El análisis de funciones y las concepciones alternativas que de ese proceso se generan

Crisólogo Dolorès Flores
Centro de Investigación en Matemática Educativa;
Universidad Autónoma de Guerrero. México
cdolores@prodigy.net.mx; cdolores@prodigy.net.mx

Resumen

Este documento contiene los aspectos esenciales de una conferencia dictada por el autor en el marco de las actividades de la RELME 16 celebrada en la Habana, Cuba. El tema se refiere a las concepciones alternativas relativas al análisis de funciones en ambientes gráficos. En especial se analizan la importancia de esas concepciones en tanto procesos cognoscitivos que interfieren en los procesos de aprendizaje, las posibilidades de ser cambiadas por otras aceptables y su permanencia en la mente de los estudiantes a pesar de emplear diseños instruccionales para removerlas.

Introducción

La gran mayoría de los Planes y Programas del nivel medio superior (Howson, 1991; IBERCIMA, 1992; NCTM, 2000; SEP/SEIT/DEGTI/COSNET, 1988), también llamado preparatoria, bachillerato o preuniversitario, incluyen el tema del análisis de funciones elementales. Tal importancia radica principalmente en que en él se sintetiza uno de los objetivos primordiales de la matemática de las variables que se estudia en ese nivel. Los conceptos, relaciones y procedimiento relativos a las funciones, a sus límites, su continuidad y sus derivadas, fueron creados para poder analizar el comportamiento de las funciones. No tiene sentido poder sólo calcular límites de funciones, poder determinar su continuidad o poder calcular derivadas, si no se es capaz de utilizar e integrar estas herramientas para analizar el comportamiento de las funciones. Como las funciones modelan procesos de cambio, es necesario para el estudio de esos procesos, indagar si crecen o decrecen, cómo y cuánto crecen o decrecen, qué tan rápido lo hacen, cuáles son sus puntos máximos o mínimos (Dolores, 2000).

Desde nuestro punto de vista, para estudiar el proceso de la variación de las funciones es importante precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos. Los primeros indican cómo cambia una función y los segundos indican cuánto cambian. Las funciones pueden cambiar de maneras muy distintas, unas pueden ser crecientes, otras decrecientes, otras no crecen ni decrecen, unas crecen uniformemente, otras lo hacen en forma variada, etc., estas cualidades por sí solas algo dicen sobre su comportamiento, se complementan con los aspectos cuantitativos. En primer lugar los cambios pueden ser apreciados mediante *comparaciones*. Se sabe que un cuerpo en su caída libre en superficie terrestre (regida por la función $s(t) = 0.5gt^2$) avanzó 14.7 m. entre 1 y 2 segundos porque, en $t = 1$ recorrió 4.9 m y $t = 2$ recorrió 19.6, por tanto, $s(2)\ s(1) = 19.6\ 14.7 = 4.9$. No se puede saber si aumenta o disminuye una magnitud si no se comparan al menos dos de sus estados. Ya que la variación posee la categoría de proceso entonces está compuesta de estados sucesivos. Entre un estado y el que le sigue, o cualquier otro, pueden darse los cambios. Este incremento, o disminución, de la distancia se obtiene con una *diferencia*, del estado final menos el estado inicial.

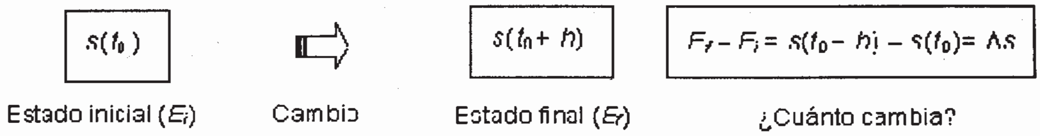

Figura 1

El modelo matemático básico para medir la variación es por lo tanto la *diferencia*. Las fórmulas de las funciones permiten determinar con precisión los valores de correspondencia de las variables y las diferencias entre ellos permiten cuantificar lo que cambian. Con las diferencias se puede analizar el comportamiento de las funciones. Por ejemplo: si $f(x + h)$ $f(x) > 0$ (para todo x perteneciente al intervalo $(x, x + h)$, y $h > 0$ preferentemente pequeño) entonces $f(x)$ crece; si $f(x + h)$ $f(x) < 0$ (bajo las mismas condiciones anteriores) entonces $f(x)$ es decreciente; si $f(x+h)$ $f(x) = 0$ entonces $f(x)$ no crece ni decrece en ese intervalo. Estas desigualdades, que en el fondo representan las comparaciones entre las ordenadas, permiten determinar cuánto cambia $f(x)$ e inferir cómo cambia. Estas relaciones son más evidentes si se utilizan representaciones geométricas:

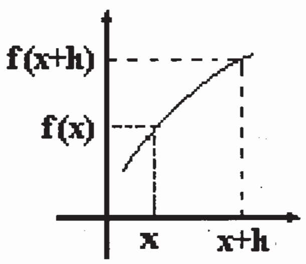

Fig. 2: Como: $f(x + h) - f(x) > 0$; entonces: $f(x)$ crece

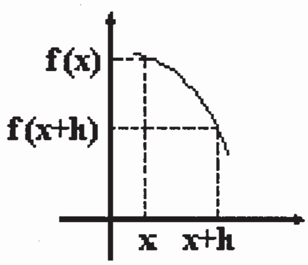

Fig. 3. Como: $f(x + h) - f(x) < 0$; entonces: $f(x)$ decrece

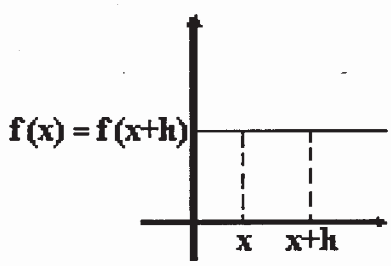

Fig. 4. Como: $f(x + h) - f(x) = 0$; entonces: $f(x)$ es constante

2. Planteamiento de la problemática

Varios investigadores han descubierto que cantidades importantes de estudiantes manifiestan varias dificultades en leer e interpretar gráficas de funciones (Wainer, 1992; Mc Dermot, Rosenquist y Van Zee 1987; Leinhardt *et al* (1990), etc). Por nuestra parte, varias dificultades hemos encontrado también en nuestros trabajos (Dolores, 1998), por ejemplo al presentarles la gráfica y la fórmula de la función: $s(t) = 5t^2$, t 0 (que de manera aproximada da la distancia de recorre un cuerpo en caída libre) a 112 estudiantes de bachillerato que recién habían terminado su curso de Cálculo Diferencial, y preguntarles por la velocidad del cuerpo en $t = 1$, más del 74% dieron como respuesta: 5 m/s. Contestaron dando el valor de la función en $t = 1$, sólo el 8% dio como respuesta: 10 m/s; este dato es indicativo de que la mayoría de estudiantes no relaciona a la derivada con la velocidad pata un $t0$, en cambio la asocian con la ordenada $s(t_0)$.

La interpretación de las gráficas requiere de poner en juego el pensamiento visual, pero muchos estudiantes son renuentes a utilizarlo según lo señalan Einsemberg y Dreyfus (1991). Los estudiantes, incluso los profesores, prefieren el trabajo algorítmico sobre el pensamiento visual pues este último requiere dé poner en juego procesos cognitivos superiores que los que demanda el pensamiento algorítmico. Por eso nuestros profesores de matemáticas de Cálculo Diferencial a pesar de que utilizan gráficas cartesianas para la enseñanza de las funciones y el análisis de su comportamiento, privilegian sólo la determinación de los puntos máximos y mínimos por medios algebraicos, dando por hecho que la determinación de estos puntos en las gráficas son cuestiones triviales.

3. Concepciones alternativas

Como ya señalé en los párrafos anteriores varias de las interpretaciones y concepciones que se generan por parte de los estudiantes como producto de la *visualización* de las gráficas y los significados que les atribuyen no son congruentes con los significados que se aceptan en matemáticas. Esta falta de congruencia causa dificultades y conflictos en la comprensión y aceptación de los significados, por ello han recibido varias denominaciones: errores, errores sistemáticos, preconcepciones, ideas previas, concepciones espontáneas, concepciones erróneas o concepciones alternativas.

El término *error* enfatiza la inconsistencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado. Las *preconcepciones* se caracterizan por aquel tipo de conocimiento precientífico formado por las experiencias cotidianas y que se arraiga fuertemente en la mente de los estudiantes. Por nuestra parte utilizamos los términos *concepciones de los estudiantes* y *concepciones alternativas* de la manera como los caracterizan Confrey (1990), Mevarech y Kramarsky (1997), en este sentido el término *concepciones de los estudiantes* se utiliza para denotar aquél tipo de conocimiento de los estudiantes que es acorde con el con el significado aceptado y *concepciones alternativas* para describir el conocimiento que difiere con aquél que debiera ser aprendido.

Las concepciones alternativas pueden ser generadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje previos y ser resistentes al cambio en condiciones digamos tradicionales de enseñanza. Por tanto su remoción o más bien dicho el cambio conceptual es un verdadero reto para los profesores e investigadores en el campo de la educación matemática.

4. Concepciones alternativas en profesores y estudiantes

En los profesores de cálculo del bachillerato hemos encontrado una gran variedad de concepciones alternativas (además de las aceptables), cuando hacen lecturas sobre el comportamiento de funciones a través de sus gráficas (Dolores y Guerrero, 2002). En este trabajo de investigación planteamos el análisis del comportamiento de funciones, buscando que establecieran la relación entre la propiedad variacional dada en forma analítica y las gráficas. Establecer este tipo de relaciones trae aparejados muchos procesos cognoscitivos, uno de los más notorios consiste en descifrar los significados del lenguaje analítico y la búsqueda de una correspondencia con sus representaciones gráficas. También requiere de pasar en el sentido que lo señala Duval (1998) de un sistema de representación analítico a un sistema de representación gráfico y viceversa.

Los resultados que arrojó esta investigación se describen de manera sintética a continuación. Una cantidad significativa asocia la condición: $f(x+h)f(x) = 0$, con f continua y $h > 0$ preferentemente *pequeño*, con los puntos de corte de la gráfica con el eje de las x, es decir con las x donde $f(x) = 0$. Análogamente existe tendencia a asociar la condición: $f(x+h)f(x)>0$, con la región donde la gráfica de la función está por arriba del eje de las x, región donde se cumple que $f(x)>0$, y $f(x+h)f(x)<0$ con la región donde la gráfica de la función está por debajo del eje de las x, región donde se cumple que: $f(x)<0$.

Los profesores parecen no diferenciar entre condiciones de comportamiento y condiciones de ubicación de la gráfica en el plano cartesiano. La mayoría asocia consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva, dadas simultáneamente y en forma verbal-escrita, con las regiones correspondientes de las graficas, sin embargo, asocian las condiciones creciente y negativa (dadas en la misma forma) por un lado, y decreciente y negativa por otro, con aquellos sectores de la gráfica donde sólo es positiva y negativa respectivamente. Para ellos las condiciones de crecimiento y *positividad* o decrecimiento y *negatividad* de la función parecen ser condiciones concomitantes.

En otra investigación realizada con estudiantes del bachillerato hemos encontrado concepciones alternativas semejantes a las encontradas en los profesores. Sólo que a los estudiantes las preguntas no les fueron planteadas del lenguaje analítico al gráfico, sino que las mismas preguntas fueron planteadas utilizando el lenguaje coloquial. Por ejemplo, a los profesores se les planteó la siguiente pregunta: ¿Para qué x, $f(x+h)f(x)>0$, con $h>0$? En cambio a los estudiantes se les preguntó así: ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? Desde el punto de vista matemático las preguntas son equivalentes. Es importante hacer notar que los dos conjuntos de personas cuestionadas eran ajenos entre sí, pues los estudiantes no habían recibido clase de aquellos profesores ni siquiera los conocían pues estudian y trabajan respectivamente en lugares distantes. Estos resultados nos permiten plantear dos hipótesis básicas: ¿Los significados gráficos atribuidos al lenguaje variacional podrían ser independientes del sistema semiótico? o ¿Los significados atribuidos a los términos *creciente* y $f(x+h)f(x)>0$ (expresión que indica que: $f(x+h)f(x)$ es positivo) y *positivo* (análogamente con los términos *decreciente* y *negativo*) guardan una relación de concomitancia? Estas preguntas serán objeto de próximos estudios.

5. Sobre la estabilidad y cambio de concepciones alternativas

Una vez detectadas las concepciones alternativas la pregunta frecuente que plantean los profesores radica en que si esas concepciones son estables o pueden ser removidas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Existen varias respuestas al respecto. Confrey (1990) señala que:

a) Antes del estudio formal, las personas sostienen firmemente sus sistemas de creencias descriptivas y exploratorias.

b) Estos sistemas de creencias difieren de lo incorporado dentro del currículo normal.

c) Ciertas constelaciones de estos sistemas de creencias muestran una consistencia que se remarca a través de edades, habilidades y nacionalidades.

d) Estos sistemas de creencias son resistentes al cambio a través de la enseñanza tradicional.

Pozo (1996) es coincidente con estas posiciones, sin embargo señala las condiciones en las que es posible un cambio conceptual:

a) El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética con la teoría alternativa del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir.
b) Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas.
c) A partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

Desde la década de los setentas en la pedagogía soviética se había ya planteado la Enseñanza Problémica, (Majmutov, 1983) como una teoría en la que se concibe que, el desarrollo de la actividad cognoscitiva es posible mediante el enfrentamiento y superación de las contradicciones en el proceso de enseñanza. La contradicción se concibe como una fuerza motriz de la enseñanza problémica en general y del proceso del *aprendizaje problémico* en particular, con la condición de que adquiera un carácter interno, que se haga una contradicción en la conciencia del propio escolar, en su personalidad en general, y que él tome conciencia de ésta como una dificultad. Esta teoría es coincidente con la planteada por los autores citados en los párrafos anteriores, además es una forma posible de encarar las concepciones alternativas y desarrollar el pensamiento de los estudiantes.

Investigaciones recientes (Sinatra y Pintrich, 2003) señalan los defectos comunes de los enfoques pasados respecto del cambio conceptual intencional. Estos enfoques sobre la investigación sobre el cambio conceptual desde la educación de la ciencia y desde las perspectivas de la psicología del desarrollo cognitivo se enfocaron en detallar la estructura de las representaciones del conocimiento existentes en los aprendices, y los medios por los cuales los profesores y los métodos instruccionales podrían facilitar cambios en esas concepciones. Ellos afirman que ambas perspectivas sugieren que si los aprendices reconocen y se vuelven concientes del conflicto entre su conocimiento existente y la concepción científica, el cambio conceptual es posible. Sugieren que la pedagogía del cambio conceptual es un asunto de colocar a los estudiantes en circunstancias que iluminen los puntos en conflicto. Sin embargo, argumentan que el conflicto cognitivo y un involucramiento profundo a menudo son insuficientes para inducir el cambio; el cambio a menudo no ocurre, incluso en situaciones diseñadas para promover la reestructuración del conocimiento, debido a características del aprendiz tales como la motivación, la resistencia afectiva, y las creencias de los aprendices. Aunque recientemente ambas tradiciones de investigación del cambio conceptual han comenzado a reconocer el rol de estas características, ambas no enfatizan suficientemente el grado en que éstos son *factores de control* en el proceso de cambio.

Estos últimos hallazgos nos advierten que los cambios conceptuales no son procesos determinados sólo por el hecho de que los estudiantes entren en conflicto cognitivo y reestructuren su conocimiento, sino hay que considerar los factores como la motivación, las resistencia afectiva y las creencias. Por nuestra parte creemos que un acercamiento hacia estos problemas desde una perspectiva integral y sistémica podría dar respuestas acera de los factores de control en el proceso del cambio conceptual. Estos acercamientos en el terreno de la investigación pueden ser posibles bajo la perspectiva socioepistemológica. Hacia ese rumbo se encaminan nuestros futuros trabajos.

Referencias bibliográficas

Confrey J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of research in Education.* Vol. 16. Pp. 3-56

Dolores C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Hitt F. Editor. Grupo Editorial Iberoamérica. Pp. 257-272

Dolores, C. (2000). La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Academia*; Vol. 2 No.20, Universidad Autónoma de Sinaloa

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Ed. Fernando Hitt, Grupo Editorial Iberoamérica

Ensimberg T. & Dreyfus T.(1991). On the reluctance to visualize in mathematics. *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* A project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of the Mathematical Association of America. Zimmerman W. and Cunningham S. Editors; pp. 25-27

Howson, G. (1991). *National Curricula in mathematics*. England: The Mathematical Association, University of Southampton.

IBERCIMA (1992). *Análisis comparado del Currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica* . Madrid: Mare Mostrum Ediciones Didácticas S.A.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein M.(1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* Vol. 60. Pp. 1-64

Majmutov. M.I. (1983). *La enseñanza problémica.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba. Pp. 46-56

Mc Dermot L., Rosenquist M., an Zee E. (1987). Student's difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics, *American Journal of Physics* Vol. 55. Pp. 503-513.

Mevarech Z. & Kramarsky B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 32 Núm. 3. pp. 229-263

NCTM (2000). Principles and Standards for Scholl Mathematics. Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. S.A.E.M. THALES

Pozo, J. I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata, S.L.

Ríbnikov K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir Moscú.

SEP, SEIT, DEGTI, COSNET, (1988). *Programas Maestros del Tronco Común del Bachillerato Tecnológico*. México: SEP, SEIT, DEGTI, COSNET.

Sinatra, G. & Pintrich P. (2003). The Role of Intentions in Conceptual Changue Learning. En *Intencional Conceptual Changue.* Edited by G. Sinatra y P. Pintrich. Laurence Erlbaum Associates Publishers. Pp. 1-18

Wainer H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educationa l Researcher* Vol. 21, pp.14-23