RECONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LA PRIMITIVA Y DERIVADA EN AMBIENTES GRÁFICOS; LA ARGUMENTACIÓN COMO PARTE ESENCIAL DE LA ACTIVIDAD HUMANA

María Antonieta Aguilar Víquez
Instituto Tecnológico de Pachuca, CICATA,IPN, México
auva5404@prodigy.net.mx

Resumen

En el sistema educativo nacional, existe una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, hacemos esta afirmación, junto a Cordero (2001) puesto que a lo largo de nuestra práctica docente y como investigadores, nos hemos percatado de la presencia de prácticas sociales de la actividad humana tales como: modelar, aproximar, predecir, medir, buscar tendencias (Aguilar, 2002) y otras, que no han sido integradas a la currícula de las instituciones en donde se imparte el Cálculo a nivel superior. Sin embargo estas prácticas sociales han permitido construir cierto tipo de conocimiento conducente a la reconstrucción de significados en el área del Cálculo y Análisis así como temas afines. En la actividad humana se forman y distinguen construcciones del conocimiento que se dan en las situaciones de interacción que viven a diario en el aula el estudiante y el profesor. Debido a que en esta actividad el conocimiento tiene significados propios y esta conformado por versiones que se comparan y negocian durante el proceso mismo de la actividad, diversos significados se van redefiniendo. De esta manera se esta llevando a cabo una reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. El estudio que nos ocupa esta centrado básicamente en la relación entre la función primitiva y su derivada cuya fórmula analítica esta dada por: $\int f'(x)\,dx = f(x)$. Esta expresión nos permite colocar a los estudiantes en diferentes escenarios. Uno de ellos consiste en discutir aspectos de la función primitiva $f(x)$ a través de la información gráfica de la función derivada $f'(x)$, sin considerar explícitamente las expresiones de las funciones. Otra interpretación (escenario) consiste en considerar a la función primitiva $f(x)$ como el área bajo la curva, donde la curva representa la derivada $f'(x)$. *Resultando la propiedad de función creciente o decreciente para la función primitiva.* En este reporte damos cuenta de cómo los estudiantes resignifican ciertos tópicos del Cálculo cuando se les coloca en situaciones diseñadas con ese propósito, para ello utilizamos a la aproximación Socioepistemológica como línea de investigación, la Teoría de Situaciones Didácticas como marco teórico y la Ingeniería Didáctica como metodología.

Introducción

Hemos encontrado en investigaciones previas que las actividades llevadas a cabo en el aula, referentes a situaciones específicas de Cálculo, consisten por ejemplo, en que a partir de una información gráfica que representa a la derivada de cierta función, se determina la gráfica de la función primitiva y viceversa. Profundizando en el estudio de la aproximación Socioepistemológica, y revisando otras investigaciones de nuestros colegas que trabajan en la misma línea llegamos a la conclusión de que dichas actividades corresponden a actividades humanas o prácticas sociales. Pretendemos que el objeto de estudio incluya así a las actividades necesarias para construir al objeto, lo cual implica dotar de importancia al desarrollo y uso de las herramientas para construir dicho objeto y al papel de la persona y del contexto sociocultural en el cual se lleva a cabo la actividad. De esta manera, la epistemología planteada brindará explicaciones en función de las características propias del humano al hacer matemáticas en contextos socialmente organizados.

Esta perspectiva atiende la problemática fundamental de la disciplina matemática educativa en la cual se confrontan la obra matemática y la matemática escolar.

Ambas son de naturaleza y funciones distintas; sin embargo, la segunda requiere interpretar y reorganizar a la primera, a través de la reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. El resultado de esta reconstrucción de significados es el establecimiento de categorías del conocimiento matemático extraídas directamente de la actividad humana. En ese sentido, se plantea como hipótesis que la actividad es la fuente de reorganización de la obra matemática y del rediseño del discurso matemático escolar. (Cordero, 2001)

La aproximación socioepistemológica formula una línea de investigación que no sólo considera epistemologías modelizadas a través de la actividad matemática sino busca hacerlo a través de la actividad humana. Y consecuentemente busca una nueva base didáctica (como ciencia) para que la matemática escolar reorganice la obra matemática. En este contexto, hemos encontrado que la Teoría de situaciones Didácticas, nutre a la aproximación socioepistemológica de manera ad hoc, de tal suerte que podemos articularla con la Ingeniería Didáctica para poder desarrollar y diseñar de manera sistémica nuestras situaciones didácticas, que es la parte medular del presente reporte de investigación.

El presente proyecto se ubica en la línea de investigación que consiste en construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas por medio de cuatro componentes fundamentales del conocimiento matemático: la epistemología, la cognición, la didáctica y la dimensión sociocultural. A estas componentes en conjunto se le llama aproximación socioepistemológica, cuya tarea principal de investigación consiste en dar evidencias sobre la siguiente hipótesis: la actividad humana es la fuente de la reorganización que implicará el "rediseño del discurso matemático escolar" (Cantoral, 2000).

Sobre la teoría de situaciones didácticas

"La didáctica de las matemáticas" estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que tienen de específicas respecto de las matemáticas. Los resultados, en este dominio, son cada vez más numerosos, se refieren a los comportamientos cognitivos de los alumnos, pero también a los tipos de situaciones puestas en juego para enseñarles y sobre todo los fenómenos a los cuales da lugar la comunicación del saber. La producción o la mejora de los medios de enseñanza encuentra en estos resultados más que objetivos o medios de evaluación, encuentra en ella un apoyo teórico, explicaciones, medios de previsión y de análisis, sugerencias, incluso dispositivos y métodos, Brosseau (1986).

Es indispensable una buena teoría epistemológica acompañada de una buena ingeniería didáctica.

La didáctica estudia la comunicación de los saberes y tiende a teorizar su objeto de estudio, pero no puede responder a este desafío más que con las siguientes condiciones:

- Poner en evidencia fenómenos específicos que parecen explicados por los conceptos originales que propone,

Indicar los métodos de pruebas específicas que utiliza para ello.

Estas dos condiciones son indispensables para que la didáctica de las matemáticas pueda conocer de forma científica su objeto de estudio y permitir así acciones controladas sobre la enseñanza.

La ingeniería didáctica

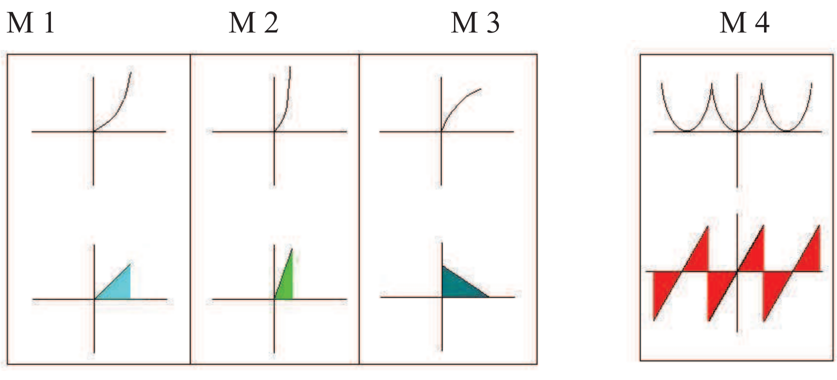
Artigue (1995) menciona que la ingeniería didáctica, como metodología de investigación, se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Su forma de validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Es por eso que en la presente investigación continuaremos diseñando situaciones que nos muestren las actividades que realizan los estudiantes alrededor de las resignificaciones de las relaciones entre primitivas y derivadas específicamente en lo referente al Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto área bajo la curva, así como las herramientas que entran en juego. De esta manera, consideramos que estamos proponiendo una ingeniería correspondiente a ese tópico del Cálculo o análisis matemático.

En el análisis preliminar realizaremos una epistemología de los contenidos contemplados, de la misma manera como se ha hecho para las secuencia presentadas en este reporte de investigación. En el análisis a priori, serán los elementos obtenidos de dicha epistemología los que permitan predecir los comportamientos de los estudiantes. De esta manera, podemos hablar de una epistemología inicial que, después de la puesta en escena, adquirirá elementos que la irán enriqueciendo continuamente. En estas fases de experimentación, se podrá obtener evidencia acerca del tipo de argumentos, de las herramientas utilizadas y sobre todo, de cómo se presenta una orientación hacia el consenso en los contextos sociales interactivos. Esto nos hablaría de las reconstrucciones de significados que se estén llevando a cabo. Así, la validación de la socioepistemología de las relaciones entre primitivas y derivadas en el contexto ya mencionado se basará en una confrontación con lo observado en los procesos interactivos.

Diseño

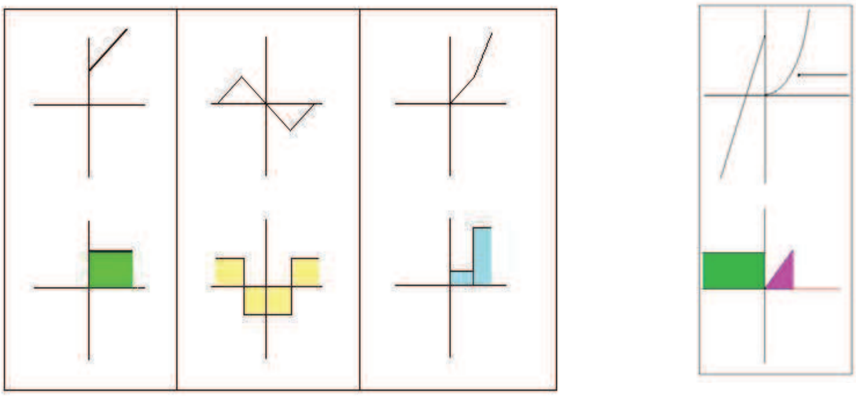
El diseño de esta situación se encuentra fundamentado en la revisión epistemológica que realizamos del Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto área bajo la curva de diversas funciones primitivas y derivadas. A continuación presentamos dos secuencias correspondientes a dicha situación didáctica, cada secuencia tiene cuatro momentos los cuales nos indican características especificas de la gráfica de una función primitiva y su derivada.

Secuencia #1



Secuencia #2

M 1 M 2 M 3 M 4



Desarrollo y análisis

SECUENCIA #1 llamamos a los momentos M1, M2 y M3 momentos de interacción y reflexión o profundización en cambio al momento M4 lo denominamos momento de integración. En M1 y M2 se les pidió a los estudiantes que dibujaran la curva de la función primitiva, representada por el área sombreada, ellos no tuvieron dificultad en hacerlo y aún más identificaron el efecto de los coeficientes Aguilar, M.A. (2001) puesto que para M1 dibujaron una gráfica más anchurada que para M2. Relacionaron la gráfica de una función del tipo F (x) = x^2 con áreas triangulares. En M3 se pidió a los estudiantes, dibujar el área bajo la curva representada por la gráfica de la función primitiva dada, en este caso los estudiantes, quienes trabajaron en equipos de tres, se mostraron dubitativos entrando en conflicto, incluso dibujaron el área, representada por un triángulo (porque ya habían relacionado parábolas con áreas triangulares) en el segundo cuadrante y posteriormente lo dibujaron en el primero, pero realizaron una discusión más rica y profunda, ya que se cuestionaron acerca de pendiente negativa y función creciente, consideramos que en este momento M3, justamente empezaron a resignificar esos conceptos. A M4 lo llamamos momento de integración debido a que los estudiantes discuten acerca de función creciente y decreciente y relacionan, por un lado, a las gráficas de primitivas parábolicas con áreas triangulares y por otro a funcion creciente con áreas entre la gráfica de la derivada y el eje de las x por encima de éste, en cambio para las funciones primitivas decrecientes, el área esta representada por tríangulos que graficamente aparecen por debajo del eje x.

Secuencia # 2 Al igual que en la secuencia # 1, denominamos a los momentos M1, M2 y M3, momentos de interacción y profundización, a M4 lo llamamos, momento de integración. En este caso también se les solicitó a los estudiantes, en M1 y M2, que dibujaran la curva de la función primitiva, representada por el área sombreada, ellos no tuvieron dificultad en hacerlo, en M3 nuevamente identificaron el efecto de los coeficientes Aguilar, M.A. (2001), a M1 la identificaron como función creciente, a M2 como función creciente-decreciente-creciente, M3 función siempre creciente, Relacionaron la gráfica de una función del tipo F (x) = x con áreas rectangulares. En M3 se pidió a los estudiantes, dibujar el área bajo la curva representada por la gráfica de la función primitiva dada, en este caso los estudiantes, quienes trabajaron en equipos de tres, no entraron en conflicto, en nínguno de los momentos, esto pensamos se debió a que ya habían interactuado y profundizado suficientemente en la secuencia #1. Consideramos que en esta secuencia lograron más resignificaciones, pues en M4, en donde se les pidió que dibujaran las áreas, primero establecieron la posible expresión analítica:

$$F(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

A M4 lo llamamos momento de integración debido a que los estudiantes discuten acerca de función creciente y relacionan, conjuntamente, a una función primitiva lineal con área rectangular y a una primitiva cuadrática con área triangular. En M4 de la segunda secuencia se resignifica la función cero, ya que la gráfica de la derivada es cero, por tanto el área bajo la curva también es cero.

Resultados y conclusiones

La reconstrucción de significados que los estudiantes realizan son:

- Concepto de función,
- Identifican y relacionan la función área entre primitivas y derivadas utilizando como argumentos al Teorema Fundamental del Cálculo y al comportamiento tendencial (En el contexto gráfico).
- Caracterizan y clasifican a diferentes tipos de funciones.
- Miran a las funciones como un todo y las analizan de manera local y global.

Por todo esto podemos afirmar que los estudiantes lograron resignificar cuando se les coloco en situaciones específicas de Cálculo y ello les permitió establecer relaciones entre funciones primitivas y derivadas, en el contexto área bajo la curva que establece el Teorema Fundamental del Cálculo.

Bibliografía

Aguilar, M.A. (1999) Construcciones Mentales en ambientes gráficos; (Estudio de algunas relaciones entre la primera derivada y su función Primitiva), Tesis de especialidad en Didáctica de la Matemática.Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares, la Habana, Cuba (no publicada).

Aguilar, M. A. (2002) Relaciones entre F y F´ el papel del registro gráfico. Reporte de Investigación publicado en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol XV Tomo 2 pp 1004-1009.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed) Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (pp. 33-59) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brosseau, G. (1986), Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Volumen 13, 54-62*).* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001), "La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 4, núm. 2, pp 103-128