- *¿Y por qué?*

Jo.- *Porque a simple vista, como son 5, pues dices: el de arriba tiene 5. Pero puede ser que el multiplicador, su última cifra sea bastante grande... Porque supongamos que el de abajo tenemos el 6 [unidades del multiplicador], entonces... y aquí arriba, por ejemplo, tenemos un 6 [unidades del millar del multiplicando]. Pues 6 por 6, 36, o sea, ya me ocuparía dos cifras. A lo mejor si es 4 ya me voy a 5. Y aquí [en el 2º resultado parcial] se puede dar el caso también porque es 24; tendríamos 6 por 4, 24.*

I.- *Entiendo.*

Jo.- *E incluso aquí también porque es un 12 [en referencia al 3º resultado parcial]*

I.- *Entiendo.*

Jo.- *Entonces, pues, pueden ser... puede tener 5 o 4, depende del multiplicador.*

Respuesta de tipo 6b**Situación 7**

Jo.- [Leyendo el enunciado]. *En la siguiente multiplicación se ha ocultado el multiplicando. A pesar de ello, ¿podrías completar los cálculos? Bueno pues... ¡Ah, lo que hay que rellenar es...!*

I.- *Efectivamente, no se trata de determinar el multiplicando...*

Jo.- *Sí, sí, sí, sí, sí.*

I.- *... sino de completar los huecos.*

Jo.- *Bien, bien, bien... [Tras un instante en silencio] Bueno, el cero está claro que aquí es cero [completa con ceros el 2º resultado parcial]. Entonces... si esto tiene 5 es que aquí hay 5: uno, dos, tres, cuatro y cinco. [Por tener cinco cifras el 2º resultado parcial, considera que el multiplicando también ha de tener 5 cifras, marcándolas con una "x"].*

[Tras permanecer unos 15'' en silencio analizando la multiplicación]. *Entonces, vamos a ver... éste podría ser un 5 [las unidades del multiplicando]. Pero... [20'' aprox. de reflexión en silencio]. Vamos a ver, vamos a ver, son cinco cifras, entonces... esta última... sí aquí salen cinco, esta última tiene que ser un 1. 3 por 1, 3,... porque... 3 por 5... esto es difícilillo. Vamos a ver... no hay ningún número que multiplicado por 3 de 8, o sea que éste podría ser un 9 [las centenas del multiplicando] para que fuera 27 y me traigo 1... pero no tiene lógica porque entonces el 3 y 38 tampoco puede dar de una vez. ¡Es que claro, a la fuerza hay que resolver el de arriba antes de...! Vamos a ver... [10'' aprox. en silencio]. No, si es que tiene que ser un 5 a la fuerza. Si es que no hay más números que multiplicados por 3 den 5. [Tras unos pocos segundos en silencio]. Claro, 3 por 5, 15, me llevaría 1. Me llevaría 1, con lo cual... aquí, es decir en esta línea [en el 3º resultado parcial], al ser un 5 también tendríamos otro 5 [unidades del 3º resultado parcial]. Entonces si aquí tengo un 3 [ahora está trabajando las cifras del 3º resultado parcial] es porque me he traído 1, es decir serían 12, con lo cual este sería un 4. 3 por 4... 3 por 5, 5,... 3 por 4, 12 que me sale aquí igual, me llevo 1. Si me da 8 aquí... aquí pasa algo ya raro.*

3 por 5, 15, me llevo 1. 3 por 4, 12 y me llevo 1, pero entonces aquí no me da un 8. No puede ser. Para que me dé un 3... 25... para que me de un 8 debería llevarme 2... pero 25... 15... 21, 24, 27. Tiene que ser a la fuerza, pero éste puede ser otro porque para que me dé 3, llevándome 1, tendría que ser el 12. Vamos a ver, si es un 0: 3 por 0, 0 y me llevo 1. Si es un 1, un 3; tiene que ser el 4 a la fuerza pero luego aquí no hay manera de cuadrar esto. Lo que está claro es que esto es igual a 38; 38 y 38... y falta este del medio.

I.- *¿Y aquello por qué es 38? [En referencia a las decenas y unidades de millar del 3º resultado parcial]*

Jo.- *Porque como multiplicas los dos por 3, la primera fila y la segunda tienen que ser iguales [identifica la relación clave para completar las cifras de la multiplicación pero no llega a ser plenamente consciente de ella]. Y lo tienes aquí, pues te vale ya... Pero claro, si yo aquí tengo un 4, 3 por 4 son 12 y 1 que me traigo son 13, efectivamente, pero es que a la de adelante me llevo 1, entonces, si aquí hay un 2, 3 por 2 son 6 y 1 que me llevo son 7, no pueden ser 8, que es el fallo que me sale a mí.*

Y luego, suponiendo que éste sea un 8... de 18,3, si me llevo 1 de aquí atrás... ¡Es complicado esto! Yo de atrás me traigo 1, entonces son... sí el 4: 3 por 4, 12 y me traigo 1 que son 13, entonces me llevo 1 al otro pero ya no puede salir un 8.

I.- *Bueno, si quieres pasamos a otra.*

Jo.- [Retoma una vez más el orden estándar de la secuencia algorítmica en su reflexión] *Sí porque me falla... yo creo que el planteamiento es correcto porque el único número que multiplicado por... o sea, multiplicado por 3 dé como unidades el 5, es el propio 5. O sea, 3 por 5 serían 15; me llevo 1. Como aquí en la segunda cifra tengo un 3 quiere decir que tengo que multiplicarlo por algo que sumándole 1 acabe en 3, entonces no me puede dar 22. Debería ser el 4: 4 por 3, 12 y 1, 13. Pero aquí ya, al pasar al otro, me da... ¡eh, espérate! Claro, el 9: 3 por 7, 27 y 1 que me llevo, 28.*

¡Ahora sí! 28, me llevo 2, entonces para que me dé otro 8 aquí puede haber un 2. Efectivamente, 2, 3 por 2, 6 y 2 que me traigo, 8... y 1, 3 por 1, 3.

3 por 5, 15, me llevo 1. 3 por 4, 12, me llevo 1 que son 13, me sigo llevando 1. 3 por 9, 27 y 1, 28, me llevo 2. 3 por 2, 6 y 2, 8... y 3. ¡La virgen, si me descuido para el curso y estoy aquí todavía! [Por último, realiza los cálculos correspondientes a la suma] 3, 13, me llevo 1 que serían 14 y otra 14, el 8 y el 3.

[Aunque no estaba previsto, este alumno decide por su cuenta comprobar el resultado con la calculadora. Lo dejamos hacer puesto que esta última acción no llega a afectar a las observaciones previas realizadas sobre el establecimiento de relaciones no-usuales] *Y ahora para ver si es cierto, lo hago todo con la calculadora. 3, 8, 4, 4, 3, 3, 5, dividido entre 303. 1, 2, 6,... ¡Buah!*

I.- *Espérate, ¿qué estás haciendo ahora con la calculadora?*

Jo.- *Bueno no, si es que no tengo por qué dividirlo. Sí, sería multiplicarlo: 1,2, 9, 4, 5 por 303. 39, no da igual, tiene que estar mal. Tiene que estar mal.*

[En realidad, había cometido un error al sumar] *3 por 5, 15 me llevo 1. 3 por 4, 12, llevo 1 que son 13. Me sigo llevando 1, 3 por 9, 27 y 1, 28 y me llevo 2. 3 por 2, 6 y 2, 8, no me llevo y 3 por 1, 3. Me he debido equivocar al sumar: 5, 3, 8 y 5 son 13, me llevo 1. 8 y 3... ¡Pues ya ves si me he equivocado! 11, que son 12, entonces me llevo 1, que son 12 y me llevo 1 que son 9.*

I.- *Vale, la siguiente.*

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

El registro escrito muestra con claridad que el alumno resolvió con éxito ambas MCCD's. Las explicaciones verbales acerca de lo realizado no hacen sino confirmar la conclusión extraída de lo escrito. Aunque no aportan información complementaria, las adjuntamos igualmente para completar los datos recogidos.

I.- [Una vez resuelta la primera MCCD y después de realizar cálculos durante 1'50'' aprox.] *¿Entonces, cómo ha sido? Explícalo un poco.*

Jo.- *Pues, sabiendo que aquí es un 0 y que aquí es un 4, digamos que lo busco... multiplicador común al 5 y al 4, para que me dé la posibilidad de que ambos números... entonces pues me he ido al 6 porque... Aquí tiene que ser par para que dé 0, eso está claro y luego para multiplicarlo por el 4 y que te acabe en 4, sólo hay el 6.*

I.- *Entiendo.*

Jo.- *Y luego ya pues me he venido hacia acá. Basándome en que 8 menos 4 son 4, he sacado el resto de arriba. Entonces, al darme 43, como me traía 3, está claro que es el 8: 8 por 5, 40 y 3. Y de ahí ya pues se resuelve todo.*

I.- *¿Y la siguiente?*

Jo.- *Un número que multiplicado por 7 pues... aquí es el 5. El 5, pues son 35. Entonces, el 0, aquí tiene que ir el 4. 7 por 5, 35 me traigo 3. 3 menos 4, tiene que acabar en 1. O sea, el 3: 7 por 3, 21 y 3 que me traigo, 24... llevo el 2. Entonces, este tiene que ser par porque da 0 y tiene que ser pequeño... sería el 2. 2 por 5, 10, me llevo 1. 2 por 3, 6 porque si me voy al 4 aquí se me sale ya de cifra, entonces tiene que ser el 2. 2 por 5, 10, me llevo 1; 2 por 3, 6 y 1, 7, así no ocupo las tres cifras y aquí un 9.*

I.- *De acuerdo, ya la última.*

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

Jo.- [Leyendo la cuestión] *¿Qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿Por qué hay que llevarse?*

Pues te llevas porque... te llevas porque 3 por 6 son 18, entonces 8 se te quedan en las unidades y 1... O sea, si hacemos un cuadro que sean unidades, decenas, centenas... y 1 corresponde a las decenas, con lo cual al llevártelo a la fila de adelante se pasa a ser una unidad. No sé explicarlo así correctamente, pero...

I.- *Bueno, vamos a ir con la otra pregunta.*

Jo.- *¿Por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?*

I.- *Es decir, ¿por qué el 3 se tiene que multiplicar por el 6, por el 4, por el 1,...*

Jo.- *Ya, ya, ya... Pues, porque lo que hacemos es descomponer el... el multiplicador lo descomponemos en cada unidad, es decir, sería... se multiplica por 3, se multiplica por 20... Sí, pero esa no es la respuesta a esa pregunta.*

[Permanece en silencio durante unos instantes] *¿Por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?... Pues, esa no la sé. ¿Por qué se debe multiplicar cada cifra...? Porque al ser un número compuesto, digamos, tienes que multiplicarlo por cada una de las partes que tenga. Primero por las unidades, luego por las decenas y luego por las centenas.*

I.- *¿Y la siguiente?*

Jo.- *¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro?*

I.- [Señalando a los resultados parciales de la multiplicación tomada como referencia] *Sí, ¿por qué las filas se van colocando así, debajo?*

Jo.- *Eso sí que no lo sé. Esto sí lo sé por el 0 [en referencia al “hueco”, al desplazamiento de los resultados parciales un lugar a la izquierda]. Pero, porqué se ponen debajo, no lo sé. Supongo que alguien se entretendría en descubrirlo porque a esto no le veo yo una razón lógica.*

I.- *Y lo del 0, ¿a qué te refieres?*

Jo.- *Lo del 0 es porque como aquí... porque esto lo puedes descomponer en dos multiplicaciones: 146 por 3 y 146 por 20. Entonces, multiplicarlo por 20 aquí viene un 0, lo que hace que se corra siempre hacia ya uno. Uno, dos o sucesivamente los que sean.*

I.- *Entiendo. ¿Entonces, la (d)?*

Jo.- *¿Por qué se deja un hueco? Sí, esa sí. Es por eso. Lo que no sé es porque se van situando en filas y luego se suman.*

¿Por qué se deben sumar las cifras en columnas para llegar al resultado? Porque claro, si tú dices... si tú atiendes a que esto lo descompones en dos pues lo más lógico sería que luego sumaras los resultados. Pero es que si lo sumas como tal no quedan igual.

I.- *¿Cómo, si lo sumas como tal, no quedan igual?*

Jo.- *Pues si tú sigues esta norma que dice que el 23 lo descompones en 20 y 3 y haces 146 por 3 y 146 por 20; luego si sumas los dos resultados: 438 más 29, 20, no te da eso nunca porque no coinciden.*

I.- *¿No te da, qué?*

Jo.- *No te da el resultado final. A no ser que... corras esto hacia allá.*

I.- *A ver, no entiendo lo que estás diciendo. O sea, que 438 más 2920 no da 3358.*

Jo.- *Sí, ahora sí, ahora sí. Pero es porque le he puesto el 0, pero si tú coges ese resultado y lo sumas así.*

I.- *¿Cómo? El 438...*

Jo.-... y el 292, que es lo que tenemos. Si lo sumas como tal, así, no te da el resultado, pero al ponerle el 0 sí. Entonces, ¿por qué se van situando en filas uno debajo del otro...?

I.- Bueno, me refiero a uno debajo del otro en este sentido. Es decir, el 4, 3, 8 y después el 2, 9, 2 y el 0 que también dices.

Jo.- Ya, ya, ya. El 0. ¿Que por qué se van poniendo hacia abajo?

I.- Efectivamente. ¿O por qué se suman al final?

Jo.- Se suman por eso, porque tú vas multiplicando por, digamos, por cada parte del multiplicador, entonces luego al final lo que tienes que hacer es sumarlo.

I.- De acuerdo.

Jo.- Claro porque si tienes varios grupos y vas multiplicando uno por lo mismo, si luego quieres hallar la multiplicación de todos juntos pues tienes que sumarlos todos.

I.- ¿Y la última cuestión?

Jo.- Conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar. Eso de las propiedades es que no me acuerdo. Bueno, una de las propiedades de la multiplicación es que el orden de los factores no altera el producto, pero no sé si serán esas propiedades. [Instantes de silencio] Es que de lo de las propiedades no me acuerdo.

I.- Bueno, ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9c

Manolo (1º ASI) [23/04/2003]

The image displays three panels of handwritten mathematical work. The first panel shows a multiplication problem with a grid of numbers. The second panel shows a multiplication problem with a grid of numbers and a diagram of a circle. The third panel shows a multiplication problem with a grid of numbers and a diagram of a circle.

Situación 1

Manolo.- [Contando los 16] 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. 16 por 7. 6 por 7... 42. 6 y 4, 10. Sería... [obtiene 102 como resultado]. Es que de multiplicación no...

Investigador.- ¿Cómo lo has hecho?

Ma.- Todos los números son iguales, entonces con una simple multiplicación pues multiplicas 6 por 7, 42. Esto son 6, se la llevo 4.

I.- De acuerdo, la siguiente.

Tal como se observa con la explicación, desde un principio este alumno vincula la situación con el algoritmo estándar escrito del producto. Éste es usado mentalmente de forma Técnica aunque conviene precisar que durante la aplicación del mismo se cambia de multiplicador.

Respuesta de tipo 1b

Situación 2

Ma.- [Leyendo el enunciado]. *Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177. [Comienza su razonamiento en voz alta] Pues... distintos de 1. Entonces, el número no es divisible entre 2.... El mínimo común múltiplo.... No es divisible entre 2, 17, son 7, 7 y 1.... Divisible entre 3 y entre 5, múltiplo de 3 y de 5.... Vamos a ver...* [sobre el papel, aunque mentalmente, prueba con el algoritmo estándar escrito de la división para dividir 177 entre 5. Transcurren unos 20'' de silencio]. *Entre 5 tampoco. No sé.*

I.- *A ver, ¿qué estás pensando? ¿Qué se te ocurre?*

Ma.- *Los múltiplos. Encontrar dos divisores. Entonces, una vez que tienes dos divisores pues lo.... Por ejemplo, sin son 3 y...7, por ejemplo, podría multiplicar el 3 y el 7, como sabes que esos son dos divisores, hasta que... te salga 3 por 7 y luego un... por otro número. Tendría que sacar los divisores, entonces ya sería combinar, multiplicar los divisores y te dan dos números. Entonces, serían... entre 3, sí, entrarían el éste porque son 7 y 7, 14 y 1, 15. ¿No? Entonces sería divisible entre 3.*

I.- *A ver, tú ve haciendo.*

Ma.- *Vamos a ver...* [aplica el algoritmo estándar escrito de la división para dividir 177 entre 3. Transcurren aprox. 20' en silencio]. *Pues bueno, 3 y 59.*

I.- *3 y 59. ¿Y se te ocurre hacerlo de otra manera además de esa, de encontrar divisores?*

Ma.- *17 y 7.*

I.- *¿Cómo 17 y 7?*

Ma.- *Al multiplicando, cuyo producto. No, perdón. [Permanece en silencio unos instantes]. Diferentes de 1 y tienen que ser naturales... no caigo. Si es que vamos, si tuviera algo de tiempo y tal. Pero vamos, si saliendo con lo divisores tampoco...*

I.- *Bueno, tienes todo el tiempo del mundo o sea que tú tranquilo.*

[El alumno decide pasar a la siguiente tarea]

No se muestra indicio alguno de uso del algoritmo estándar escrito del producto. Por tanto:

Respuesta de tipo 2a

Situación 3

Ma.- *Ayúdate de la calculadora... ¡ostras!... explicando el proceso seguido.*

I.- *Aquí tienes la calculadora. Se trata de utilizarla como tú quieras para hacer esa multiplicación.*

Ma.- [Comienza a utilizar la calculadora científica para efectuar el producto descomponiendo el multiplicando. Permanece aprox. 2' 20'' realizando intentos en silencio].

I.- *¿Qué estás intentando?*

Ma.- *No me cabe todo el número, entonces dejo esto, dejo este 2 [la cifra de mayor orden del multiplicando]. Entonces cojo esto [22444999] y lo multiplico por 64. Ahora,*

este 2 son doscientos millones. Pues bueno, pues multiplico 2 por 64 y tengo 128... tengo 128 millones. No, tengo 1 billón 280 mil millones. Pues ya está, eso es 128 con ocho ceros detrás. Sumo ambas cifras y debería darme el resultado. Creo.

Es que yo no estoy muy fino. Ya te digo, en matemáticas... [Suma con la calculadora los resultados parciales obtenidos. Demora unos 40'' en los que permanece en silencio]. El resultado sería éste, creo.

I.- *¿Qué has estado haciendo ahora?*

Ma.- *Pues sumar.*

I.- *Sumando con la calculadora.*

Ma.- *Claro. [Tras 15'' en silencio]. He sumado con la calculadora. Es que una multiplicación se supone que son sumas, entonces creo que lo mismo da, si aparto este 2, después meterlo.... Yo puedo apartar este 2, después multiplicarlo por 64 y ponerle todos los ceros. Porque son 2 millones.*

I.- *Entiendo. Venga, pues pasamos a otra.*

Al igual que José (1º ASI) pero a diferencia de todos los demás, este alumno tuvo oportunidad de utilizar una calculadora científica. Dejamos al margen cualquier interpretación referente a la notación decimal como elemento añadido en la reflexión, dado que lo que realmente nos interesa es el uso dado al algoritmo. En este caso, se muestran indicios claros de un uso Formal del algoritmo estándar escrito del producto puesto que el alumno utiliza propiedades del sistema de numeración decimal y de las operaciones aritméticas básicas (distributiva) que justifican el funcionamiento del algoritmo.

Respuesta de tipo 3b

Situación 4

Ningún diálogo a destacar. El alumno resuelve con corrección la tarea identificando y corrigiendo los errores. Se manifiesta un uso Técnico del algoritmo adecuado.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

Ma.- *Emplea el algoritmo de la multiplicación para calcular... [Permanece en silencio unos 15'']. ¿Puedo darle la vuelta?*

I.- *Tú lo haces como quieras.*

Ma.- *Vale, así sí. [Transcurren unos 30'' en silencio en los que el alumno multiplica con el algoritmo 251 por 6].*

I.- *¿Y aplicar el algoritmo en esta disposición?*

Ma.- *Es que es más rollo.*

I.- *Más rollo. ¿Por qué?*

Ma.- *Hombre, que se podría pero necesitas hacer primero las multiplicaciones.... Primero deberías multiplicar y después sumar. Una pérdida...*

I.- *Bueno, ¿pero lo sabrías hacer o no?*

Ma.- *Sí, sí. [Aplica el algoritmo para multiplicar 6 por 251. Demora unos 30''].]*

I.- *Bueno, pues la siguiente.*

Aunque en principio es reacio, el alumno llega a aplicar el algoritmo estándar escrito del producto en la disposición de factores presentada. No se ve afectado, por tanto, por el orden de los factores.

Respuesta de tipo 5b**Situación 6**

Ma.- [Tras leer el enunciado]. *Esto es más de pensar.*

I.- *Te recuerdo que el multiplicador es el número de abajo y el multiplicando el de arriba.*

Ma.- [Reflexión en voz alta]. *Pero esto es más de pensar. Tengo unas cuantas cifras... haciendo esto... puede ser cualquier combinación.... Si éste fuera cinco esto podría ser uno, si esto fueran cuatro, éste debería ser... no, éste tres.*

I.- *A ver, la respuesta a la primera pregunta.*

Ma.- *Tres.*

I.- *¿Por qué?*

Ma.- *Porque existen tres números que van a generar la suma.*

I.- *¿Cómo que existen tres números que van a generar...?*

Ma.- *Que existen no, tres números. Tres cifras del multiplicador, cada una de las cuales es uno de estos números [resultados parciales], a la hora de poner el algoritmo de la multiplicación. Es que a la hora de explicarme, no...*

I.- *Yo te entiendo. ¿Y la (b)?*

Ma.- *Bueno, conociendo que éste tiene tres, el chavalín éste tiene tres y dado que está así: uno, dos, tres, cuatro, cinco. Cinco.*

I.- *Cinco. ¿Por qué?*

Ma.- *Me estaba yo calentando la cabeza, pero no. Esto es... tiene... [permanece unos instantes en silencio]. Porque si aquí fuera un 8 o un 9 [alguna cifra del multiplicador], dependería mucho de la cifra de arriba.*

I.- [Tras 30'' en silencio]. *¿Por qué has dicho cinco?*

Ma.- *Estaría muy chungo porque he pensado que, claro, como... que la longitud de éstos números podría equivaler a la del multiplicando. Pero después he pensado que no. Por ejemplo, si un número aquí fuera novecientos [multiplicador con 9 centenas], el novecientos dependiendo del multiplicando podría dar uno de estos números con una longitud mayor. Bueno, novecientos... cualquiera vamos, incluso el 2. Con que el multiplicando tuviera aquí un 9 [cifra de mayor orden] ya sería mayor, tendría una longitud mayor. Lo que pasa es que también, el hecho de que cada uno de estos números sea... tenga cinco, me hace pensar que el multiplicando no sea muy grande. El multiplicador, perdón.*

I.- *Vamos a ver, estamos en el multiplicando. Entonces, puede tener cinco...*

Ma.- *Puede tener cinco.*

I.- *Pero no es lo único.*

Ma.- *No es lo único.*

I.- *¿Entonces?*

Ma.- *Puede tener cinco o cuatro.*

I.- *¿Por qué cuatro?*

Ma.- *Por eso mismo, porque si el multiplicador.... La longitud te la van a dar los dos números, las dos cifras más grandes. Porque, por ejemplo, si éste es un 2 cualquier combinación a la que al multiplicar sea mayor de 10 te va a dar dos cifras, una cifra más.*

I.- *Entiendo, entiendo.*

Ma.- *Entonces, por probabilidad pues como que existe una posibilidad de cada diez de que sea...*

I.- *¿De que sea qué?*

Ma.- *De que sea de cuatro. O sea, el diez por ciento de probabilidades van a ser cinco; el otro noventa, cuatro. Pero tampoco tengo yo ningún método así pensado de antemano como para decirte exactamente cual es.*

I.- *Vale, ya está.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

Ma.- [Leyendo el enunciado]. *En la multiplicación se ha ocultado... ¿podrías completar los cálculos?*

I.- *Con completar los cálculos me refiero a rellenar los huecos. No estoy pidiendo que determines cual es el número de aquí [el multiplicando].*

Ma.- *Hombre, si determinas el número ya por descontado vas a rellenar los huecos.*

I.- *Bueno, pero no es lo que se pide.*

Ma.- [Instantes de silencio]. *Lo único que da 5 aquí... sería.... Un 5 aquí [en el tercer resultado parcial]. Esto es... el ser 0 se daría todo esto 0 [completa el segundo resultado parcial]. [Transcurren aprox. 1' 30" de reflexión en silencio]. ¿Aquí, esto? Perdona que te diga, se supone que estos dos números ya están bien, seguro. Ya se lo han llevado y todo lo que...*

I.- *Sí, claro. Por supuesto.*

Ma.- *Vale. Entonces, otra vez me he equivocado. Esto es un 1.*

I.- *O sea, los números que aparecen ahí son números que están.*

Ma.- *Ya, incluso llevándose los... puede ser de aquí. Vamos, éste es un 5 porque aquí hay un 5. O sea, este 3 ya tiene contado el número que te has llevado de... [reflexión sobre el tercer producto parcial].*

I.- *Sí, sí, ahí es un 3.*

Ma.- *Entonces es un 1. Es que se me ha cruzado el pensamiento ese.*

I.- [Tras unos instantes en silencio] *¿Qué estás intentando hacer?*

Ma.- *Jugando con estos tres números. Yo sé que este primer número es un 5.*

I.- *El del multiplicando.*

Ma.- *El del multiplicando. 3 por 5, 15. Entonces, una vez que tengo ya... tengo también todos estos 0. Pues he rellenado este número aquí, 5, a partir de ese 5 que supongo que está en el multiplicando.*

Pues, ahora voy a tratar de hacerlo con todo lo otro. Vamos con.... Porque, por ejemplo, aquí me llevaría 1. Sé que cualquier cosa que me salga aquí voy a tener que poner 1 más, del 15. [Permanece en silencio durante unos 55"']. ¡Jolín, esto es más complicado de lo que parece, ¿eh?!

I.- *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente. ¿Por qué no te sale?*

Ma.- *Es que necesito... necesito otro número cualquiera. Porque los 0 éstos no te dan información.*

I.- *¿Necesitas otro número dónde?*

Ma.- *Probablemente.... Lo necesitaría aquí. Aquí o aquí, en cualquier punto, pero preferiblemente aquí.*

I.- *¿Dónde? ¿En el primer resultado parcial?*

Ma.- *En el primer.... No.*

I.- *¿En la primera fila?*

Ma.- *En el primer.... No, en la columna. En las columnas. No, da igual lo que sea la fila, vamos. Preferiría, por ejemplo, en el segundo resultado parcial, en el primer cuadrado que es la segunda columna, pues me haría falta uno. No, ahí no me haría falta,*

me haría falta en el segundo. Porque éste ya lo conozco. Haría falta aquí [segundo hueco del primer resultado parcial]. Esta es la fila...

I.- *La columna.*

Ma.- *Esta es la columna. Bueno, o ésta... esta diagonal. Todavía se puede hacer algo porque aquí hay un 3. Sé que si está sumado es un 2.*

I.- [Tras unos 25'' en silencio]. *Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.*

Ma.- *3 por 4, 12. Aquí entonces, sé que aquí hay un 4. ¡Si es que soy muy lento yo para esto! Vamos que te lo podría sacar pero mi velocidad de.... Ya sé este número. Bueno, pues sería ir jugando con ellos. Entonces podría saber lo que hay aquí, que es un 4 [en el resultado total]. Pues aquí hay un 2, por ejemplo. Más 1 que me he llevado, 3. Y ya sé que esto será un 3. Y ahora pues tengo también éste. También sé que me he llevado 1, entonces, un 7. El número que te da un 7 va a ser el 9. Y esto ya sé que de aquí me voy a llevar 2. ¿Entiendes cómo lo voy haciendo? [En realidad, está determinado las cifras del multiplicando como estrategia para completar los huecos que le faltan].*

I.- *Sí, sí.*

Ma.- *El 9. Entonces aquí si hay un 9: 3 por 9, 27. ¿Me llevo alguna de aquí?*

I.- [Tras 25'' en silencio]. *Bueno, déjalo. Vamos a continuar.*

Ma.- *Es que no puedo, no puedo. Y aparte que... que no.*

Este alumno emplea una estrategia de resolución demasiado enrevesada. No llega a detectar las relaciones entre partes que conducen a la solución. Además, se decide en la parte final de sus argumentos a determinar las cifras del multiplicando como vía de acceso a la solución. No obstante, aún así entendemos que el alumno sí da algunas muestras de empleo Analítico del algoritmo, suficientes como para afirmar que posee una comprensión del algoritmo que supera la mera faceta Técnica.

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

I.- [Una vez completada la primera MCCD]. *Explícame un poco qué es lo que has hecho para determinar las cifras.*

Ma.- *Bueno, primero he mirado este 0, ¿no? y entonces digo bueno, si es 0 tiene que ser un número par. Con este 3 digo si los múltiplos de 5 van a acabar siempre en 0 o en 5, tendrá que acabar en 0. Así que he elegido uno, que es el 6, que ha sido el que primero se me ha ocurrido, la verdad. Pero después, antes de ponerlo, lo he multiplicado. A ver, digo 6 por 4, 24, concuerda este número. Concuerda este 4 aquí. ¿No? Entonces digo bueno, pues lo voy a poner temporalmente para ver si luego va acorde.*

Entonces, después tengo este 8 aquí. Entonces, 4, el número que... pues tengo 4. Entonces, ya tengo que aquí hay 43. El número al que te llevas de multiplicar por 5 y le sumas 3 da 43, es 8.

I.- *De acuerdo.*

Ma.- *Es 8. Y entonces ya lo único que me quedaba era multiplicar el 8 con 4 y ver que los dos que me he llevado antes concordaba.*

I.- *¿Y la siguiente?*

Ma.- *Ésta es un poquillo más chungu. [Permanece en silencio durante aprox. 2' 20'' en los que resuelve con éxito la segunda MCCD. Al igual que en la anterior demuestra un uso Analítico del algoritmo].*

En esta situación el alumno muestra indicios claros de un empleo Analítico del algoritmo. Por lo realizado en ésta y en las dos situaciones anteriores, podemos afirmar que este sujeto posee una sólida comprensión analítica del algoritmo.

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

Ma.- [Leyendo el enunciado]. *Observa la siguiente multiplicación resuelta con el algoritmo.... ¿Qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse? Es que con las llevadas lo que estás haciendo es formar, digamos, unidades de tamaño mayor. O sea, esto son las unidades y esto son las decenas. Pues lo único que haces con las llevadas es que llega un momento en el que tú con diez unidades formas una decena y entonces pasa a formar parte de ese grupo. Yo creo que es por eso.* [Indicio de uso Formal].

I.- *¿Y la siguiente?*

Ma.- [Leyendo la segunda cuestión] *A ver, ¿por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando?* [Instantes en silencio]. *Claro, es que cuando tú multiplicas esto, 146 por 23, no es más que 146 por 3 más 146 por 20. Entonces, por separado, multiplicas cada cifra. Cuando tú multiplicas por 3, pues lo único que haces es multiplicar, válgame la redundancia. Y luego por 20 igual, lo único que le pones el 0.* [Indicio de uso Formal].

I.- *Entiendo. ¿Y la (c)?*

Ma.- [Leyendo la tercera cuestión] *¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo de otro?*

I.- *Sí, ¿por qué se van poniendo debajo, en esa disposición?*

Ma.- *En esa disposición pero con el huequito...*

I.- *Sí, con el hueco ahí.*

Ma.- *Con el huequito ahí. El huequito ese equivale al 0, al 0 ese que te he dicho antes del 20. Lo único que no se pone, no tienes por qué ponerlo. O sea, en esta disposición es igual que si tú la pusieras... es cero ahí.*

I.- *¿Y por qué es un 0?*

Ma.- *Pues, por lo que te he dicho antes. Porque el 438 no es más que 146 por 3 y el 192 éste...*

I.- *292.*

Ma.- *El 292 serían 2920 que sería el resultado de multiplicar 20 por 146.* [Indicio de uso Formal].

I.- *Entiendo.*

Ma.- [Leyendo la cuarta cuestión] *¿Por qué se deja un hueco...?*

I.- *Bueno, esa ya está. La (e).*

Ma.- [Leyendo la quinta cuestión] *¿Al final por qué se deben de sumar las cifras en columnas para llegar al resultado? Porque es lo que haces generalmente. Es lo que.... El hecho es que este hueco la gente no sabe por qué se lo deja. Entonces, estas preguntas sí tienen sentido si no... si nunca te las has planteado.*

I.- *Pero bueno, yo lo que quiero es que me digas por qué al final hay que sumar.*

Ma.- *Ya.*

I.- *Y no multiplicar o restar o dividir.*

Ma.- *Por eso. Si es que la multiplicación es una secuencia de sumas. Entonces, los resultados parciales pues al final se suman. Si multiplicaras no tendrías el mismo número. Lo único que estás haciendo con la multiplicación es tratando de simplificar*

algo con las correspondencias que hay entre la suma y la multiplicación. [Indicio de uso Formal].

I.- *¿Y la (f)?*

Ma.- [Leyendo la última cuestión] *¿Conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar? La conmutativa.*

I.- *La conmutativa.*

Ma.- *La distributiva.*

I.- *La distributiva. ¿Dónde se utiliza la distributiva?*

Ma.- *La distributiva más que nada para sacar factor común. Creo, si no me falla mal la memoria.*

I.- *¿Y aquí se utiliza la distributiva en el algoritmo?*

Ma.- *¿Aquí?*

I.- *Sí.*

Ma.- *¿En éste? Qué quieres que te diga. No, no la veo por ningún lado. No, pero en éste.... Hay otras multiplicaciones que sí se pueden simplificar si...*

I.- *A ver, ¿cuál es la propiedad distributiva?*

Ma.- *¿La distributiva? Es que no me acuerdo bien, creo que era para sacar factor común.*

I.- *Para sacar factor común.*

Ma.- *Creo, si es que no estoy muy.... Sé que hay una con la que se saca el factor común. [Instantes de silencio]. Y bueno, la conmutativa. Se le puede dar la vuelta. Lo mismo da multiplicar 146 por 23 que 23 por 146. Y eso sí es útil, como ya has visto en el otro ejercicio de ahorrar algo de tiempo.*

I.- *Muy bien, pues ya está. Ya hemos terminado.*

Este alumno muestra indicios claros de un uso Formal del algoritmo consolidado. En consecuencia, afirmamos que su comprensión traspasa las fronteras técnica y analítica y abarca también la esfera de lo Formal.

Respuesta de tipo 9c

Cecilio (1º ASI) [24/04/2003]

Nombre: Cecilio Clase: 1º ASI

1. Calcular

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

2. Formar un triángulo usando todos los números del 1 al 100 de tal modo que la suma de los números en cada fila sea la misma.

3. Aplicar de la multiplicación para calcular los productos siguientes, explicando el proceso seguido:

$$\begin{array}{r} 3224 \times 135 \\ \hline 9672 \\ 32240 \\ 390080 \\ \hline 435240 \end{array}$$

4. Tercer día de las operaciones: multiplica los números 16 y 7, y suma los resultados.

16	7	112
112	112	112
112	112	112
112	112	112

5. Calcula la suma de los números que aparecen en el triángulo de Pascal.

6. Tercer día de las operaciones: multiplica los números 303 y 123, y suma los resultados.

$$\begin{array}{r} 303 \\ \times 123 \\ \hline 909 \\ 6060 \\ 36360 \\ \hline 37359 \end{array}$$

7. Calcula la suma de los números que aparecen en el triángulo de Pascal.

8. Calcula la suma de los números que aparecen en el triángulo de Pascal.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 7 \\ \hline 315 \end{array}$$
Situación 1

Investigador.- ¿Cómo lo has hecho? Explícame un poco.

Cecilio.- He contado las veces que sale el 6: siete. 6 por 7, 42, me llevo 4 y luego pues he sumado las veces... como si fuese 10. Luego le he sumado las 4 que me he llevado.

I.- ¿Y lo podías haber hecho de otro modo?

Ce.- [Instantes de silencio] ¿De otro modo? ¡Pues claro! 32 y sumándole 16 en 16 pero...es más lento.

I.- Bueno, pues la siguiente.

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

Ce.- *¡Esta sí es difícil!* [Permanece unos 35'' en silencio pensando en la tarea] *Que al dividirlo dé 0, ¿no?*

I.- *¿Cómo?*

Ce.- *Eran... encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea... pero al multiplicarlos, ¿no?*

I.- *Claro, son dos números que al multiplicarlos dé 177, pero ninguno de ellos puede ser 1.*

Ce.- [Tras 20'' aprox. en silencio] *85'5 por 2.*

I.- *Sí, pero tienen que ser naturales.*

Ce.- *¿Sólo?*

I.- *No pueden tener decimales.* [Pasados unos segundos] *A ver, ¿qué es lo que estabas intentando?*

Ce.- *Dividirlo entre 2, esto [el 177], y luego multiplicarlo. Y ya está, ya tendrías los dos números. Pero esto te saldría decimal, ¿no?* [Transcurren unos 25'' en silencio] *¿Los hay?*

I.- *Sí, sí existen.* [Instantes de silencio] *¿No se te ocurre nada más?* [Otros 25'' de silencio] *¿Y ahora qué estabas intentando?*

Ce.- [Continúa en silencio durante unos segundos]

I.- *Bueno, pasa a la...*

Ce.- *Multiplicar por 10 pero no lo sé.*

I.- *¿Cómo?*

Ce.- *Multiplicarlo por 10 pero eso no da.*

I.- *Multiplicarlo por 10. ¿Qué multiplicas por 10?*

Ce.- *Si dividías entre 10... saldría... saldría también decimal, ¿no?*

I.- [Tras otro instante de silencio] *Bueno, pasamos a la siguiente.*

Ningún indicio claro de empleo del algoritmo estándar escrito del producto, por tanto:

Respuesta de tipo 2a**Situación 3**

Ce.- *¡Vamos a ver si me acuerdo yo de hacer ahora una multiplicación!*

I.- *Espérate. Léelo bien [el enunciado]. ¿Lo entiendes o no? Tienes una calculadora aquí y la puedes emplear para hacer la multiplicación.*

Ce.- *¿Paso por paso o directamente?*

I.- *Como quieras. Se trata de hacer el producto y puedes utilizar la calculadora.*

Ce.- [Tras aprox. 20'' en silencio] *¿Y si la hago a mano?*

I.- *Como quieras.* [Transcurren 1' 25'' en silencio, donde el alumno aplica de forma Técnica aunque incorrectamente el algoritmo estándar escrito de la multiplicación] *¿Ya has terminado?*

Ce.- *Sí.*

I.- *Y no utilizas la calculadora.*

Ce.- *No.*

I.- *¿No se te ocurre otro modo de hacerlo?*

Ce.- *Sin... ¿utilizando la calculadora?*

I.- *Bueno, sí.*

Ce.- [Después de unos 15''] *Pues no.*

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

El alumno identifica y corrige sin problemas los errores incluidos en las dos primeras multiplicaciones resueltas con el algoritmo. En la tercera, en cambio, no logra identificar el error, reconociendo que está bien.

Ningún diálogo destacable.

Respuesta de tipo 4b

Situación 5

I.- *¿Cómo lo has hecho?*

Ce.- *Dándole la vuelta, multiplicando. 251 por 6.*

I.- *¿Y lo podías haber hecho sin darle la vuelta?*

Ce.- *Sí.*

I.- *¿Serías capaz?*

Ce.- *Pero... igual se hubiera tardado un poquillo más. Aunque es fácil pero se hubiera tardado un poquillo más.*

I.- *Bueno, inténtalo de todos modos.*

Ce.- [Tras 20'' en silencio y después de cometer un error inicial] *¡Me cago en su prima!* [Transcurren otros 15'' hasta que finaliza el cálculo correctamente].

I.- *Muy bien, la siguiente.*

Respuesta de tipo 5b

Situación 6

I.- *¿Entiendes la tarea? El multiplicador...*

Ce.- *Saber dónde está y cuántas cifras tiene.*

I.- *El multiplicador es el de abajo y el de arriba es el multiplicando.*

Ce.- [Transcurridos unos 10'' en silencio] *¿Cuántas cifras puede tener?*

I.- *Sí.*

Ce.- *¿Y hay que justificarlo?*

I.- *Claro.*

Ce.- *¿Cuántas cifras tiene éste [el multiplicando] y cuántas tendría éste [el multiplicador]?*

I.- *Ajá.*

Ce.- *Éste [el multiplicador] tendría tres.*

I.- *¿Por qué?*

Ce.- *Porque multiplicas tres veces esto. Multiplicas tres veces el número de arriba por diferentes números.*

I.- *Entiendo.*

Ce.- *Y éste [el multiplicando] pues tendría... yo creo que cinco. Tendría cinco.*

I.- *¿Por qué?*

Ce.- [Instantes de silencio] *Porque... es que no sé si es....* [Nuevo silencio de unos 20''] *Aquí tendría que tener una cifra más, es que no sé si me explico, una cifra más aquí... si tuviera una cifra más aquí...*

I.- *¿A la izquierda del 3 [decenas de millar del 1^{er} resultado parcial]?*

Ce.- *Sí. Significaría que esto sería mayor que 10, en la última cifra, en la suma que da. Pero como aquí abajo... al correrse un lugar... es que no sé...*

- I.-** *¿Entonces cuál es la respuesta?*
Ce.- *Aquí tendría cinco y aquí tres.*
I.- *¿Y cinco por qué?*
Ce.- *Por éstos de aquí. Mirando esto de aquí. Porque aquí si... si en el último, al multiplicar el último, en el último número de aquí...*
I.- *Del multiplicando.*
Ce.- *...del multiplicando, fuese mayor de 10...*
I.- *Sí.*
Ce.- *...aquí tendría que tener un número, por ejemplo. Entonces éste... [instantes de silencio] es que no sé.*
I.- *Bueno, la siguiente.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

- I.-** *Te explico primero la tarea 7. En la siguiente multiplicación se ha ocultado el multiplicando, se ha tapado el número de arriba. A pesar de ello, ¿podrías completar los cálculos? ¿Podrías determinar las cifras que hay en los huecos? Se está pidiendo que determines las cifras que hay en los huecos, ¿de acuerdo?*
Ce.- *¿Sabiendo estas dos? [Tras 1' en silencio completando los huecos]. Es que como te llena... de la primera impresión te quedas que no sabes lo que decir. Pero como es el mismo número, aquí te da los que aquí te faltan... y esto sería 0.*

Como puede observarse, el alumno llega a determinar con cierta facilidad las cifras de los huecos a través de las relaciones que se establecen entre las distintas partes del algoritmo. No manifiesta dependencia alguna en las cifras del multiplicando.

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

- Ce.-** [Tras la resolución de la primera M CCD] *Ya está. Aquí multiplico esto [5 por 6], serían 30, me llevo 3. Y aquí he buscado pues... como aquí la resta de esto [8 menos 4] me daba 4, pues he buscado el que me diera 40. 8 por 5, 40 y 3 de las que me llevaba...43 y luego pues buscar; multiplicar esto y ya está.*
I.- *¿Y la siguiente?*
Ce.- [Después de 1' 45'' aprox. de silencio completando los huecos de la segunda M CCD] *Aquí, uno que me diera 5 al multiplicar 7. 7 por 5, 35 y como aquí la suma es 4 y esto es 0 pues aquí tendría que poner un 4. Pues suelo buscar el número que al multiplicarlo por 7 y sumarle 3, me diera aquí un 4: 24. 7 por 3, 21 y 3, 24. Y aquí como al multiplicar da 0, pues 0 y aquí pues... otro 0.*
I.- *O sea, ¿éste es el número 07?*
Ce.- *07, sí.*
I.- *¿Y se ponen así los números? ¿El 07?*
Ce.- *Ya, ¡es caprichosa la multiplicación!*
I.- *O sea, ¿que en realidad estás multiplicando 35 por 7?*
Ce.- *35 por 7.*
I.- *Bueno, pues la última.*

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

I.- *Vamos a ir contestando las preguntas de una en una. La primera: ¿qué sentido tienen las llevadas? ¿Por qué hay que llevarse?*

Ce.- [Permanece en silencio unos instantes] *¡Uff!, porque aquí no se puede poner 18.*

I.- *No se puede poner 18.*

Ce.- *Es que no, se pone 8 y te llevas 1 porque esto serían unidades [columna de la cifra 6 del multiplicando], decenas [columna de la cifra 4] y centenas [cifra 1]. Son 18, sería como poner... así. Aquí pondrías el 8 y aquí se lo sumarías a las decenas. En fin, sería de... yo creo que sí. [Indicio de uso Formal].*

I.- *A ver, ¿entonces cómo quedaría?*

Ce.- *Esto serían unidades, decenas y centenas, pongamos, al multiplicar esto [el 146]. Pues, se pone 8 unidades, sería 18; aquí 8 y aquí pues te llevas 1 como, o sea, contando de que son 10. De 10 en 10, contando de que son 10. Y luego 3 por 4, 12...*

I.- *Puedes escribir para que quede más claro. A ver, qué estás pensando.*

Ce.- *Yo creo que es por eso, porque aquí son las unidades; aquí van contando como de 10 en 10, en el caso de éste...*

I.- *Entiendo.*

Ce.- *Aquí van multiplicando unidades, aquí decenas y centenas, por eso te las vas llevando cada vez más. Aquí, al multiplicar el 3 por 4 estás multiplicando decenas y en caso de 10 en 10, esto serían como 40. Y aquí como te has llevado una decena de aquí pues se la sumas. [Indicio de uso Formal].*

I.- *¿Y la (b)?*

Ce.- *¿Por qué se debe de multiplicar?*

I.- *Sí, ¿por qué se debe de multiplicar el 3 por el 6, por el 4 y por el 1; y el 2 por el 6, por el 4, por el 1?*

Ce.- [Transcurren unos 15'' de silencio] *Porque son diferentes, ¿no? Aquí éstas son unidades, decenas y centenas. Es que... [instante de silencio] se multiplica y luego... al sumarlas, para ir sumándolas.*

I.- *Para ir sumándolas.*

Ce.- [Un nuevo instante de silencio] *Es que yo creo que sería como multiplicar 3 por 6, 18 y multiplicársela luego a... aquí pongo... [escribe 18, 120 y 300 en filas distintas y luego suma] 40 por 3, 120 y luego 300. Esto sería como multiplicar 3 por 6, 3 por 40 y 3 por 100, por eso tienes que ir multiplicando por las tres cifras. Y al sumarlas pues te da el resultado. [Indicio de uso Formal].*

I.- *¿Y la siguiente cuestión? ¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? Es decir, ¿por qué se pone 438 cuando terminas de multiplicar por 3 y debajo se pone este 2, 9, 2,...?*

Ce.- *Porque aquí estás multiplicando... Lo mismo, aquí se multiplicaría por 3, pero aquí éste se multiplicaría como por 20. Por eso se deja el hueco ese. [Indicio de uso Formal].*

I.- *O sea, ya respondes a la cuestión (d), ¿no?*

Ce.- *Claro, porque estos son... aquí se multiplicaría esto [146] por 3 y esto [146] por 20... por eso se deja este hueco.*

I.- *De acuerdo, ¿y la (e)? [Silencio prolongado durante unos 15''] ¿Por qué se suman al final?*

Ce.- *Se suman al final porque aquí estás multiplicando digamos por 3 y aquí estarías multiplicando por 20. Para sumarlo, pues para saber...para multiplicarlo por 23. Esto sería como por separado, multiplicarlo por separado. Y esto ya sería la multiplicación en conjunto, por 23. Esto [438] sería el resultado de multiplicarlo por 3*

y esto [2920] el resultado de multiplicarlo por 20 y éste [3358] sería el resultado total. [Indicio de uso Formal].

I.- ¿Y conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar?

Ce.- Sí, la de... es que no sé cómo se llama esa de... si puedo multiplicar lo mismo, multiplicar 23 por 146 que como se ha hecho aquí. Y el resultado es el mismo.

I.- La propiedad conmutativa.

Ce.- La propiedad conmutativa.

I.- Pero digo en el algoritmo, en el método de cálculo.

Ce.- ¿Cómo en el método...? Es que no sé.

I.- Sí, esa es una propiedad de la multiplicación, pero digo del algoritmo, del procedimiento de cálculo. Tú sabes que ahí se han hecho una serie de acciones, entonces ¿hay alguna propiedad que se utilice para justificar todo lo que me has explicado anteriormente?

Ce.- Propiedad...

I.- Que justifique todas esas acciones.

Ce.- [Se mantiene en silencio unos instantes] No sé.

I.- Bueno, pues ya está. Ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9c

David (1º ASI) [24/04/2003]

David, David Clase, 1º ASI

Revisa

1. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

2. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

3. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

4. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

5. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

6. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

7. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

8. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

9. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

10. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

11. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

12. Calcula la suma de los números 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

Situación 1

David.- Son 112.

Investigador.- ¿Por qué? ¿Qué estrategia has seguido?

Da.- He visto que hay un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I.- Sí.

Da.- Y 6 por 7, 42 y después 7 y 4, 11. Entonces ya... ¡sencilla! [risas].

I.- O sea, que has multiplicado.

Da.- Sí, directamente.

I.- Pues la siguiente.

Esta tarea es resuelta aplicando mentalmente el algoritmo estándar escrito de la multiplicación.

Respuesta de tipo 1b

Situación 2

Da.- [Leyendo el enunciado]. *Encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177. Dos números que multiplicados den eso, ¿no?, y no sean 1. Entonces sería...* [Tras 25'' aprox. de reflexión en silencio]. *Esto es complicado hacerlo de cabeza.*

I.- *¿Qué es lo que estabas haciendo?*

Da.- *No, estaba intentando hacerlo de cabeza pero no.... Y si lo fragmento tampoco. Dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto sea 177. Está complicado...* [Transcurre 1' en silencio] *¿Puedo hacer guarrerías aquí, no?*

I.- *Sí, claro. Tienes espacio ahí.*

Da.- *Claro, por eso es porque de cabeza no me ha salido ninguno. 7, un número que sea divisible por esto.*

I.- [Después de otros 50'' de intentos en silencio]. *¿Qué estás intentando?*

Da.- *Eh, nada, estaba intentando jugar a que se me quedara aquí un 3 y clavarlo con él, pero entonces me saldría aquí un número entero de dos cifras y aquí con uno, me saldría directo.*

I.- *A ver, explícate mejor.*

Da.- *No, sin seguir las leyes, digamos, de la división estricta. Si tengo 17 y lo divido, por ejemplo, entre 2 pues lo más normal es coger el número más alto que sería el 8 y se me queda en 2 por 8, 16, me quedaría 1, ¿no? Aquí busco otra. Otra diferente, por ejemplo para que se me quedara a huevo para poder.... ¿Sabes?, para luego haciendo esto que ya me quedara aquí un número de dos cifras que multiplicado por éste [3] me diera el número. Pero... como que no.*

[Instantes de silencio] *177... producto, o sea, al multiplicar que me de 7 y 7. ¡Vaya tela!* [Transcurren unos 30'' en silencio]. *¿Y ésta la ha sacado la gente fácil o qué?*

I.- *¿Qué?*

Da.- *¿Ésta la han sacado?*

I.- *Bueno, algunos sí y otros no, en fin.*

Da.- *Es que no le pillo el truco para sacarlo. Si salir tiene que salir, yo creo, pero a ver.*

I.- *¿Y ahora qué estabas intentando?*

Da.- *Buscar dos números que al multiplicar me dieran por lo menos una primera cifra en 7 para más o menos orientarme. Pero como que eso es una miaja difícil.* [Tras 45'' en silencio llega a la solución correcta]. *59 por 3.*

I.- *59 por 3.*

Da.- *Serían 3 por 9, 27.... 3 por 9, 27, me llevo 2. 3 por 5, 15 y 2 que me llevo 7.*

I.- *¿Y cómo has llegado ahí, a sacar el 59?*

Da.- *Porque es lo que estaba intentando hacer desde el principio pero aquí me... he intentado hacer al revés. Pues he buscado un número que multiplicado por otro me diera la terminación en 7, primero, que eso es 3 por 9. Yo sabía que aquí ya tenía un 7, entonces tenía que buscar otro número que multiplicado por 3 me diera 17 o aproximado para que sumándole 2... entonces salía mejor el 5. Me daba 15 y 2, 17.*

I.- *Entiendo.*

Da.- *Es que es lo que estaba intentando hacer desde el principio pero no sé porqué se me ha ido la pinza.*

I.- Bueno, la siguiente.

Claramente, el alumno utiliza el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de un modo Analítico, aunque no como primera opción.

Respuesta de tipo 2c

Situación 3

Da.- Ayúdame de la calculadora para...

I.- Aquí tienes la calculadora. Entonces, tienes una multiplicación y te puedes ayudar de la calculadora para hacerla. La puedes utilizar como quieras.

Da.- Pero tengo que hacerla a mano. A mano, ¿no?, digamos.

I.- Tú la haces como quieras.

Da.- Directamente.

I.- Directamente o como tú veas.

Da.- [Introduce las cifras del multiplicando en pantalla]. Pues pongo 2, 2, 2, 4, 4, 4, 9, 9, 9, ..., y no me entra. Ahí está el truco. ¡Ay, qué pájaro! [Risas]. Bueno, pues vamos a ver, si yo pongo la exponencial tampoco me coge. Si pongo exponencial tampoco me entra.

I.- No, exponenciales no. Tú olvídate de las exponenciales.

Da.- Pues la hago a mano, directamente.

I.- Como quieras.

Da.- [Comienza a emplear el algoritmo estándar escrito de forma Técnica]. 9 por 4 son 36, me llevo 3. 9 por 4 son 36 y 3 serían 39, me sigo llevando 3... [Tras 25'' realizando cálculos en silencio]. Eso sería con el 4. Ahora hago la del 6, se suman y ya está.

I.- Bueno, pues hazlo.

Da.- ¿O no se hacían así? Sí se hacían así, ¿no? Yo es que hace ya un huevo de tiempo que no la hago. [Risas]. Para mí que sí se hacían así. Serían 6 por 9, serían 54... se corría un lugar así...

I.- [Transcurre 1' en silencio hasta obtener el resultado correcto aplicando el algoritmo adecuadamente]. ¿Ya está?

Da.- Sería eso, ¿no?

I.- ¿Y no se te ocurre emplear la calculadora para facilitar los cálculos?

Da.- [Permanece pensativo durante unos instantes]. Pues sí. Sí. ¿Te digo cómo?

I.- Sí.

Da.- Pues, por ejemplo, divido esto [el multiplicando] entre 2, se me queda un número más pequeño. Lo multiplico por 64 y luego lo multiplico otra vez por 2.

I.- ¿Y lo puedes hacer?

Da.- Yo creo que sí, ¿no?

I.- No sé.

Da.- Se mantiene la propiedad... no me acuerdo qué propiedad...

I.- Con la calculadora.

Da.- Con la calculadora no. Por ejemplo, la primera tendría que hacerla a mano, dividirlo entre 2, multiplicarlo por 64 y ya... con la calculadora.

I.- Bueno, pues ya está.

Da.- Si me hubiera traído la mía sí coge. La científica [risas]. La de la pantallaca.

Respuesta de tipo 3a y 3b'

Situación 4

Ningún diálogo destacable. El alumno fue determinando y corrigiendo los errores incluidos en cada una de las multiplicaciones tal como se muestra en el registro escrito.

Respuesta de tipo 4c**Situación 5**

No consideramos necesario establecer ningún diálogo complementario a la producción escrita. El alumno comprende de inmediato el enunciado y sin dudarlo aplica correctamente el algoritmo estándar escrito en la disposición de factores presentada.

Respuesta de tipo 5b**Situación 6**

Da.- [Leyendo el enunciado]. *Se han ocultado el multiplicando y el multiplicador, qué guay. ¿Sabrías determinar cuántas cifras tiene el multiplicador? Justifica tu respuesta.*

I.- *El multiplicador sabes lo que es, ¿no?*

Da.- *El de abajo.*

I.- *El de abajo.*

Da.- *Pues tiene que tener tres.*

I.- *¿Por qué?*

Da.- *Porque hay tres filas.*

I.- *Porque hay tres filas.*

Da.- *Claro. Tres, porque hay tres filas... [Risas] para sumar. ¿Cuántas cifras tiene el multiplicando? Justifica tu respuesta. Pues, pues, pues,... [Permanece en silencio unos 15'']. Como sale todo tan perfecto, o sea, que aquí no hay ningún numerillo más ni aquí otro que se pase, pues yo creo que tiene que tener... cuatro... cinco.*

I.- *Cinco. ¿Por qué?*

Da.- *Pues, porque... no sé, aparentemente sí. Pues, si por ejemplo... no sé, cuatro o cinco podía tener perfectamente.*

I.- *Cuatro o cinco.*

Da.- *Sí. Si tuviera más, pues esto sería más largo.*

I.- *¿Y cinco por qué? ¿Y cuatro por qué?*

Da.- *Cuatro porque, por ejemplo, a lo mejor el último número multiplicado por éstos [el multiplicador] pues da, a lo mejor, uno mayor que diez.*

I.- *¿Y cinco?*

Da.- *Cinco pues porque el número multiplicado por el multiplicador no diera el número superior a diez. Por ejemplo, 2 por 3, 6, o 2 por 4, tal. Que nunca... es que sale muy... no ves que sale...*

I.- *Entiendo.*

Da.- *Sale a pelo.*

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

Da.- ¡Ala, qué guay! Esto lo ponían en el colegio. [Leyendo el enunciado] A ver, en la siguiente multiplicación se ha ocultado el multiplicando. A pesar de ello, ¿podrías completar los cálculos? [Permanece en silencio un instante]. Pues no.

I.- Se trata de completar los huecos éstos.

Da.- Ya, ya. Pues... un número multiplicado por 3 que acabe en 5. Pues serían... aquí de cajón que aquí hay un 5 [unidades del multiplicando].

I.- Sí, pero en la tarea te recuerdo que no es necesario determinar esto [el multiplicador].

Da.- Ya, ya. Ya, hay que determinar esto [los huecos que ocultan cifras individuales].

I.- Vale, tú ya lo haces como quieras.

Da.- [Tras 25'' en silencio]. Joder, es que tiene tela esto, ¿eh?

I.- ¿Por qué dices que tiene tela?

Da.- Pues sobre todo para sacar el numerillo que vendría aquí ahora [decenas del multiplicando]. [Vuelve el silencio durante unos instantes]. Porque abajo tampoco tengo más pistas. [Transcurren 35'' en silencio]. Aquí de cajón que esto [el multiplicando] va a tener uno, dos, tres, cuatro y cinco cifras [conclusión extraída al completar con 0 el 2º resultado parcial]. La primera es un 5. [Permanece aprox. 1' 30'' reflexionando en silencio y a veces entre dientes]. Si tengo un 3 aquí y tengo un 5 por pantalones tengo que multiplicar por 5. De cajón. Y luego como aquí en ésta, si multiplico 3 por 5,... sería otro 5 [en el 3º resultado parcial]. ¿Y aquí cuándo me sale un 3? De 3 por 1... imposible.

I.- Tú verás, no sé.

Da.- ¿Esto tiene solución o me estás engañando?

I.- No, no. Tiene solución.

Da.- Tiene solución. [Retoma de nuevo el inicio de la secuencia algorítmica estándar]. Vamos a ver, si yo aquí tengo un 5 y aquí estoy multiplicando un 3, que multiplicaría al primer número, y un número multiplicado por 3 que me dé 5... 3 por 5, 15. Tiene que ser el 5.

I.- Bueno.

Da.- ¿Cómo que bueno? ¡Si no hay otra opción! A ver, para que el primer número multiplicado, o sea, me dé un 5 aquí... sin más pantalones tiene que ser por 5. 3 por 6, 18; 3 por 7, 21,... [Instantes de silencio] Y luego como aquí 3 por 5 serían otra vez 15 [ya sobre el 3º resultado parcial] y aquí este 3... ¿de dónde? ¿De 3 por 1 y la que me llevo me la como? [Tras otros 20'' de reflexión en silencio]. Esto no está bien.

I.- ¿Crees que no está bien?

Da.- Yo creo que no está bien.

I.- ¿Por qué?

Da.- Porque si.... Lo que te estoy diciendo. Si aquí tengo la primera cifra que me da, que me la das tú, de multiplicar el multiplicador 3 por el primer número de aquí, me da 5. O sea, un número multiplicado por 3 que la última cifra sea 5, es 5.

I.- Sí.

Da.- Entonces, si yo vengo aquí abajo [3º resultado parcial], cojo este multiplicador 3, me pongo a multiplicarlo por 5, relleno un hueco aquí con un 5 y este 3 aquí no podía estar.

I.- ¿Por qué?

Da.- Porque si fuera 3 por 1 sería un 4, esto me llevaba 1. Y si fuera 3 por 3 sería 1. A no ser que el número que haya ahí sea más gordo y como me llevo 1... 3 por 7, 21, tampoco podría ser. 3 por 3, 9, tampoco. 3 por 4... aquí hay un 4 entonces [toma 4

como decenas del multiplicando]. *Aquí hay un 4. Claro, 3 por 4, 12 y 1 que me llevo, 13 y para que aquí me dé un 8 tendría que ser un número multiplicado por 3 que me dé 7. Sería 9 y 1 que me llevo... 3 por 9, 27 y 1 que me llevo 28.* [Transcurren 1' 25'' más de comprobación y reflexión entre dientes hasta identificar cada una de las cifras del multiplicando]. *Ya está.*

I.- *Bien, pues la siguiente.*

Da.- *Me he atrancado al salir.*

En esta tarea el alumno se muestra condicionado por las cifras del multiplicando. Ha necesitado su determinación para completar la multiplicación.

También ha mostrado una fuerte dependencia en el orden de la secuencia algorítmica estándar. Así, en lo que respecta a “movimientos”, tan sólo ha sido capaz de desplazarse verticalmente por los tres productos parciales, en sentidos descendente y ascendente. En cada uno de ellos, sin embargo, se ha seguido el orden de pasos establecido, de izquierda a derecha, al igual que Karina (1º Bach.).

Respuesta de tipo 7b

Situación 8

I.- [Una vez resuelta la primera MCCD y antes de pasar a la segunda]. *¿Podrías explicar cómo la has resuelto?*

Da.- *Pues he cogido un número que multiplicado por 5 me dé 0, que hay un huevo. O sea, la última cifra digamos que sea 20, 30,..., hay un huevo. Entonces, he visto que aquí hay un 3, entonces la única manera que aquí me diera un 3, como el 5 o bien es, por ejemplo, 25, 30, 35, 40,... tiene que ser, por ejemplo, 30 o 40 o 50 para que me salga aquí 3. Y entonces me he ido aquí abajo y he visto que multiplicando el 6 que ya tenía por 4 eran 24 y aquí en la suma me daban 8, es decir, que aquí por pantalones tiene que tener 4. Y entonces pues 5 por 8 son 40 y te daba justo. Y eso ha sido más o menos el procedimiento.*

I.- *De acuerdo, ¿y la siguiente?*

Da.- *Pues vamos a verla. Aquí un número que multiplicado por 7 me dé 5 por pantalones tiene que ser el 5.* [Permanece unos 2'' reflexionando en silencio sobre la MCCD]. *Cualquiera de ellos podría valer ahí, cualquier número [decenas del multiplicador]*

I.- *Cualquier número.*

Da.- *Sí. Cualquier número que multiplicado.... Por ejemplo, el 2 lo podía poner perfectamente. Con los datos que tengo, sí.*

I.- *¿Y algún otro?*

Da.- *Pues el 4, el 6, el 8, el 0 [Risas].*

I.- *Entiendo.*

Da.- *Por ejemplo, si te pongo el 2: 2 por 5, 10; 2 por 3, 6 y 1 que me llevo 7. Por ejemplo, aquí saldría 9.*

I.- *La última.*

Respuesta de tipo 8c

Situación 9

I.- [Después de que el alumno haya leído el enunciado] *¿Por qué hay que llevarse?*

Da.- *Porque evidentemente para que la multiplicación sea correcta tienes que hacerlo así sin más pantalones. Porque tú dime a mí que, por ejemplo, aquí 3 por 6, 18,*

pongo el 8, o sea, no sería correcto. Porque la multiplicación no llega, no es... te lo voy a poner aquí [proporciona una respuesta escrita a la primera cuestión, tal como se muestra en el registro escrito]. [Indicio no-Formal].

I.- [Leyendo lo que ha escrito el alumno]. *Porque la multiplicación no es más que la repetición n veces.*

Da.- *Claro. [Instantes de silencio]. Esto sería 23 veces sumar 146. Entonces si no te llevas los... tienes que hacerlo así sin más pantalones si no no sería correcto.*

I.- *¿Y la (b)? ¿Por qué crees que se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? Es decir, el 3 por el 6 y el 3 por el 4 y el 3 por el 1...*

Da.- *¡Uf!, porque así es la regla de la multiplicación, qué quieres que te diga. Porque, vamos a ver, si yo tengo que sumar 146 veces, o sea, si tengo que sumar 23 veces 146... 146 pues serían... multiplicarlo por 3. [Permanece en silencio unos instantes]. ¡Yo qué sé! Porque así se hace, porque es la norma de la multiplicación [risas]. [Indicio no-Formal].*

I.- *¿Y la siguiente? ¿Por qué crees que se deben ir situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? Y además dejando un hueco. Con esto también abordamos la cuestión (d): ¿por qué se deja un hueco ahí?*

Da.- *Bueno, lo del hueco es porque, claro, vamos yo pienso, tiene que hacerse así porque si sumas 146, o sea, 146 lo sumas por ejemplo aquí en este caso 23 veces, te va a dar un número un mijada de grande. Si no te van a dar dos números de tres cifras, eso de cajón empezando por ahí.*

Y bueno, eso de ir sumando los resultados parciales uno debajo del otro, pues por lo mismo. Porque viene a ser lo mismo. La suma, o sea, viene a ser lo mismo la suma de 3 por 146 y 2 por 146 que sumar 23 veces 146. Viene a dar el mismo resultado. [Indicio no-Formal].

I.- *¿Y por qué se debe sumar al final todo, las cifras en columnas, para llegar al resultado?*

Da.- *Lo mismo porque la multiplicación no deja de ser.... Vamos, yo siempre he considerado la multiplicación una suma pero ahorrándote tiempo. No deja de ser básicamente la operación fundamental que es la suma.*

I.- *Y por eso se suma.*

Da.- *Sí, vamos yo pienso que sí. De todas maneras, claro, si después de multiplicar... multiplicar cada número por el número, o sea, el multiplicador, cada cifra del multiplicador por el multiplicando para que te dé el número exacto de veces 146, o sea, 23 veces la suma de 146, tiene que hacerse así, leche. No te puedo decir porqué porque no soy matemático. No sé explicártelo pero es de cajón. [Indicio no-Formal].*

I.- *De acuerdo, ¿conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar?*

Da.- *Pues la conmutativa y todas esas, ¿no?*

I.- *En el procedimiento, digo.*

Da.- *Ah, alguna propiedad. Pero, ¿de qué tipo?*

I.- *Matemática, aritmética.*

Da.- *Sí, la propiedad, por ejemplo...*

I.- *¿Se aplica ahí la propiedad, no sé, conmutativa como tú has dicho?*

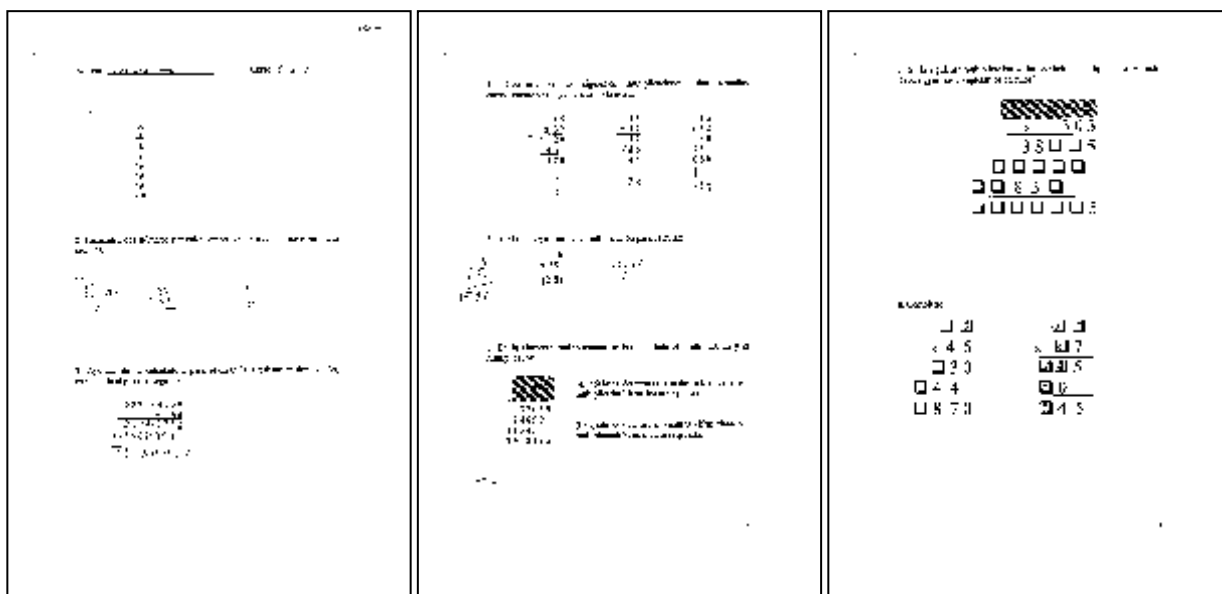
Da.- *Sí. Claro, da lo mismo sumar 2 y 3 que 3 y 2, primero, y luego etcétera, etcétera. Que multiplicar 3 por 6 o 6 por 3.*

I.- *Pues ya está. Ya hemos terminado.*

En las respuestas dadas observamos que no se ha producido ningún indicio claro con el que poder afirmar que el alumno posee un nivel de empleo Formal (fundamental) del algoritmo estándar escrito. Las explicaciones transcurren alejadas de las razones reales que justifican el funcionamiento del método de cálculo.

Respuesta de tipo 9a

Antonio (1º ASI) [25/04/2003]



Situación 1

Investigador.- [Una vez hecho el cálculo] *¿Cómo lo has hecho? Explícame.*

Antonio.- *He contado las cifras que hay...*

I.- *Sí.*

An.-... *y lo he multiplicado por... ¿Como son todas iguales! Lo he multiplicado por las que hay.*

I.- *¿Qué has multiplicado, por ejemplo?*

An.- *Hay 8 cifras de 6 pues lo he multiplicado por 6 por 8. Espérate, ¿cuántas hay? Hay 7. Lo he multiplicado por 6 por 7, 42. A lo que te llevabas pues le sumas los 1, como son todos 16.*

I.- *¿Y se te ocurre hacerlo de otro modo?*

An.- *¿Cómo? Sumar los 6 más 6 más 6 más 6 más 6... Ya está.*

I.- *De acuerdo, siguiente tarea.*

Respuesta de tipo 1a

Situación 2

An.- [Riéndose] *¡Yo no sé hacer esto!*

I.- *¿Por qué? Tú intenta hacer lo que puedas.*

An.- [Tras 15'' aprox. de reflexión en silencio]. *Ni idea. Dos números que multiplicándolos te dan 177. ¿Y que ambos sean distintos de 1?*

I.- Claro, para que no sea 177 por 1, pues ya tendrías los dos números. Tienen que ser dos números naturales, o sea sin coma, que al multiplicarlos de 177.

An.- [Permanece en silencio]

I.- ¿Qué se te ocurre hacer? Puedes escribir aquí todo lo que quieras.

An.- Dividiéndolo entre 2 salía un número que multiplicándolo, pero... [Pasados unos 35'' en silencio]. ¡Ni idea!

I.- ¡Qué!, ¿no se te ocurre nada?

An.- Pues, ir probando números.

I.- Ir probando números.

I.- [Transcurren 15'' en silencio] ¿Qué estás pensando?

An.- Haciendo la división, pero esta división no sale. [Otros 15'' aprox. en silencio] ¡No me sale!

I.- ¿No?

An.- Ni idea.

I.- Si quieres pasamos a la siguiente.

An.- [Continúa insistiendo; pasan unos 20''] Haciendo una multiplicación...

I.- A ver, ¿qué estás pensando ahora?

An.- Buscando números.

I.- Buscando números.

An.- [Instantes de silencio] Es que te lías ahí buscando... De ésta paso.

I.- Bueno...

An.- ¡No voy a sacarla!

I.- Pasamos a la siguiente.

An.- Sí.

Comienza empleando el algoritmo estándar escrito de la división, desiste y considera la posibilidad de probar multiplicando (indicio de uso Técnico del algoritmo). Desiste también, por tanto:

Respuesta de tipo 2b

Situación 3

I.- Mira, te explico. Aquí tienes una calculadora por si la quieres utilizar para realizar esa multiplicación. El objetivo es hacer esa multiplicación y puedes utilizar para ello la calculadora.

An.- No me acuerdo ni de multiplicar...

I.- ¿Qué has hecho?

An.- Multiplicar esto... que es para no equivocarse. [Multiplica con calculadora 4 por 9, unidades del multiplicador por unidades del multiplicando].

I.- 9 por 4 has multiplicado con la calculadora.

An.- [Abandona la calculadora y durante 1'10'' realiza la multiplicación aplicando el algoritmo estándar escrito]. Ya está.

I.- Ya. O sea, la calculadora no te ha servido para nada.

An.- [Asiente] Puff.

I.- Nada más que para hacer 9 por 4, 36.

An.- Sí.

I.- ¿Y lo podías haber hecho de otro modo?

An.- Introduciendo todos los números y multiplicando por 64, ¿no?

I.- ¿Cómo?

An.- Introduciendo las cifras en la calculadora.

I.- Bueno, inténtalo.

An.- [Lo comprueba] *No se puede introducir todos los números... No entran.*

I.- No entran.

An.- [25'' de nuevas comprobaciones] *No entra. He quitado el 2 éste [cifra del multiplicando de mayor valor relativo] pero da lo mismo.*

I.- ¿Cómo?

An.- *He quitado el 2 para que entrara... por todas esas cifras pero sale lo mismo [esto es, siguen sin entrar las cifras].*

I.- Bueno, siguiente.

Respuesta de tipo 3a y 3b'

Situación 4

Ningún diálogo destacable. El alumno resuelve con éxito la tarea.

Respuesta de tipo 4c

Situación 5

An.- Multiplicarlo.

I.- Se trata de multiplicar eso. Sí.

I.- [Tras obtener el alumno el resultado correcto] ¿Cómo lo has hecho?

An.- Como si fuera la multiplicación corriente.

I.- Como si fuera la multiplicación corriente.

An.- Normal, éste arriba [el 251] y éste abajo [el 6].

I.- ¿Y lo podías haber hecho tal y como están dispuestas las cifras? O sea, ¿aplicar el algoritmo tal como están las cifras?

An.- Así, como lo he hecho.

I.- ¿Cómo?

An.- Conforme lo he hecho ahora mismo.

I.- Sí, pero me has dicho que lo que has hecho ha sido darle la vuelta a las cifras, ¿no?,...

An.- Sí.

I.- ... para multiplicar. Pero yo digo si puedes aplicar el algoritmo sin darle la vuelta.

An.- Sí, también.

I.- ¿Sí? Pues hazlo. Venga, inténtalo hacer ahí al lado.

An.- ¿Sin darle la vuelta?

I.- Aquí al lado. Sí, utilizar el algoritmo para multiplicar eso.

An.- No te entiendo.

I.- Vamos a ver...

An.- Yo lo he hecho ahora mismo así, como si fuera... nada, éste [6] por éste [1], éste [6] por éste [5] y éste [6] por éste [2].

I.- Sí, pero lo que has hecho, según me has dicho, ha sido multiplicar el 251 por el 6, ¿no?

An.- Sí.

I.- 6 por 1, 6; después, 6 por 5, 30,... Yo te digo que intentes multiplicar el 6 por el 251 aplicando el algoritmo.

An.- Eh, es que no lo entiendo.

I.- Esto es lo que has hecho. En realidad has hecho esto: has multiplicado 6 por 1, 6 por 5 y 6 por 2. Yo te digo que si eres capaz de multiplicar el 1 por el 6 y... en fin,

aplicar el algoritmo, aplicar el método que tú conoces para multiplicar pero en esa disposición.

An.- Como está.

I.- Ajá.

An.- Haciendo esto: 1 por 6... y sale lo mismo.

I.- Pues nada, pasamos a la siguiente.

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

An.- Hay que... hay que dar la respuesta. A ver si se puede hacer la cuenta, ¿no?

I.- ¿Cómo?

An.- La cuenta, que se puede hacer, ¿no?

I.- Vamos a ver, aquí lo que te preguntan es si sabrías determinar cuántas cifras, no cuáles son las cifras, sino cuántas cifras tiene el multiplicador, que es el de abajo. Y el multiplicando es el de arriba.

An.- Ya, ya.

I.- [Pasados 20'' sin decir nada] ¿Entiendes la pregunta?

An.- Sí, sí, sí. El de arriba nos daría siete.

I.- El de arriba siete cifras, ¿por qué?

An.- [Tras 15'' en silencio]. Por el resultado, porque son siete cifras el resultado, ¿no? Y el de abajo cinco.

I.- Y el de abajo cinco.

An.- Sí.

I.- ¿Y por qué?

An.-... por esto [señalando al número de cifras de los resultados parciales]. Cinco cifras cada...

I.- Cada fila.

An.- Sí.

I.- En cada fila.

An.- [Tras un instante de silencio observando la multiplicación] Bueno, puede tener menos porque si te puedes llevar de aquí... tiene que ser exacto.

I.- Entonces.

An.- [Toma como referencia las cifras del 1^{er} resultado parcial para su explicación] Aquí pueden ser un 3 o 37. Tendría tres cifras.

I.- Tres cifras.

An.- Claro.

I.- Qué [tiene tres cifras].

An.- Pues, la de abajo.

I.- La de abajo tres cifras. ¿Por qué, me has dicho?

An.- Porque aquí... aquí te puede dar 3 justo o puede ser 37, al multiplicarlo.

I.- Entonces tres cifras.

An.- Sí.

I.- Bueno, pasamos a la siguiente.

Respuesta de tipo 6a

Situación 7

I.- ¿Entiendes la cuestión? Se trata de completar los huecos. No es necesario determinar esto [las cifras del multiplicando] si no completar los huecos.

An.- Si no completas esto no sabes lo huecos tampoco. [Pasados unos 30'' en silencio]. ¿Esto es difícil!

I.- ¿Sí?

An.- [Tras 15'' en silencio y murmullo] Si no busco los números de arriba yo no lo saco.

I.- ¿Perdón?

An.- Si no busco los números de arriba que no lo saco. [30'' aprox. sin decir nada] Buscando lo de arriba, es que si no. 3 por 5, 15, es que no se sabe si te llevas 1 o no. [Otros 20'' de silencio prolongado]

I.- ¿Qué estabas pensando?

An.- Pues, hay que buscar los números de arriba. Así, a simple vista no sería capaz.

I.- Bueno, si quieres pasamos a la siguiente.

An.- Si tengo que buscarlos y... Es sin tener que buscarlo, no lo saco.

Respuesta de tipo 7a**Situación 8**

An.- [Se ríe].

I.- ¿Cómo?

An.- Que ésta tampoco la voy a sacar.

I.- Que tampoco la vas a sacar. [Pasados 35'' aprox. de reflexión en silencio] ¿Por qué has puesto el 6 ahí?

An.- 6 por 5, 30... y 6 por 4, 24. [Tras otros 20''] Tiene que ser el 6.

I.- Tiene que salir 6.

An.- Claro, porque si tienes 5 por 1, 5; que diga, 5 por 2, 10, ya te llevarías 1 y 5 por 1... Espérate, todavía si haces un... 5 por el número que sea, si le sumas... como te da el número par siempre, le sumas 1 y no te puede dar un 3. Es 20, sumas 1, es 21.

An.- [Tras 50'' observando la misma tarea en silencio] ¿Estaría mal?

I.- ¿Cómo?

An.- ¿No estaría mal?

I.- Estaría mal. ¿Por qué dices eso?

An.- 5. Por ejemplo, si ponemos aquí un 1 [decenas del multiplicando]: 5 por 1, 5. Y al ser esto un 30, 5 más 4 serían 9, entonces ya no sería un 8. Yo creo que está mal. [Manifiesta un uso Técnico del algoritmo incorrecto].

I.- Está mal. Por lo que me acabas de decir, ¿no? Bueno, si quieres, puedes pasar a la siguiente.

An.- [Después de 35'' aprox. analizando en silencio la segunda M CCD] También está mal.

I.- ¿También está mal?

An.- Creo que sí.

I.- A ver, ¿por qué?

An.- Para que te dé un 5... [Instantes de silencio] Aquí busco un 5: 7 por 5, 35.

I.- Sí.

An.- Se pone aquí un 3... [Transcurren 30'' de silencio]

I.- Pones un 3 ahí...

An.- Sí.

- I.-**...al lado del 5, ¿por qué?
An.- Pues... pones 7 por 5, 35... debía estar mal también. Al sumarle el 0 éste, 4... [Permanece en silencio durante 15'' aprox.] Claro, si no te quedaran ninguno, si fuera 7 por 1, 7, al sumarle 3 ya serían 10 y no daría el resultado. Sumarle el 0 éste...
- I.-** Perdona, ¿cómo?
An.- Sumarle el 0. Bueno, si es 7 por 1...
I.- Sí.
An.- 7, le sumas 3, serían 10; sería un 0. [Instantes de silencio] Puede ser 24.
I.- [Tras 30'' de cálculos en silencio] ¿Qué número es ese?
An.- 4 [decenas del primer resultado parcial].
I.- Ah, un 4.
An.- 7 por 5, 35, me llevo 3. 3 por 7, 21 y 3, 24... que ya coincidiría.
I.- Perdona, ¿cómo has obtenido el 24? ¿O por qué has puesto un 3 ahí? [Decenas del multiplicando]
An.- 7 por 5, 35, te llevas 3. 3 por 7, 21 más 3, 24, que coincidiría con este 4.... No, no vale.
I.- No vale, qué.
An.- Que no es así. [Continúa en silencio unos 15'' más].
I.- A ver, explícame.
An.- Te daba 2 por 5, 10, no te llevas ninguna. [Fragmento ininteligible].
I.- ¿Cómo?
An.- He multiplicado también éste. [Está en la búsqueda de las decenas del multiplicador].
I.- ¿Y entonces?
An.- Te llevarías ahora... éste es 7.
I.- ¿Ya está?
An.- Sí. Se pasaría de 5, 2 por 5 ya serían 10 y ya te faltaría un cuadro.
I.- ¿Cómo?
An.- Si es por 2 por 5, aquí por ejemplo...
I.- Si hubieses puesto, ¿dónde?
An.- Aquí un 5 [decenas del multiplicador].
I.- En vez de un 3.
An.- Sí. Si es 2 por 5, 10, faltaría un cuadro ya.
I.- Te faltaría un cuadro. Ya... bueno ésta es la última.

Se reconocen algunas muestras no permanentes de uso Analítico del algoritmo, por tanto:

Respuesta de tipo 8b

Situación 9

- I.-** Vamos a ir respondiendo una por una: ¿Qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse?
An.- No sé, ir continuando, haciendo la resta, ¿no? Para que salga bien. ¡Si no te la llevas!... Para que sigas... para que valga la multiplicación.
I.- Para que valga la multiplicación.
An.- Claro, para que tenga más sentido. Si no te llevas... sale mal la multiplicación.
I.- ¿Y por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? ¿Por qué se tiene que multiplicar el 3 por el 6, el 3 por el 4 y el 3 por el 1?

An.- Porque me lo han enseñado así.

I.- Porque te lo han enseñado así.

An.- Claro, claro. De otra forma no sería... no se podría hacer. Como me lo han enseñado. Si me lo hubieran enseñado de otra forma, pues... sabría hacerlo de otra forma pero como me lo han enseñado así, pues así.

I.- ¿Y la pregunta (c)? ¿Por qué se van situando los resultados parciales en filas, uno debajo del otro? Es decir, ¿por qué se van colocando...?

An.- Sí.

I.- ¿Y por qué se deja un hueco ahí? ¿Qué significado tiene ese hueco?

An.- Sería un 0, sería un 0.

I.- ¿Por qué es un 0?

An.- Como no hay nada, pues se le asigna un 0, no tiene sentido. Ese hueco... se le asigna un 0.

Para situar las cifras una debajo de otra, pues... ¿es como me lo han enseñado! Me lo han enseñado así, pues así. Claro.

I.- Sí, ¿por qué se colocan [las cifras] una debajo de otra y por qué se suman después en columnas?

An.- Como me lo han enseñado; es como una regla. [Permanece en silencio].

I.- Bueno, ¿conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de la multiplicación, en este método de cálculo? Alguna propiedad que...

An.- ¿Matemática?

I.- Sí.

An.- No sabría decírtelas cuales son. Explicarlas. La conmutativa y la... ¿cuál es la otra? La asociativa.

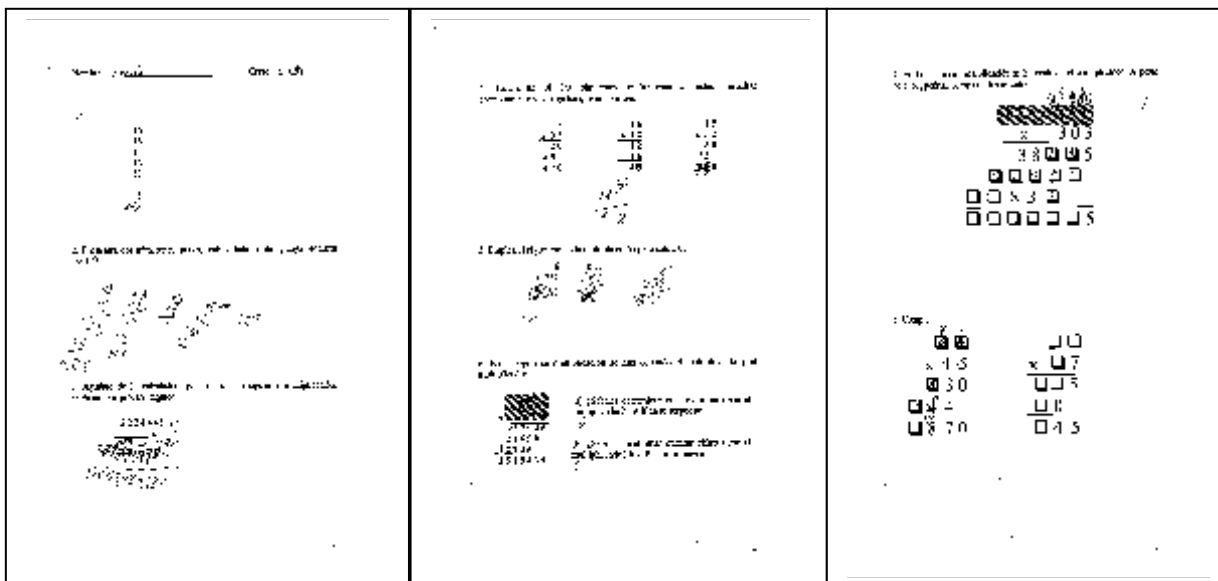
I.- La asociativa. ¿Y cuáles son esas?

An.- Eso es lo que no sé, ya. Eso ya no me acuerdo... La distributiva también está pero esa no me acuerdo ya. Hacía tiempo que no...

I.- Bueno, pues ya está. Ya hemos terminado.

Respuesta de tipo 9a

Sergio (1º ASI) [28/04/2003]



Situación 1

Sergio.- *Ya está.*

Investigador.- *¿Cómo lo has hecho? Explícame.*

Ser.- *Pues nada, pues ésta he contado los números. Son: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. 7 por 6, 42, 4 y ya pues lo he sumado.*

I.- *¿Has sumado qué?*

Ser.- *El 4. Cinco, seis, siete, ocho,... Así, los 1.*

I.- *Bueno, ¿y lo podías haber hecho de otro modo?*

Ser.- *¡Claro! Sumar todos los 6 y después sumar... el valor que quede pues sumarlo a los 1. ¡A ver si me he equivocado!*

Respuesta de tipo 1a**Situación 2**

Ser.- *¿Hay que hacer la multiplicación y todo eso para que te dé el producto o es pensando ya está para que te dé dos números 177?*

I.- *Tienes aquí todo el espacio que quieras para escribir. Puedes hacer lo que quieras y puedes escribir todo lo que quieras. [Transcurren unos 35'' en silencio]. ¿Qué estás intentando?*

Ser.- *Dice: encuentra dos números naturales, ambos distintos de 1, cuyo producto, al multiplicar, te dé 177, ¿no? Pues ya está, pues a ver si... ¿es eso?*

I.- *Sí, bueno. [Tras 25'' en silencio] ¿Y por qué multiplicas 15 por 15 y 13 por 13?*

Ser.- *Pues no sé, por... nada, por multiplicar.... Es que para mí que no entiendo la pregunta.*

I.- *O sea, ¿qué es lo que estás intentando?*

Ser.- *Multiplicar dos números para que dé 177, pero tú puedes multiplicar, yo qué sé..., por ejemplo, 10 por 10 más 77 y te da 177. Pero eso no es lo que pide, ¿no?*

I.- *No, te están pidiendo sólo dos números que si los multiplicas da 177. Y tienes que averiguar esos dos números. [Transcurren aprox. 55'' en silencio]. ¿Y ahora qué estás intentando?*

Ser.- *Estoy intentando sacar el 7 primero. De 177, el 7: 2 por 3, 6... [Unos 15'' en silencio]. ¡Joder, no me sale! [Otros 15'' más de reflexión en silencio]. Qué tontería, es que no sé... para mí que me estoy confundiendo, puedo multiplicar 107... por 10. No, por 10 no. Multiplicar... 10 por 17. No, tampoco. [Instantes de silencio]. Joder, no lo saco.*

I.- [Tras 15'' en silencio]. *Y ahora 13 por 12 has intentado.*

Ser.- *Claro, pero es que yo estoy intentando sacar el primer 7, desde el último 7 quiero decir, pero como todos salen pares...*

I.- *Bueno, si quieres pasamos a otra.*

Ser.- *Paso a otra. ¡Me cago en diez!*

Esta tarea se ha intentado resolver empleando el algoritmo de un modo Técnico. Se observa un intento de multiplicar números con la intención de obtener al menos un resultado con 7 unidades. Aunque parece que existe un leve indicio de empleo Analítico lo cierto es que el uso que el alumno hace del algoritmo es Técnico.

Respuesta de tipo 2b

Situación 3

I.- De lo que se trata es de hacer esa multiplicación ayudándote de la calculadora. La puedes utilizar para...

Ser.- ¿Puedes poner estos números por 64 y ya está? ¿O tienes que hacerlo...?

I.- Como quieras. Puedes utilizar la calculadora. [El alumno permanece en silencio unos 45'' intentando usar la calculadora]. A ver, ¿qué estás haciendo?

Ser.- Pues multiplicar primero el primer 9. 4 por 9, 36, me llevo 3 y ya he multiplicado antes desde aquí... pues por 4 [el número 22244499 por 4].

I.- O sea...

Ser.- 4 por 9, 36, son 3, pero después multiplico 4 por 9, 36. Ya te tendrías que...

I.- ¿Pero con la calculadora qué has hecho?

Ser.- Multiplicar 22244499 por 4, ¿no? Y poner ya el 36, le sumas ya el 6; 4 por 9...

I.- El 6. Le sumas el 6.

Ser.- No, el último 6 que te haya dado entre el 2 y el 9 por 4, le sumas el 6 y el 3. 6 más 3, pones 9 y ya te sale todo lo otro. ¿No? Yo qué sé, ya es que....

I.- [Transcurren 40'' más en silencio en los que intenta emplear la misma estrategia con las decenas del multiplicador. Sin embargo, en esta ocasión la calculadora le muestra un error (E) al multiplicar 22244499 por 6]. ¿Y ahora?

Ser.- ¿Hay que usar la calculadora obligatoriamente?

I.- Bueno, tú verás. Tú la puedes utilizar para lo que quieras.

Ser.- No sé si es que este ejercicio te pide que uses la calculadora para hacerlo tú de diferente forma o no la uses y lo pones de toda la vida.

I.- Como quieras. [Tras 45'' de acciones en silencio]. ¿Y ahora qué es lo que has hecho después de haber multiplicado el 4?

Ser.- [Esta vez sin calculadora]. Pues multiplicar el 6 por lo de arriba. [Permanece en silencio durante 40'' aprox.] Vamos a hacerlo otro día.

I.- ¿Por qué?

Ser.- Porque no estoy yo espabilado hoy.

I.- No te preocupes. ¿Te has puesto nervioso?

Ser.- Joder, que no... estoy tonto. Me cago en diez. [Continúa con la resolución en silencio. Transcurren unos 50'']. ¡Es que no sale igual! [Compara la parte de mayor orden del resultado obtenido al aplicar el algoritmo estándar escrito con el que le muestra la calculadora].

I.- ¿Qué tiene que salir igual?

Ser.- Por lo menos los dos últimos de la calculadora, ésa y ésta, tiene que salir igual. ¿No? [Tras 1' 55'' en silencio completando los cálculos con el uso del algoritmo]. ¡Ya está!

I.- ¿Ya?

Ser.- Yo qué sé, me había equivocado.

En esta situación se manifiesta un uso Técnico del algoritmo estándar escrito de la multiplicación que resulta incorrecto. Asimismo, a la hora de realizar el producto con calculadora se observa una descomposición del multiplicando que, sin embargo, no interpretamos como un indicio de uso Formal del algoritmo pues en ningún momento se tiene en cuenta el orden de las cifras. Esta estrategia la entendemos más bien como manifestación de un empleo Analítico del algoritmo ya que lo que en verdad hace el alumno es romper el orden estándar de la secuencia algorítmica para determinar primero las cifras de mayor orden del primer resultado parcial.

Respuesta de tipo 3a y 3a'

Situación 4

Ser.- [Tras realizar la tarea]. *Ya está.*

I.- *Ya está, ¿no?*

Ser.- *Sí.*

I.- *O sea, que hay dos mal y...*

Ser.- *La primera bien y las dos últimas mal.*

El alumno sólo identifica los errores de la segunda y tercera multiplicación. Reconoce, sin embargo, que la primera multiplicación es correcta.

Respuesta de tipo 4b**Situación 5**

Ser.- *¿El algoritmo de la multiplicación? ¿La multiplicación?*

I.- *Sí, claro.* [Demora unos 25'' en obtener el resultado correcto, pero aplicando el algoritmo para el producto 251 por 6 y no para 6 por 251]. *¿Aquí qué es lo que has hecho? Explícame.*

Ser.- *Multiplicar... 6 por 251.*

I.- *¿Podrías multiplicar 251 por 6? Aunque ya sabemos que es lo mismo, ¿podrías hacerlo?*

Ser.- *Yo creo que el resultado sería el mismo. Si tú multiplicas 1 por 6, 5 por 6, 2 por 6, te da lo mismo.*

I.- *El resultado es el mismo. Pero yo te estoy pidiendo: bueno, sabes multiplicar 6 por 251 empleando el método que conoces para multiplicar...*

Ser.- *Entonces no puedes, ¿no? Porque te tienes que llevar 1 por 6, luego 5 por 6 son 30, tendrías que poner 30, no llevarte 3 para sumarlo después....* [Indicio de aplicación del algoritmo en la disposición inicial de 6 por 251].

I.- *¿Cómo sería?*

Ser.- *Así, de aquí a aquí. Tú en vez de... son 6 por 251. Tú dices de 6 por 251, pues pones 6 por 1, 6. Y ahora 6 por 5 son 30, el 3...no, tú tendrías que poner 30 aquí. Tú no puedes sumarle después, poner otra vez... hombre, sí se puede.*

I.- *¿Cómo? Vamos a ver, ¿ese 30 por qué lo pones ahí?* [El 30 tachado en la segunda multiplicación del registro escrito. Observamos una aplicación incorrecta del algoritmo en la disposición 6 por 251].

Ser.- *Lo pongo porque 6 por 2 son 12 pero.... 6 por 2 son 12, puedes sumar 3 aquí también y que te salga igual que el resultado de aquí. Pero...*

I.- *A ver, no lo entiendo muy bien. Se trata de multiplicar 6 por 251 empleando el algoritmo, el método de cálculo que todo el mundo conoce.*

Ser.- *Sí.*

I.- *¿Cómo sería?*

Ser.- *Multiplicas el 1 por 6 y el 5 por 6 y el 2 por 6 y te sale el resultado. Pero es que me has preguntado antes que si esto lo puedes multiplicar el 6 por 251.*

I.- *Sí, sí.*

Ser.- *Sería lo mismo sólo que 6 por 1 son 6 y 6 por 5 son 30. Es que yo no sé si puedes hacer, después sumarle.... Sí puedes, claro, mentalmente sí puedes pero 6 por 2 son 12, habría que sumarle el 3 de 6 por 5, 30.*

I.- *Vamos a ir por partes. Tú aquí en realidad lo que has multiplicado es 251 por 6, ¿no?*

Ser.- *Claro.*

I.- *Has cogido el 6 y has hecho 6 por 1, 6; 6 por 5, 30, me llevo 3; 6 por 2, 12 y 3, 15. Bien, ahora te pregunto que si eres capaz de multiplicar 6 por 251 aplicando el método de cálculo que conoces. ¿Sabes lo que te estoy preguntando o todavía no te queda claro?*

Ser.- *Sí. Es que el resultado sale lo mismo 6 por 251 que 251 por 6.*

I.- *Sí, estamos de acuerdo que el resultado va a salir lo mismo.*

Ser.- *Si eso es lo que le estaba explicando antes: 5 por 6 son 30, me llevo 3 aquí si hubiese más números pero como es... el de abajo es mayor que el de arriba se... es que no sé como explicarlo.*

I.- *Puedes escribir aquí, ¿eh?*

Ser.- [Permanece en silencio unos 35'' en los que vuelve a multiplicar con el algoritmo 251 por 6 pero en la disposición de 6 por 251]. *Es que no sé lo que pides. Si el resultado sale lo mismo, la multiplicación da igual pedir multiplicar un número por otro, si va a salir lo mismo.*

I.- *Bueno, pasamos a la siguiente.*

El alumno se muestra incapaz de aplicar el algoritmo estándar escrito en la disposición de cifras presentada. El indicio mostrado en la explicación no llega a materializarse en una aplicación correcta.

Por lo observado en las situaciones 3, 4, y 5 podemos afirmar que este alumno manifiesta una comprensión limitada, en términos de empleo del algoritmo, en lo que respecta a la faceta Técnica del mismo.

Respuesta de tipo 5a

Situación 6

Ser.- *Puede haber, por ejemplo, aquí... [permanece unos 15'' en silencio] tres y cuatro.*

I.- *¿Para el multiplicador?*

Ser.- *Para el multiplicador tres.*

I.- *¿Por qué?*

Ser.- *Porque hay tres... tres filas de.... Claro, tú multiplicas tres tienes que poner tres.*

I.- *Entiendo.*

Ser.- *Y el multiplicando...*

I.- [Transcurren aprox. 40'' en los que el alumno permanece en silencio]. *¿Del multiplicando cuánto dijiste antes? ¿Cuatro?*

Ser.- *Claro... pero no lo sé.*

I.- *¿Por qué dijiste cuatro?*

Ser.- *Pues yo creo que es que el número, el resultado del número no es muy mayor. Si tú multiplicas tres números y cuatro.... [Instantes en silencio] Puede ser tres también. Son tres y tres.*

I.- *Tres y tres.*

Ser.- *Sí.*

I.- *¿Tres por qué?*

Ser.- *Al multiplicar los tres es por esto, porque hay tres filas, aquí debajo.*

I.- *Sí, eso lo he entendido.*

Ser.- *El multiplicando porque...*

I.- *El multiplicando tres también.*

Ser.- *Sí.... No.... Cinco. Cuatro o cinco.*

I.- Cuatro o cinco. ¿Y ahora por qué cuatro o cinco?

Ser.- Multiplicar tres, el primer número por otro, puede ser que se lleve una o que no se lleve. Éstas son las filas, pues cuatro o cinco. Se puede llevar y que sea cuatro o que no se lleve.... No, al revés. Que no se lleve y sean cinco o que se lleve y sean cuatro.

I.- Entiendo.

Ser.- Son tres [multiplicador] y aquí pues... creo que son cuatro [multiplicando].

I.- ¿Ya no cinco?

Ser.- No creo porque los números no son muy mayores.

I.- Bueno, pasamos a la siguiente.

Respuesta de tipo 6b

Situación 7

I.- ¿Entiendes la tarea?

Ser.- Sí.

I.- Se trata de completar los huecos éstos.

Ser.- ¿Esta no? Esta sí, ¿no? [En referencia al multiplicando].

I.- No, eso está ocultado. En esta situación, con el multiplicando oculto, se trata de determinar los huecos éstos. [Transcurren aprox. 1' 40'' en silencio, en los que el alumno intenta determinar las cifras del multiplicando siguiendo la secuencia algorítmica estándar]. A ver, ¿qué estás intentando?

Ser.- Como 3 por 5 son 15, pones 15 aquí pues para que te salga.... 3 por 9, 27, te puedes llevar 2 y ya sumar...buscas un número para que te sume 8.

I.- Entiendo. [El alumno sigue empleando la misma estrategia durante 1' 20'' aprox., en los que se mantiene en silencio]. ¿Qué números has obtenido ahí? [Cifras del multiplicando].

Ser.- 1295.

I.- ¿Y por qué has puesto 1295?

Ser.- [Reflexión sobre el primer producto parcial] 3 por 5, 15, me llevo 1. 3 por 9, 27,... no me.... ¡Ostia es verdad! Entonces 9 no es aquí. 3 por 5, 15, me llevo 1. 3 por 0, 0 y 1, 15. 3 por 9, 27, pones 7. El 2: 3 por 2, 6 y 2, 8. Y 3 por 1, 3.

Y ahora con esto tienes que hacer todos los otros de abajo. Con el mismo. Claro y ya no sale.

I.- [Tras aprox. 35'' de silencio]. ¿Y ahora qué estás haciendo?

Ser.- Pues multiplicar el 3 [centenas del multiplicador] por el multiplicando que yo he hecho. Multiplicar el 3 por el multiplicando que yo he hecho, en principio sí sale, pero luego esto al multiplicar por el 9 ya no sale. [Reflexión en el tercer producto parcial] 3 por 5, 15, te llevas 1. Es 0, 3,..., pues entonces éste no es.

[Tras unos instantes de reflexión en silencio desiste de la tarea y decide pasar a la siguiente].

Respuesta de tipo 7a

Situación 8

I.- ¿Qué cifras has puesto ahí?

Ser.- El 26. [Secuencia estándar] 5 por 6, 30, te llevas 3. 5 por 2, 10, 130. 4 por 6, 24, te llevas 2. 4 por 2, 8... ya no sale éste.

I.- [Tras 45'' de silencio]. ¿Qué problema tienes?

Ser.- *Pues multiplicar el 26 por el 4 ya no te sale aquí 4. 4 por 6, 24, es éste, te llevas 2. 4 por 2, 8 y 2, 10 tienes que poner.*

I.- *Entiendo.*

Ser.- [Transcurren unos 30'' en silencio]. *El 6 es fijo.*

I.- *¿Por qué?*

Ser.- *Porque 5 por 6, 30, no hay otro que salga... multiplicando por 5 que te dé de última cifra 0.*

I.- [Tras 1' 10'' de reflexión en silencio]. *¿Y ahora qué sigues intentando?*

Ser.- *Pues estoy buscando un número que dé en éste, 4. Pero no lo busco. 5 por 6, 30...*

[Abandona la tarea].

Las tareas 7 y 8 no son resueltas con éxito. Observamos que el alumno manifiesta una gran dependencia en el orden de la secuencia algorítmica, circunstancia que le impide determinar cifras ocultas. No se muestran indicios claros de que se utilice el algoritmo de un modo Analítico.

Respuesta de tipo 8a

Situación 9

Ser.- *¿Qué sentido tienen las llevadas?*

I.- *Vamos a ir contestando una por una las preguntas. La primera dice: ¿qué sentido tienen las llevadas? Es decir, ¿por qué hay que llevarse?*

Ser.- *Pues tiene sentido las llevadas porque.... Es que, a ver, tiene sentido porque al pasar el límite de 10.... Multiplicas un número por otro número y pasas el límite de 10, pues ya el próximo número le tienes que sumar la primera cifra del... si son dos números. Por ejemplo, si es 10, el 0 lo dejas y el primero lo tienes que sumar al otro, al otro número. Para llevarte la cifra, así no te confundes tampoco. [Indicio de uso Formal].*

I.- *Así no te confundes tampoco.*

Ser.- *No te confundes porque si lo haces mentalmente es casi imposible hacer 246 por 23 sin llevarte, sin hacer las llevadas.*

I.- *¿Y por qué se tiene que multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? ¿El 3 por el 6, el 3 por el 4, el 3 por el 1...?*

Ser.- *Es que es como lo que he dicho antes. Puedes hacerlo multiplicar 146 por 3 de cabeza, ¿no? En vez de hacerlo escrito lo puedes hacer de cabeza, pero puedes equivocarte más fácilmente haciéndolo de cabeza que escrito. [No-Formal].*

I.- *¿Y cómo sería de cabeza?*

Ser.- *Sería como te lo han enseñando de chico, con llevadas y todo eso. Pues, 3 por 6, 18, me llevo 1 y todo eso.*

Dice: ¿por qué se debe multiplicar cada cifra del multiplicador con cada cifra del multiplicando? También porque son unidades. 3 por 6, 3 por 4 y 3 por 1. Tienes que hacerlo poco a poco.

I.- *Tienes que hacerlo poco a poco.*

Ser.- *Hombre, si sabes hacerlo...*

I.- *Y después el 2 por el 6, por el 4 y por el 1...*

Ser.- *Pues lo mismo que el 3. Es que no sé a qué quieres llegar con las preguntas estas. ¿Si quieres que te explique por qué se tiene que multiplicar de uno en uno o por qué es así?*

I.- Sí. ¿Por qué es así? O si quieres, la pregunta siguiente: ¿por qué crees tú que se van situando estos resultados [resultados parciales] uno debajo de otro? Después de multiplicar por el 3 se pone aquí, después de multiplicar por el 2 se pone aquí, si hubiese otro número se pondría abajo, ¿eso por qué es?

Ser.- Pues para tenerlo, yo creo... es que no sé. ¿Esto tiene una respuesta científica o cada uno piensa...?

I.- A mí me interesa lo que tú opines.

Ser.- Ya, ya, pero es que a lo mejor tiene una respuesta esto. Esto se pone así porque es así y te lo han enseñado y tú puedes decir misa. Yo creo que es para tenerlo ordenado. Tú multiplicas esto, lo tienes ordenado y al sumarlo pues te sale mejor. Tú no puedes poner a lo mejor un 8 aquí y un 3 aquí [no-Formal]. Hombre, porque son además aquí unidades, decenas, centenas [muestra de carácter Formal].

I.- Son unidades, decenas y centenas.

Ser.- Claro, ¿no?

I.- No sé.

Ser.- Sí, yo creo que sí. Al haber tres cifras son centenas. Luego, unidades, decenas, centenas.

I.- ¿Y por qué se deja un hueco aquí?

Ser.- [Permanece en silencio unos instantes]. Porque si tú lo pones debajo de la misma línea las tres, si son tres filas, pones el 438 y debajo el 292, es una suma.

I.- ¿Cómo? El 2 debajo del 8, el 9... ¿a eso te refieres?

Ser.- A eso me refiero. Tienes que ponerlo separado.... Pues la verdad es que nunca me he... [Tras 15'' en silencio]. A lo mejor porque son éstos una unidad y esto es la segunda unidad. Como es la segunda unidad tienes que dejarte un espacio, a lo mejor.

I.- O sea, el 2 es la segunda unidad.

Ser.- Bueno, si hubiese aquí un 1 [supuesta centena del multiplicador], por ejemplo, pues tendrías que correrte aquí y ya son dos. Uno y dos.

I.- ¿Pero por qué hay que desplazarse?

Ser.- [Permanece en silencio unos 15'']. Pues para que no, por ejemplo, 146 por... Puedes diferenciar el 146 por 3, puedes hacer 146 por 3 y 146 por 2. 146 por 3 da... ¿es que a ver cómo me explico, lo que tengo aquí! [Indicio de uso Formal].

I.- ¿146 por 3 qué da?

Ser.- Da 438 y por 2 da 292. Pero es que si lo pones debajo ya da una suma, es como si estás sumando tú un resultado y otro resultado que no es el mismo de multiplicar los dos a la vez.

I.- ¿Por qué se suman después al final? ¿Por qué se deben sumar las cifras en columnas para llegar al resultado?

Ser.- Pues son... lo que te dé... 146 son 23 veces 146. Por eso tienes que sumar lo que te dé el resultado del 23 por 46 si no, no.... Es que no sé cómo...

I.- Entonces, ¿el 438 qué sería?

Ser.- Serían 3 veces.

I.- ¿Y ese 292?

Ser.- Son dos veces de 146. Es que puedes hacerlo 2 por 146 aparte y 3 por 146 y ya lo sumas al resultado sin dejarte espacio y ya te sale 3358. [No- Formal].

I.- O sea, que da lo mismo dejar espacio...

Ser.- No, no da lo mismo dejar espacio. Digo si lo pones separado. Pones 146 en un lado y el resultado de cada, lo sumas y te sale 3358. Es lo que estaba diciendo antes, si son dos números juntos, una unidad y otra unidad, te tienes que dejar un espacio. Es que no lo sé porqué. Porque si lo pones tú seguido ya no sale. [No- Formal].

I.- Bueno, ¿y conoces alguna propiedad que se utilice en el algoritmo de multiplicar, en este método de cálculo, que a lo mejor justifique...?

Ser.- No te entiendo. ¿Propiedad a qué se refiere?

I.- Propiedad aritmética, propiedad matemática que justifique porqué se colocan las cifras de un modo o de otro...

Ser.- Pues si te soy sincero no lo sé porqué se corre un espacio. Hombre, si lo piensas es lógico porque tampoco vas a sumar 438 a 292 si estás multiplicando. Sólo sería una suma si lo pones junto. Yo creo que es eso. Son unidades: una unidad, otra segunda unidad, tercera unidad,.... Si pusieses aquí cuatro unidades, la cuarta unidad hasta al principio son cuatro espacios. Pero no sé porqué se pone eso así. [No-Formal].

I.- Bueno, ya hemos terminado.

Las justificaciones dadas en esta tarea son en su mayoría externas a lo que se refiere a los principios y fundamentos del algoritmo. Si bien se recogen ciertos indicios puntuales de uso Formal (por ejemplo, el hueco se relaciona con la idea de decena); se manifiesta también contradicciones entre los argumentos. Por ello, consideramos una:

Respuesta de tipo 9b