Análisis preliminar para el diseño de una propuesta de situaciones matemáticas, para construir algunos significados de las funciones exponencial y logarítmica.

Miguel Romero Flores, Juan M. Camacho Hernández, Santiago Lucas Martínez, Marcela Ferrari, Gustavo Martínez, Apolo Castañeda.

UAEH- CINVESTAV- CICATA, México

campeon6mx@yahoo.com jmch_iboxford@hotmail.com santiagolucasmx@yahoo.com

Resumen

Esta investigación dará continuidad a los trabajos realizados sobre la utilización de las progresiones aritméticas y geométricas en la construcción de algunos significados sobre las funciones exponencial y logarítmica. En efecto, en el trabajo de Trujillo (1995) se reporta que existe cierta dislexia entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar. En tanto que, para Ferrari (2001) el abordaje de los logaritmos es axiomático ya que no existen elementos en el discurso escolar que suavicen el pasaje de lo aritmético a lo analítico. La metodología de investigación implementada es "la ingeniería didáctica".Consideramos que la propuesta de las situaciones matemáticas, que presentaremos, puede resultar satisfactorio para que nuestros estudiantes transiten de lo aritmético a lo funcional, con mayor familiaridad y confianza.

Introducción

Esta investigación pretende dar continuidad a los trabajos realizados por anteriores investigadores sobre la utilización de las progresiones aritméticas y geométricas para construir algunos significados de las funciones exponencial y logarítmica. Esta propuesta busca obtener algunos argumentos para romper la dislexia entre los enfoques aritmético y funcional producida en la enseñanza de los logaritmos, haciendo uso de algunas situaciones matemáticas que puedan vincularlos.

Si recurrimos a algunos antecedentes Ferrari, (2001) hace un rescate epistemológico sobre logaritmos y exponentes diciendo "*Dando un hojeada a la historia, encontramos que los logaritmos y las exponenciales han estado estrechamente vinculados, desde sus albores como nociones matemáticas, surgidas a principios del siglo XVII*"

Marco teórico

La presente investigación retoma además de las posturas de Piaget, la "*Teoría de Situaciones Didácticas*" expuesta por Brousseau. Esta teoría, contemporánea a los inicios del constructivismo, busca proponer con bases científicas, experiencias que propicien un aprendizaje significativo en los alumnos. El proceso es complejo, pero de gran valía cuando se logra dar buena dirección al proceso de la enseñanza.

De acuerdo con Brousseau (1986), dentro del aula generalmente se presenta una *génesis ficticia* en el discurso escolar (expuesto por el profesor, los libros, instituciones, etc.), en el cual se aíslan las nociones y propiedades de las actividades que les dieron origen, sentido, motivo y utilización (Ferrari, 2001). Esto significa que los conocimientos se deforman al ser impartidos a los alumnos, descontextualizándose de sus orígenes históricos, dejando atrás el sentido o diseño, la cuestión para la cual fueron creados o concebidos (Chevallard, 1995).

Brousseau en su teoría de *Situaciones Didácticas,* busca explicar la trascendencia de la enseñanza como actividad didáctica, estudiando la naturaleza de los fenómenos que ocurren dentro del aula y del proceso enseñanza-aprendizaje con respecto a la matemática, tomando en cuenta los conocimientos impartidos, la forma en la cual se enseñan, la forma mediante la cual aprenden los alumnos y las posibles restricciones bajo las cuales se llevan a cabo en el campo de la educación.

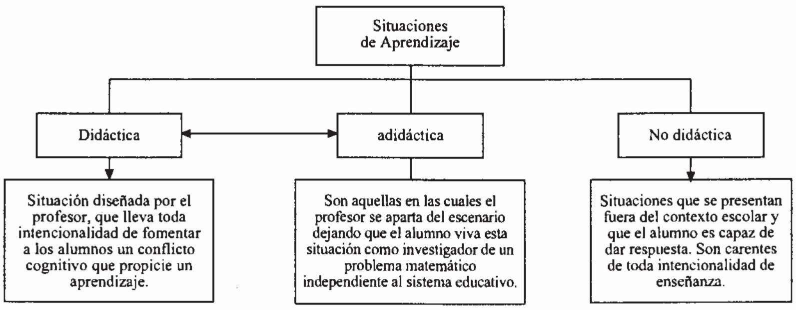
El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrio. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta cuando se apropia del conocimiento (Brousseau, 1986).

En la *enseñanza tradicional*, el profesor solamente imparte los saberes sin esperar una respuesta específica por parte de los alumnos. Esta situación es contradictoria a la postura de Brousseau, quien establece que en el proceso de enseñanza, se requiere de la participación activa del alumno, quien ha de manifestar una respuesta emitida al interactuar éste frente a un objeto de conocimiento.

Consideramos que la devolución es la esencia del acto de comunicación entre profesor y alumno frente a un objeto de conocimiento, produciéndose la misma en ambos sentidos. Así, es el acto mediante el cual es el profesor le devuelve al alumno la responsabilidad de su propio aprendizaje, le delega la exploración, la búsqueda, la necesidad de hallar respuestas y de avanzar de manera tal que esto sea aceptado quizás sin ser percibido por el mismo. A su vez, el alumno al involucrarse con el problema, devuelve al profesor el papel de mediador entre los saberes sociales y los producidos en el aula, gestionándose así, el proceso de aprendizaje de ambos (Ferrari, 2001).

Lezama (1999) considera en sus estudios, la necesidad que tienen los docentes de proponer una situación matemática, que le permita dotar al conocimiento que se desea impartir, de un significado propio y útil, además de que el alumno se percate de que el conocimiento adquirido pueda ser utilizado en la resolución de otros problemas. Toda situación debe tener como objetivo primordial que el alumno interactúe con el conocimiento de estudio, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías y que retome los que más le son útiles y aplicables a su entorno.

A interpretación nuestra, Brousseau considera que se presenta un efectivo proceso *enseñanza-aprendizaje*, cuando el alumno además de haberse apropiado del conocimiento mismo, es capaz de emplearlo en otros contextos que le auxilien a resolver situaciones que se le presenten fuera del ámbito escolar. O como menciona Ferrari, en momentos donde no haya intencionalidad. A este tipo de situaciones se les conoce desde la perspectiva de Brousseau como *Situaciones Adidácticas*. Sin embargo, es necesario hacer notar las diferencias básicas entre las diferentes situaciones que considera Brousseau en su teoría:



Metodología de investigación

Se empleará como metodología de investigación "la ingeniería didáctica" considerando en el presente trabajo el análisis preliminar para el diseño de una situación matemática así como su análisis a priori, enfocándonos en la triada del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos.

La ingeniería didáctica (instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que permite desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, trata de considerar la complejidad del proceso enseñanza – aprendizaje en situación escolar). En el caso particular de la metodología de investigación se caracteriza por construir sus productos a partir de un esquema experimental apoyado en realizaciones didácticas en clase en base a la concepción, realización, observación y análisis de situaciones de enseñanza; aprovechando también los registros de los estudios de casos, considerando que la validación es interna, fundamentada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

Las fases primordiales que participan en la elaboración de una ingeniería didáctica son cuatro y se enlistan a continuación:

- ¤ Análisis preliminar.
- ¤ Diseño de una situación didáctica (matemática) y su análisis a priori.
- ¤ Experimentación.
- ¤ Análisis a posteriori y validación.

Este trabajo comprenderá las dos primeras fases de la ingeniería didáctica, se precisarán las hipótesis epistemológicas y didácticas para el diseño de una situación.

Análisis preliminar

En este análisis, después de definir los objetivos específicos de la investigación, se analizan de una forma sistémica, la triada del sistema didáctico así como sus relaciones.

Dentro del presente análisis se debe considerar: el conocimiento matemático que se desarrolla en las escuelas, su devenir del saber (componente epistemológico); las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos que deben enfrentar y superar para adueñarse de las nociones puestas en escena por la situación implementada (componente cognitiva), como vive el contenido matemático dentro de la escuela y los efectos que ocasiona (componente didáctica).

Confrey (1995) y Lezama (1999) identifican, como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con los logaritmos a través de funciones inversas.

Trujillo (1995) realizó una exploración respecto a la interconexión entre la relación de las progresiones aritméticas y geométricas y las nociones de los logaritmos y exponenciales como funciones. Las respuestas reportadas giran en torno a que: ambas progresiones forman parte de los números reales, o ambas son progresiones, o no hay una operación que las vincule pues en una se suma y en la otra se multiplica.

En las indagaciones epistemológicas se pueden distinguir tres etapas del desarrollo de los logaritmos, tomando como eje central la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas, argumento utilizado por Napier para su primera definición.

Como primer momento, consideramos a los *logaritmos como transformación,* se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentando regresar a la aritmética (empleando sólo sumas y restas). En un segundo momento el de los *logaritmos modelizadores*, en esta etapa se determinan sus características geométricas y logran pertenecer a un discurso matemático de principios del siglo XVII, se les dota de una gráfica en el nuevo registro "algebraico geométrico". En un tercer momento que corresponde a la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes. (Ferrari, 2001).

En la etapa de los logaritmos como modelizadores y en la cual se cultivaran tantas representaciones y significados de los mismos, no se explota en la escuela prevaleciendo en ella una presentación axiomática de éstos conceptos. La forma de tratar a las funciones logaritmo y exponencial que se baraja en el aula de nuestros días, haya su sustento en la etapa de los logaritmos como objetos teóricos, en la cual se le ha escindido completamente de sus orígenes. Ferrari, M. (2001). Por experiencia personal como docentes, nos percatamos que en las escuelas en que laboramos no aparecen en los programas los logaritmos, únicamente se usa como herramienta en cursos de cálculo diferencial e integral, lo sustentaremos posteriormente mejor.

Diseño de la situación didáctica (matemática) y su análisis a priori.

En la ingeniera didáctica, esta fase corresponde a elegir las variables didácticas que serán controladas y la forma en que serán manipuladas, también se elaboran hipótesis de trabajo, es decir los resultados de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, considerar lo que harán los alumnos para resolver esta situación (predecir su comportamiento y la forma de conducirse).

Determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo (caracterizado el obstáculo que se desea confrontar) se diseña la situación matemática en si misma que sea capaz de crear un medio propicio para el alumno y pueda entrar al juego, que se sienta desafiado para poder apropiarse del saber considerado, cabe hacer mención que esto depende del contrato didáctico que surja entre maestro y alumno.

A continuación mencionamos las hipótesis que sustentaran la línea que seguirá el presente trabajo junto con aquellos elementos que nos hacen pensar en ello.

Hipótesis:

- El tomar en cuenta las progresiones aritméticas y geométricas puede enriquecer la construcción escolar de las funciones logaritmo y exponencial.
- El diseño de situaciones matemáticas apoyados en el estudio y análisis de las progresiones aritméticas y geométricas (tanto en la función exponencial como logarítmica) pueden establecer un enlace entre la naturaleza aritmética y funcional de estas nociones.

En la actualidad los exponentes y los logaritmos, presentan el problema de que su enseñanza se ha vuelto axiomática solo se les utiliza como una definición, en un sin número de operaciones para la solución de ejercicios o como una herramientas matemáticas (en su parte operatoria), esta forma de utilizarles pensamos que difícilmente puedan proporcionar un aprendizaje significativo. Si revisamos el surgimiento y evolución de éstos últimos se percibe la idea de la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas como esencia de los logaritmos, lo cual dentro del discurso escolar no existe o no se maneja como tal. Se puede decir también que la presencia y el empleo de éstos se está perdiendo en los programas de estudio del nivel medio superior, así como en el aula (principalmente en bachilleratos y preparatorias pertenecientes al plan SEP) debido a la creencia que el uso de la tecnología suple su enseñanza.

En nuestra manera de ver, creemos que existe una separación entre la forma como visualizamos a los exponentes y a los logaritmos en cuanto a lo aritmético y lo funcional (como un variación), es decir no existe una relación entre los valores numéricos, por ejemplo los asignados mediante una calculadora y su representación funcional, es decir no encontramos que el discurso matemático escolar propicie su relación o conexión.

Es por ello que consideramos pertinente pensar en realizar una serie de situaciones matemáticas enfocadas en las progresiones aritméticas y geométricas pueda fortalecer este tránsito y crear un puente que fortalezca dichas concepciones dentro del discurso escolar , de esta forma establecer un enlace entre lo aritmético y funcional.

Trujillo (1995) realiza exploraciones sobre la interconexión entre la relación de las progresiones aritmética y geométrica y las nociones de los logaritmos como funciones. Estos resultados reportan que la falta de vinculación entre las progresiones inhibe a los alumnos generar argumentos en el contexto gráfico, por lo que ven a ambos como entes aislados dando indicios de un pensamiento funcional respecto a la relación entre las mismas, no reconocen sus características logarítmicas.

Confrey (1995) y Lezama (1999) identifican, como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con los logaritmos a través de funciones inversas.

Para Ferrari (2001) el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos es axiomático ya que no existen elementos en el discurso escolar que suavicen el pasaje de lo aritmético a lo funcional en el tratamiento de este concepto.

Discusión

Las distintas concepciones que docentes y alumnos logran construir en torno a relaciones funcionales y las diferentes representaciones de las mismas, reportadas como elementos que dificultan la apropiación de este concepto, contrastan con la absoluta carencia de argumentos y representaciones a la hora de trabajar con logaritmos.

En el caso de los logaritmos, *la transposición didáctica, a la que inevitablemente todo concepto es sometido antes de ser introducido al aula, ha destazado los logaritmos, los ha convertido en objetos útiles que deben ser manipulados con soltura sin necesidad de dotarlos de significado.* Toda transposición genera una nueva epistemología del concepto, y en el caso de los logaritmos, esta comienza a producirse y reflejarse en los textos y en su tratamiento desde el siglo XVIII.

"Nuestra visión del devenir de los logaritmos como objetos de saber, nos lleva a proponer como hipótesis epistemológica, de construcción de conocimiento, la incorporación en el diseño de las nociones de progresión aritmética y geométrica y su fuerte vinculación con los logaritmos. Creemos que son elementos que pueden resultar útiles, al igual que en el desarrollo histórico de los logaritmos, para facilitar el pasaje desde las características aritméticas de esta noción hasta las funcionales permitiendo la exploración en distintos registros y su correspondiente vinculación". (Ferrari, 2001).

En base a los comentarios de (Ferrari, 2001), que tanto alumnos como profesores del nivel medio superior no tienen los argumentos y representaciones necesarias para encontrar la vinculación que existe entre las progresiones aritméticas y geométricas, con los exponentes y los logaritmos, los cuales los ven como entes aislados y como consecuencia sin indicios de pensamiento funcional, Vislumbramos que es necesario investigar sobre las progresiones aritméticas y geométricas y su relación con los logaritmos y exponenciales como medio de fortalecer la idea de funcionalidad de las mismas.

Consideramos interesante retomar conceptos ya trabajados en el pasado por Agnesi (vinculando la construcción geométrica de segmentos con las progresiones aritméticas y geométricas en cuya relación encontramos la naturaleza de los logaritmos), Newton (modelizando la caída de un cuerpo en un medio viscoso) y Galileo (en sus análisis sobre el estudio de la caída libre).

Creemos que la propuesta de situaciones matemáticas que se diseñarán basándonos en la relación entre progresiones aritméticas y geométricas naturaleza primigenia de las funciones logaritmo y exponencial puede resultar satisfactorio para que los estudiantes transiten de lo aritmético a lo funcional, con mayor familiaridad y confianza, lo que puede permitir un mejor entendimiento y dominio de estas nociones.

Referencias bibliográficas

Agnesi, M. (1748). Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana. *Libro Secondo del Calcolo Differenziale* (2 tomos).

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México; Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica

Brousseau,G.(1986). Fondements et methodes de la didactique des mathematiques, Recherches en *Didactique des Mathematiques* 7(2), pp.33-115.

Chevallard, Y.(1995). La *Transposición didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Confrey, J. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in mathematics education* 26(1),pp. 66-86.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de Maestría no publicada, Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav IPN, México.

Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Trujillo, R. (1995). Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN, México.