

## **Teorías y Concepciones de la Matemática Educativa: una puesta en práctica en un curso de Cálculo Diferencial**

*Victor Martínez Luaces*

Universidad de la República - Montevideo. Uruguay  
victorml@eiffel.fing.edu.uy

### **Resumen**

La intención de este trabajo es presentar algunas teorías y concepciones de la Matemática Educativa y su implementación concreta en cursos de Cálculo Diferencial en una y varias variables.

Se expondrán algunas ideas de la Resolución de Problemas, Investigación - Acción, Constructivismo Social (Teoría de Aprendizaje de Vigotsky) y algunos elementos de Ingeniería Didáctica. De todas estas teorías, se mencionan diversos ejemplos, implementados en los cursos de la Universidad de la República (Montevideo, Uruguay), entre los años 1995 y 2002.

La exposición estará complementada con la presentación de resultados, y a partir de los mismos se obtendrán conclusiones y se formularán recomendaciones.

### **Introducción**

En este trabajo no se realizará una exposición detallada de las teorías seleccionadas, sino simplemente una breve mención de lo que se considera más relevante en cada una y a posteriori se presentarán ejemplos de implementación de las mismas en el aula.

La selección se realizó teniendo en cuenta un criterio de aplicabilidad y afinidad con el equipo docente.

La sección siguiente, se dividirá en tres partes: Constructivismo Social, Resolución de Problemas e Investigación - Acción. También se irán intercalando algunos elementos de Ingeniería Didáctica que se entendieron más relacionados con los ejemplos que se expondrán. Con relación a ésta última, se utilizará reiteradamente el concepto de Transposición Didáctica (Chevallard, Y, 1995), ya que se presentarán problemas provenientes de otras asignaturas y de situaciones de la vida real que requieren un trabajo de adaptación para su presentación en el aula. Se trata entonces de un trabajo docente extremadamente difícil, que no se reduce al proceso de selección del material de enseñanza en una clase en particular.

### **Teorías seleccionadas y ejemplos concretos**

a) **Constructivismo Social:** Si bien Vigotsky no era un matemático educativo, sus teorías, mucho más generales, tienen una amplia aplicabilidad y de hecho han servido de inspiración a diversos trabajos e incluso tesis doctorales en esta área.

Una de las ideas que más han sido utilizadas por los investigadores en Matemática Educativa, es la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), la cual se define como "la distancia entre el nivel de desarrollo actual determinado por la capacidad para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces" (Vigotsky, L. S., 1978).

Veamos entonces un ejemplo concreto de cómo se ha llevado a la práctica esta teoría: Cuando los estudiantes ingresan a la Facultad de Química ya han visto en el último año de

la enseñanza media, el cálculo Diferencial en funciones de una variable, cualquiera sea la orientación del pre-universitario que cursaron. Por otra parte, del punto de vista químico, las leyes de los gases (Ley de Boyle, Ley General de los Gases, etc.), se ven habitualmente en los cursos de 3° año de la enseñanza secundaria (i.e., cuando los alumnos cuentan con 14 o 15 años de edad) y se vuelven a ver con mayor profundidad en los cursos pre-universitarios. En definitiva, tanto la parte química como la parte matemática vinculada a estos temas forman parte del nivel de desarrollo actual de los estudiantes que ingresan a la Facultad de Química. Sin embargo, si se les pide por ejemplo, que interpreten el hecho de que la derivada de la presión respecto a la temperatura, (para un gas ideal a volumen constante) es positiva, no saben hacerlo. Es más, se han hecho experiencias que muestran que los alumnos tienen cierto nivel de conocimientos, pero no pueden por si solos utilizarlos para resolver problemas muy elementales. Por ejemplo, en el caso recién mencionado, es fácil ver que la derivada es positiva y resultaría obvio vincular esto con el hecho de que la presión se incrementa al aumentar la temperatura (a volumen constante). Aquí estamos ante un ejemplo concreto de un nivel de desarrollo potencial al cual los estudiantes no acceden por si solos, pero son capaces de lograrlo con la ayuda de un docente o incluso de un compañero más avanzado (Martínez Luaces, V., en preparación).

Este y otros ejemplos han sido objeto de una transposición didáctica (Chevallard, Y., 1991) para crear una ZDP que permita a los estudiantes resolver problemas y al mismo tiempo adquirir conceptos y procedimientos.

b) Resolución de Problemas: Se ha escrito mucho sobre la Resolución de Problemas (Schöenfeld, Gaulin, etc.). Algunos de estos trabajos se han tomado como base para la producción científica en esta misma línea de investigación educativa (Martínez Luaces, V., 1997).

Como dice Schöenfeld, es posible que en un curso orientado hacia la resolución de problemas, la cantidad de contenidos efectivamente dictados sea menor, pero esto queda compensado y justificado por una mayor calidad de los mismos (Schöenfeld, 1983).

Se inició el trabajo en esta línea, en una primera instancia, en los cursos de Ecuaciones Diferenciales y en una proporción algo menor, en los cursos de Estadística. Posteriormente estas experiencias fueron extendidas a cursos de postgrado y de educación permanente.

Más adelante, se comenzó la extensión de estas experiencias a los cursos de Cálculo Diferencial. La cantidad de alumnos en estos cursos (unos 600 al año), la mayor cantidad de docentes involucrados – con formaciones muy diversas- y las diferencias que necesariamente imponen cinco carreras distintas, hicieron mucho más difícil la puesta en práctica de estas ideas en este tipo de cursos. Por esta razón, mientras estuvo en vigencia el plan anterior (que proponía un ciclo básico común para las cinco carreras involucradas), sólo se pudo hacer algunas experiencias piloto, por ejemplo:

i. En uno de los tres teóricos si bien se daban los mismos contenidos que en los otros dos, cada vez que se ejemplificaba un concepto o la aplicación de un teorema o una técnica se recurría a un pequeño problema de origen químico o físico, luego de una tarea de transposición didáctica que lo hiciera apropiado para un curso de 1° semestre. Esto tuvo dos efectos importantes, en primer lugar al ser todas las clases de asistencia libre los estudiantes migraban

hacia este teórico que contaba con más alumnos que los otros dos juntos. En segundo lugar, en la evaluación docente las diferencias entre los resultados obtenidos por éste teórico y los otros dos, resultaron estadísticamente muy significativas. Esto se comprobó tanto con técnicas estadísticas usuales como utilizando Análisis Multivariado (Gómez, A., Martínez Luaces, V., 2002). En resumen, este teórico actuó como un disparador del cambio que finalmente se concretaría en el nuevo plan de estudios.

ii. Se realizaron actividades extracurriculares tendientes a solucionar el problema de las diferencias en formación de los docentes. Por ejemplo se hizo un minicurso de Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones a problemas químicos y también dos seminarios de Optimización en donde se trataron problemas de Química y de Ciencias Económicas.

iii. Se realizaron diversos asesoramientos a industrias y entes estatales, que si bien mayoritariamente se orientaban hacia la Estadística, de todas maneras fueron acercando al personal a los problemas reales.

iv. Se realizaron trabajos de Investigación integrando equipos multidisciplinarios, fundamentalmente orientados hacia las áreas de Estadística y Ecuaciones Diferenciales, pero que de algún modo planteaban aplicaciones interesantes que también podían ser utilizadas parcialmente en los cursos de Cálculo Diferencial.

Tomando como base todo lo anteriormente citado, se fue construyendo un banco de problemas, ampliamente utilizado en los cursos de segundo año (Estadística, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico) y en menor medida en los de primer año, en particular los de Cálculo Diferencial e Integral.

Una vez puesto en práctica el nuevo plan, se logró separar los cursos de Matemática y Física para las distintas carreras, lo que permitió en cada curso tener un alumnado más homogéneo. Uno de los cursos creados en este nuevo plan fue el codificado como Matemática 103 módulo II, para las carreras de Químico Farmacéutico y Bioquímico clínico. Este curso, cuyo temario contenía únicamente Cálculo Diferencial en varias variables, fue organizado exclusivamente sobre la resolución de problemas.

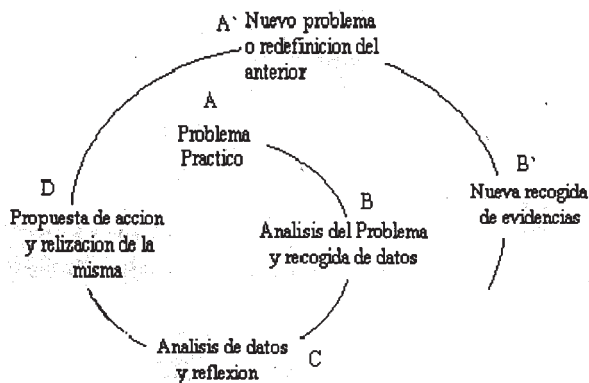
Las clases eran teórico-prácticas, con una muy breve introducción teórica antes de abordar los problemas relacionados con el teórico desarrollado (por ejemplo, los basados en Regla de la Cadena). Estos problemas eran resueltos por los estudiantes en grupos de 2 o 3 integrantes y el docente funcionaba como facilitador, pasando sucesivamente por las mesas de trabajo de los distintos grupos.

La evaluación se hizo también exclusivamente sobre la base de resolución de problemas de origen no – matemático a lo cual los estudiantes reaccionaron muy positivamente. Es más, en una encuesta sobre distintos tópicos (opinión sobre el nuevo plan, sobre los cursos, los docentes, el curso a distancia, etc.), lo que los estudiantes de Químico Farmacéutico y Bioquímico Clínico encontraron como cambio más significativo fue justamente este cambio de enfoque, de evaluación, de modalidad de enseñanza, etc. en Matemática 103, módulo II (Martínez Luaces, V. et al., 2001).

c) Investigación – acción: La Investigación – Acción tuvo sus orígenes en autores como Lewin, Kemmis y Carr, etc., pero en lo referente a nuestras experiencias, hemos optado por seguir muy especialmente la recopilación hecha por Contreras (Contreras, J., 1995).



Según este autor, la Investigación – acción puede ser representada o esquematizada mediante la siguiente espiral:



La misma comienza con el planteo de un problema que surge de una disonancia entre lo que se entiende como deseable y la práctica actual (Etapa A). Esto lleva a una segunda etapa, que corresponde a la recogida de datos y obtención de información importante para resolver el problema (etapa B). En una tercera etapa, la información es analizada (etapa C), para finalmente realizar una propuesta de acción (etapa D). Sin embargo, es posible que luego de este proceso aparezcan nuevos problemas o se produzca una re – definición de los mismos (etapa A'), dando lugar a un nuevo ciclo en la espiral de la Investigación – Acción.

Esta fue exactamente la metodología seguida en el curso de Matemática 103 módulo II, cuya versión final (hasta el momento) es la que se comentó en el literal anterior. En efecto, cuando se creó la asignatura Matemática 103, denominada “Matemática para Farmacia y Bioquímica” se armó exclusivamente sobre la base de temas de Álgebra y de Estadística (imprescindibles para otras materias como Física I, Química Analítica I, II y II, etc.). No se incluyeron temas de Cálculo Diferencial en varias variables, pues se entendió que en principio, con lo que los alumnos sabían de Cálculo Diferencial en una variable (de cursos anteriores), ya era suficiente. Esto creó una disonancia, ya que el Departamento de Fisicoquímica entendió que en esas condiciones no era posible dictar el curso de Termodinámica (Fisicoquímica I). Se pasó entonces (etapa B) a recabar información de distintas fuentes, en particular del propio Departamento de Fisicoquímica, de la Comisión de Seguimiento de las carreras de Químico Farmacéutico y de Bioquímico Clínico, de la Unidad de Educación, etc. Una vez analizada esta información (etapa C), se decidió crear un segundo módulo dentro de Matemática 103 (el actual módulo II), con sólo tres créditos, dedicado exclusivamente a estos temas.

En el curso presencial, dictado en Montevideo, donde la Facultad de Química tiene su edificio, este módulo se dio conjuntamente con otras dos materias de otras dos carreras. En cambio, en el curso a distancia, en la ciudad de Salto, no había estudiantes matriculados en esos otros cursos, por lo que surgió una nueva disonancia y por lo tanto, un nuevo problema a resolver (etapa A'). Luego de consultar a las autoridades, alumnos, etc. (etapa B') y de evaluar las posibles soluciones, analizando ventajas y desventajas (etapa C'), se resolvió

preparar un repartido de problemas, especialmente armado para el curso a distancia. También se resolvió enviar dos profesores a trabajar sobre ese repartido con los alumnos de Salto (etapa D').

Increíblemente, pese a ser esta una solución propuesta "sobre la marcha", funcionó mucho mejor que el curso principal dictado en Montevideo. Más aún, los alumnos de Salto mostraron muy conformes (Martínez Luaces, V. et al, 2001) y en contraposición los estudiantes de Montevideo, solicitaron a través de una nota de más de 50 firmas que se hicieran profundas modificaciones, realizando comentarios muy críticos sobre el curso y los docentes. Quedó de este modo planteado un nuevo problema a resolver (etapa A'').

Para abreviar la exposición no entraremos en los detalles de este nuevo ciclo de Investigación – acción, pero si vale la pena comentar que la propuesta de acción (etapa D'') fue para el año siguiente, la separación del módulo II, en principio con los mismos repartidos de problemas y profesores que habían obtenido resultados exitosos en Salto.

Si bien la respuesta fue satisfactoria, al separar el módulo II, se dispuso de un tiempo mayor y por lo tanto los repartidos armados el año anterior para Salto, pasaron a resultar insuficientes (etapa A''') y esto llevó a ampliarlos con nuevos problemas (etapa D'''), que resultaron de la transposición didáctica de situaciones provenientes de otras asignaturas (Chevallard, Y., 1991).

Los muy buenos resultados obtenidos finalmente con esa nueva propuesta, llevaron a la Comisión de Seguimiento de la carrera de Bioquímico Clínico a solicitar a la Cátedra de Matemática varios cursos de segundo nivel, para que los alumnos puedan realizar en forma opcional. Dos de estos cursos (Matemática 201, "Optimización" y Matemática 202, "Estadística Avanzada") comenzarían a dictarse próximamente y seguramente darán origen a nuevas espirales de Investigación – Acción antes de llegar a sus formas "definitivas".

La misma comienza con el planteo de un problema que surge de una disonancia entre lo que se entiende como deseable y la práctica actual (Etapa A). Esto lleva a una segunda etapa, que corresponde a la recogida de datos y obtención de información importante para resolver el problema (etapa B). En una tercera etapa, la información es analizada (etapa C), para finalmente realizar una propuesta de acción (etapa D). Sin embargo, es posible que luego de este proceso aparezcan nuevos problemas o se produzca una re – definición de los mismos (etapa A'), dando lugar a un nuevo ciclo en la espiral de la Investigación – Acción.

Esta fue exactamente la metodología seguida en el curso de Matemática 103 módulo II, cuya versión final (hasta el momento) es la que se comentó en el literal anterior. En efecto, cuando se creó la asignatura Matemática 103, denominada "Matemática para Farmacia y Bioquímica" se armó exclusivamente sobre la base de temas de Álgebra y de Estadística (imprescindibles para otras materias como Física I, Química Analítica I, II y II, etc.). No se incluyeron temas de Cálculo Diferencial en varias variables, pues se entendió que en principio, con lo que los alumnos sabían de Cálculo Diferencial en una variable (de cursos anteriores), ya era suficiente. Esto creó una disonancia, ya que el Departamento de Físicoquímica entendió que en esas condiciones no era posible dictar el curso de Termodinámica (Físicoquímica I). Se pasó entonces (etapa B) a recabar información de distintas fuentes, en particular del propio Departamento de Físicoquímica, de la Comisión de Seguimiento de las carreras de Químico Farmacéutico y de Bioquímico Clínico, de la Unidad de Educación, etc. Una vez analizada esta información (etapa C), se decidió crear un segundo módulo dentro de Matemática 103 (el actual módulo II), con sólo tres créditos, dedicado exclusivamente a estos temas.

En el curso presencial, dictado en Montevideo, donde la Facultad de Química tiene su edificio, este módulo se dio conjuntamente con otras dos materias de otras dos carreras. En cambio, en el curso a distancia, en la ciudad de Salto, no había estudiantes matriculados en esos otros cursos, por lo que surgió una nueva disonancia y por lo tanto, un nuevo problema a resolver (etapa A'). Luego de consultar a las autoridades, alumnos, etc. (etapa B') y de evaluar las posibles soluciones, analizando ventajas y desventajas (etapa C'), se resolvió preparar un repartido de problemas, especialmente armado para el curso a distancia. También se resolvió enviar dos profesores a trabajar sobre ese repartido con los alumnos de Salto (etapa D').

Increíblemente, pese a ser esta una solución propuesta “sobre la marcha”, funcionó mucho mejor que el curso principal dictado en Montevideo. Más aún, los alumnos de Salto se mostraron muy conformes (Martínez Luaces, V. et al, 2001) y en contraposición los estudiantes de Montevideo, solicitaron a través de una nota de más de 50 firmas que se hicieran profundas modificaciones, realizando comentarios muy críticos sobre el curso y los docentes. Quedó de este modo planteado un nuevo problema a resolver (etapa A'').

Para abreviar la exposición no entraremos en los detalles de este nuevo ciclo de Investigación – acción, pero si vale la pena comentar que la propuesta de acción (etapa D'') fue para el año siguiente, la separación del módulo II, en principio con los mismos repartidos de problemas y profesores que habían obtenido resultados exitosos en Salto.

Si bien la respuesta fue satisfactoria, al separar el módulo II, se dispuso de un tiempo mayor y por lo tanto los repartidos armados el año anterior para Salto, pasaron a resultar insuficientes (etapa A''') y esto llevó a ampliarlos con nuevos problemas (etapa D'''), que resultaron de la transposición didáctica de situaciones provenientes de otras asignaturas (Chevallard, Y., 1991).

Los muy buenos resultados obtenidos finalmente con esa nueva propuesta, llevaron a la Comisión de Seguimiento de la carrera de Bioquímico Clínico a solicitar a la Cátedra de Matemática varios cursos de segundo nivel, para que los alumnos puedan realizar en forma opcional. Dos de estos cursos (Matemática 201, “Optimización” y Matemática 202, “Estadística Avanzada”) comenzarían a dictarse próximamente y seguramente darán origen a nuevas espirales de Investigación – Acción antes de llegar a sus formas “definitivas”.

## **Resultados**

Los resultados de estas propuestas han sido múltiples y muy variados, por lo que aquí sólo mencionaremos una breve reseña de los mismos.

A mediados de los años 90 se comenzó a llevar a cabo una evaluación docente, sobre la base de un cuestionario de 25 preguntas, que los alumnos respondían de manera anónima. Los resultados de la misma, analizados en un artículo de la revista *Números* (Martínez Luaces, V., 1998) muestran claramente el éxito de las propuestas aquí mencionadas frente a grupos testigo en los que se mantuvo el esquema tradicional.

Algo completamente análogo sucedió con los cursos de Educación a distancia (Martínez Luaces, V. et al., 2001), que comenzaron en 1999. Más recientemente, se obtuvo algo similar en las encuestas de Calidad de Enseñanza, procesadas utilizando Análisis Multivariado.

Del punto de vista institucional, los éxitos antes mencionados llevaron a crear nuevas materias en el área de Matemática, tanto materias opcionales (Optimización y Estadística Avanzada), como cursos de postgrado (EDP: Aplicación a la Ingeniería Química, para la

Maestría en Ingeniería Química) o de Educación Permanente (Tratamiento de Datos, Control de Calidad, etc.).

Finalmente, algunos comentarios de los alumnos ante cuestionarios abiertos o semi-abiertos demuestran claramente lo que hasta el momento se ha conseguido. Algunos ejemplos son las siguientes frases registradas en los cuestionarios antedichos:

“...ahora le encuentro utilidad a la matemática...”

“...no resuelven todo, guiando la resolución...”

“...todas las materias deberían ser como esta...”

Estas y otras frases de los estudiantes nos muestran, tal vez más que los resultados estadísticos, cuál es su opinión respecto al trabajo realizado y a la necesidad de continuar trabajando en la misma dirección.

### **Conclusiones**

Varias ideas, teorías y concepciones de la Matemática Educativa se pueden llevar a la práctica siempre que se dan ciertas condiciones. En todos los casos, el equipo docente es el elemento fundamental que condiciona o no el éxito de la propuesta (por decirlo en términos químicos, es el “reactivo limitante” en todo el proceso)

Cabe preguntarse entonces: ¿por qué puede fallar el equipo docente en propuestas educativas de este tipo o similares?

En primer lugar hay un factor esencial: la comodidad. Es más cómodo no innovar. Los cursos tradicionales no serán los mejores, pero si los más fáciles de dar.

En un segundo lugar, cabe mencionar ciertos factores socio-económicos y organizativos. Por ejemplo, en Uruguay es sumamente común el fenómeno del multiempleo, i.e., los docentes corren de una institución para otra a realizar unas pocas horas de clase en cada una. En otros casos, hay instituciones (públicas y privadas) donde la investigación no es un objetivo importante. En resumen, algunos docentes no reflexionan sobre su práctica educativa, muchas veces por falta de tiempo y en muchos otros casos por falta de interés institucional.

Sin embargo, hay que reconocer que aún en aquellos lugares donde las dedicaciones horarias son altas y la investigación está favorecida, hay quienes optan por no realizar este tipo de actividades, a veces por desinterés hacia los temas educativos y a veces por carencias de formación. Finalmente, no faltan los casos en los que existe admiración por un modelo equivocado (todavía hay docentes que insisten en escribir notas “Bourbakianas” y luego seguirlas al pie de la letra, con gran preocupación por el rigor y la formalidad y muy escaso interés por los temas didácticos).

De todo lo anterior surge claramente la necesidad de contar con un buen equipo docente. Construir un equipo docente lleva años, pero, sin embargo, se desintegra muy fácilmente. Por eso, dada la inestabilidad frente a los estímulos externos (mejores retribuciones, mejores condiciones de trabajo, etc.), se hace imprescindible estar formando continuamente nuevos profesores, independientemente de que tengan o no buenas posibilidades de ingresar de



manera efectiva.

Como se ha visto en trabajos anteriores (Martínez Luces, V., 1998), existe una fuerte correlación entre la formación de los docentes y su manera de enseñar.

Es importante remarcar que al hablar de la formación de los docentes, nos referimos a todos sus diversos aspectos: la formación en Matemática, la formación didáctico-pedagógica y la formación en la disciplina (Física, Química, Ingeniería, Economía, etc.), para la cual se enseña la Matemática como asignatura de servicio.

Todos estos aspectos de la formación son importantes y como se dijo anteriormente, de alguna manera constituyen el “reactivo limitante” de cualquier propuesta educativa.

El plan de estudios puede ser muy bueno, los medios tecnológicos pueden ser muy modernos, los salones pueden ser muy amplios y funcionales, pero si el equipo docente no funciona, todo eso no alcanza. Además, para que el equipo funcione no basta con la buena voluntad de sus integrantes. Por el contrario, su formación es fundamental.

Sin una buena formación, el docente no hace más que trasladar sus propias dudas e inseguridades a sus alumnos.

### Referencias bibliográficas

- Contreras, J. (1995). La investigación en la acción. *Cuadernos de pedagogía* 224. pp. 8 – 19.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique. Pp. 44 – 45.
- Gómez, A. y Martínez, V. (2002). Evaluación docente utilizando Análisis Multivariado, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.
- Martínez, V. et al (2001). Distance learning in Uruguay: Two different experiences. *Proceedings Third Southern Hemisphere Symposium on Undergraduate Mathematics, Delta '01*
- Martínez, V. (1998). Matemática como asignatura de servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente, *Números. Revista de didáctica de matemáticas* 36. 65 – 74.
- Martínez, V. (1997). Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas. *Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*.
- Martínez, V. (en preparación). Una experiencia de Investigación – Acción en un curso de Cálculo Diferencial.
- Schöenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical Problem solving. *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press.
- Vigotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The Development of Higher Psychological Processes*, USA: Harvard University Press.