

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE GRANADA



**PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ALUMNOS DE
PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.**

UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Trabajo Fin de Máster presentado por

D^a Sandra Fuentes Mardones

Dirigido por la Doctora

D^a María C. Cañadas Santiago

GRANADA, 2014

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE GRANADA



**PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ALUMNOS DE
PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA:
UN ESTUDIO EXPLORATORIO**

Trabajo Fin de Máster presentado por

D^a Sandra Fuentes Mardones

Dirigido por la Doctora

D^a María C. Cañadas Santiago

GRANADA, 2014

Este Trabajo Fin de Máster ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D+i con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación y cofinanciados con fondos FEDER.

El presente Trabajo Fin de Máster se ha realizado en el seno del grupo de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento numérico” (FQM-193) de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas las personas e instituciones, que de una u otra manera, han contribuido a la realización de esta investigación.

A la Doctora María C. Cañadas Santiago, por toda la paciencia y buena disposición. Principalmente por iniciarme en la labor investigadora.

Al colegio San José de Granada. Por acogernos y permitirnos el ingreso a sus aulas. A su directora Toñi, a las maestras Alicia y Montserrat, y a cada uno de los alumnos que formaron parte de esta investigación.

En especial, agradecer a mi familia, por acompañarme en esta aventura tan lejos de nuestro hogar.

INDICE

PRESENTACIÓN.....	-1-
CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	-3-
1.1. Motivación del problema de investigación.....	-3-
1.1.1. Motivación personal y profesional.....	-3-
1.1.2. Motivación investigadora.....	-4-
1.1.3. Motivación curricular.....	-4-
1.2. Planteamiento del problema de investigación.....	-5-
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES.....	-7-
2.1. <i>Early algebra</i>	-7-
2.2. Pensamiento funcional.....	-9-
2.2.1. Pensamiento funcional en los documentos curriculares	-12-
2.2.2. Funciones.....	-13-
2.2.3. Patrones.....	-15-
2.2.4. Generalización.....	-16-
2.2.5. Estrategias de resolución en problemas que involucran	-17-
relaciones funcionales.....	
2.3. Sistemas de representación.....	-18-
2.3.1. Sistema de representación verbal.....	-19-
2.3.2. Sistema de representación simbólico.....	-21-
2.3.3. Sistema de representación pictórico.....	-21-
2.3.4. Sistema de representación tabular.....	-22-
CAPÍTULO 3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.....	-25-
3.1. Objetivo general.....	-25-
3.2. Objetivos específicos.....	-25-
CAPÍTULO 4. MARCO METODOLÓGICO.....	-27-
4.1. Tipo de investigación.....	-27-
4.2. Sujetos.....	-27-
4.3. Diseño de la recogida de información.....	-28-
4.4. Instrumentos de recogida de información.....	-29-
4.4.1 Diseño de la prueba escrita.....	-29-
4.4.1.1. Estudio piloto 1.....	-31-
4.4.1.2. Estudio piloto 2.....	-32-
4.4.1.3. Prueba escrita definitiva.....	-33-
4.4.2. Entrevistas semiestructuradas.....	-34-
4.5. Recogida de la información.....	-35-
4.6. Categorías para el análisis de datos.....	-37-
4.6.1. Responden.....	-38-
4.6.2. Corrección.....	-38-
4.6.3. Sistemas de representación.....	-38-
4.6.4. Estrategias.....	-38-

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS.....	-41-
5.1. Producciones de los alumnos en la prueba escrita.....	-41-
5.1.1. Tarea 1.....	-42-
5.1.1.1. Apartado A.....	-45-
5.1.1.2. Apartado B.....	-45-
5.1.1.3. Apartado C.....	-46-
5.1.1.4. Apartado D.....	-46-
5.1.1.5. Apartado E.....	-46-
5.1.1.6. Apartado F.....	-47-
5.1.1.7. Apartado G.....	-47-
5.1.1.8. Apartado H.....	-48-
5.1.2. Tarea 2.....	-49-
5.1.2.1. Apartado A.....	-52-
5.1.2.2. Apartado B.....	-53-
5.1.2.3. Apartado C.....	-53-
5.1.2.4. Apartado D.....	-54-
5.1.2.5. Apartado E.....	-55-
5.1.2.6. Apartado F.....	-56-
5.1.2.7. Apartado G.....	-57-
5.1.3. Tarea 3.....	-57-
5.1.3.1. Apartado A.....	-61-
5.1.3.2. Apartado B.....	-62-
5.1.3.3. Apartado C.....	-62-
5.1.3.4. Apartado D.....	-63-
5.1.3.5. Apartado E.....	-63-
5.1.3.6. Apartado F.....	-64-
5.1.3.7. Apartado G.....	-64-
5.2. Entrevistas individuales.....	-65-
5.2.1. Entrevista alumno 7.....	-65-
5.2.2. Entrevista alumno 12.....	-67-
5.2.3. Entrevista alumno 15.....	-69-
5.2.4. Entrevista alumno 27.....	-71-
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.....	-75-
6.1. Consecución de los objetivos.....	-75-
6.2. Limitaciones de la investigación.....	-78-
6.3. Líneas de investigación abiertas.....	-78-
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	-81-
ANEXOS	
Anexo A. Estudio piloto 1 y producción del niño	
Anexo B. Estudio piloto 2 y producción del niño	
Anexo C. Prueba definitiva	
Anexo D. Entrevista semiestructurada y producción de los alumnos	
Anexo E. Producción de los alumnos en la prueba escrita	
Anexo F. Transcripción de las entrevistas	
Anexo G. Material manipulativo	

PRESENTACIÓN

La investigación aquí presentada es un Trabajo Fin de Máster realizado durante el curso académico 2013-2014, dentro del programa de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por la alumna Sandra Fuentes Mardones, bajo la tutoría de la Doctora María C. Cañadas Santiago.

Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” (FQM-193). Nuestro objetivo general de investigación es describir el pensamiento funcional de un grupo alumnos de primero de educación primaria quienes, en el momento de la recogida de información tenían edades comprendidas entre los 6 y 7 años. Los alumnos participantes en esta investigación respondieron a una prueba escrita diseñada por las investigadoras. Para complementar la información, realizamos una entrevista semiestructurada a 4 alumnos. En este informe analizamos las producciones escritas y orales de los alumnos para dar respuesta a nuestro objetivo general de investigación.

Antes de realizar la recogida definitiva de información llevamos a cabo dos pilotos, con el fin de validar los instrumentos y mejorarlos hasta lograr los instrumentos definitivos. Llevamos a cabo el primer estudio piloto a una alumna de 4 años; y el segundo estudio piloto a un alumno de 6 años. Los resultados de estos estudios nos llevaron a redactar las preguntas de forma que los alumnos entendieran nuestros requerimientos, seleccionar características de la tarea adecuada a nuestros objetivos de investigación, identificar posibles dificultades en la recogida de la información y estrategias para superarlas, identificar elementos que se debían cambiar para la recogida de información. Tras los estudios pilotos, diseñamos la recogida de información definitiva.

En la recogida de datos definitiva participaron 32 alumnos de primero de educación primaria de un colegio concertado de la ciudad de Granada en el curso académico 2013-2014. La prueba escrita consta de tres tareas con diferentes relaciones funcionales. La entrevista busca profundizar sobre las producciones de cuatro de los estudiantes en la prueba escrita y proponerles unas tareas adicionales de características diferentes a las de la prueba escrita.

Organizamos este documento en seis capítulos, los cuales presentaremos a continuación.

Dedicamos el primer capítulo al problema de investigación, presentando los intereses que nos llevan a realizar este trabajo desde los puntos de vista, personal, profesional, investigador y curricular. Por último, planteamos el problema de investigación.

En el segundo capítulo sentamos las bases teóricas en las que se sustenta nuestro trabajo, definiendo cada uno de los elementos clave en la investigación. También, hacemos mención a los antecedentes sobre el tema del trabajo, tanto a nivel nacional como internacional.

En el tercer capítulo y con base en el marco conceptual, definimos el objetivo general de investigación y su desglose en objetivos específicos.

Describimos el marco metodológico del estudio en el cuarto capítulo. Presentamos el diseño de la investigación, el diseño de los instrumentos de recogida de información, los sujetos que participaron así como la definición de las categorías para el análisis de la información.

Presentamos el análisis de datos y los resultados en el quinto capítulo. Organizamos esta información con base en los dos instrumentos diseñados para recoger la información: la prueba escrita y las entrevistas. Por tanto, combinamos un análisis cuantitativo, que hace referencia a la información recopilada del grupo de alumnos en la prueba; con un análisis cualitativo, con la información recopilada de las entrevistas.

En el sexto y último capítulo incluimos las conclusiones de este trabajo, discutiendo el logro de nuestros objetivos de investigación específicos, comparando los resultados con los de nuestros antecedentes. Además, proponemos líneas de investigación abierta, las dificultades que tuvimos en la realización de la investigación y las limitaciones que identificamos.

Por último, en los anexos incluimos información complementaria al trabajo, como son las diferentes versiones de los instrumentos de recogida de información (incluida la versión definitiva), los estudios pilotos, las producciones escritas de los estudiantes, las transcripciones de las entrevistas y los materiales manipulativos que utilizamos en las diferentes fases de nuestra investigación.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo detallamos el problema a investigar, así como la justificación personal, investigadora y curricular que nos lleva a su planteamiento.

1.1. Motivación del problema de investigación

El problema de investigación surge de tres contextos complementarios: (a) el personal y profesional, (b) el investigador y (c) el curricular. Los cuales detallamos a continuación.

1.1.1. Motivación personal y profesional

Desde hace 14 años, soy profesora de educación media en Chile (imparto docencia a estudiantes entre 13 y 18 años), y en el transcurso de mi quehacer docente en el aula, he tenido que enseñar álgebra. A esas alturas, he observado que a los alumnos no le gustan las matemáticas y tienen prejuicios sobre el álgebra específicamente, los comentarios que han escuchado sobre el tema los desmotiva, incluso antes de iniciarse en su estudio. Como este es un tema fundamental en el estudio de las matemáticas superiores, el trabajo de enseñarlas y aprenderlas, se vuelve más dificultoso.

En algunas visitas esporádicas a las aulas de los más pequeños, pude observar la necesidad de conocimiento que tienen y lo motivados que están por aprender matemáticas. ¿En qué momento muere el amor por ellas? Entonces, me planteo la posibilidad de potenciar esas habilidades de los más pequeños para beneficio a futuro. Si tenemos alumnos que les gusten las matemáticas y que se introduzcan gradualmente en matemáticas y, en particular, en el álgebra desde pequeños, entonces tendremos un mayor número de jóvenes interesados por ellas.

Yo soy chilena y, en 2011 se inició en mi país la discusión sobre las nuevas bases curriculares, las cuales, desde marzo de 2012, incluyen desde el primer año de Educación Básica (primero de educación primaria, 6-7 años), un eje temático de patrones y álgebra. Los profesores de esos niveles, no han sido formados en estas áreas, lo que les genera pesar e incertidumbre en cuanto a las competencias que poseen para desarrollar estos temas. Por ello, como docente en Chile, me parece especialmente interesante profundizar en este contenido.

Con esta idea en mente, encontré una línea de investigación en la que obtuve conocimiento y herramientas conceptuales y metodológicas para desarrollar esta temática al regreso a mi país.

1.1.2. Motivación investigadora

El *early algebra* es una propuesta curricular que surge en Estados Unidos y a la que, por el momento, España no se ha acogido. Desde hace unas décadas se viene investigando en Educación Matemática. La mayoría de los trabajos se han centrado en el paso de la aritmética al álgebra y surge del interés por indagar cómo reaccionan los alumnos antes de la educación secundaria frente a tareas algebraicas, que antiguamente solo eran desarrolladas por alumnos de este nivel educativo. En este trabajo nos centraremos en el enfoque funcional del *early algebra*, que se basa en el estudio de las relaciones entre variables y focaliza su atención en las funciones como contenido matemático.

En España, se han realizado escasas investigaciones sobre pensamiento funcional dentro de esta propuesta (Merino, 2012) y no tenemos información de que se haya llevado a cabo ninguna en los primeros curso de educación primaria. Por ello, nuestro interés por realizar este trabajo en el primer curso de educación primaria. En los antecedentes de nuestro trabajo daremos más detalle sobre las investigaciones llevadas a cabo relacionadas con esta temática, tanto fuera como dentro de nuestras fronteras.

1.1.3. Motivación curricular

Currículos de diferentes países han incluido contenidos relacionados con el álgebra escolar en niveles educativos previos a la educación secundaria. La propuesta curricular *early algebra* surge en estados Unidos pero se ha extendido por diferentes países. Como, el currículo chileno ha incluido, el eje “patrones y álgebra” en sus Bases Curriculares (Ministerio de Educación del Gobierno de Chile, 2012), desde 1° de Educación Básica a 4° año de Enseñanza Media (6 a 18 años). En otros países como Australia, Portugal, Estados Unidos o Corea también se han adherido a la propuesta curricular de *early algebra* (Merino, Cañadas y Molina, 2013). Como referente internacional, destacamos el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), que destaca la necesidad de desarrollar estas competencias, pensamiento algebraico y funcional, desde edades muy tempranas, incluso desde educación infantil.

Nuestro estudio empírico se lleva a cabo en España. En el currículo español vigente al momento de la recogida de la información (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), no hay mención específica a nociones algebraicas en educación primaria. Sin embargo, comparando con los contenidos curriculares de otros países, hay ciertos elementos que se relacionan con el pensamiento algebraico, dentro del que se enmarca el pensamiento funcional y en que se centra nuestra investigación.

1.2. Planteamiento del problema de investigación

Al involucrarnos en la lectura sobre el pensamiento funcional en edades tempranas, nos hemos encontrado con la poca o casi nula investigación que se realiza en España en torno al tema, y a nivel internacional tampoco es mucho lo que encontramos, lo cual avala nuestra investigación como novedosa y necesaria en esta área de investigación. Lo cual esperamos sea un aporte y referente para futuras investigaciones.

Nuestro problema de investigación, parte de la necesidad de potenciar el pensamiento algebraico y, específicamente, el pensamiento funcional, en edades tempranas. Queremos saber qué relaciones funcionales son capaces de establecer los alumnos de primer curso de primaria y cómo expresan sus conclusiones en la resolución de tareas relacionadas con esas relaciones funcionales.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este capítulo abordamos las bases teóricas que sustentan esta investigación. Con base en la búsqueda bibliográfica y en las lecturas realizadas sobre pensamiento funcional, organizamos este capítulo en torno a los siguientes aspectos: *early algebra*, pensamiento funcional, generalización, sistemas de representación y estrategias de resolución. La información que presentamos a continuación permite precisar el significado de los conceptos que utilizamos en esta investigación, enmarcándolos en la literatura existente. También, en paralelo, describimos los principales antecedentes de este trabajo.

2.1. Early algebra

Los estudiantes presentan numerosas y variadas dificultades con el álgebra en educación secundaria (e.g. Rodríguez-Domingo, 2011), nivel educativo en el que se suele introducir el álgebra en diferentes países. Esto justifica el interés por preparar a los estudiantes en niveles educativos inferiores para su formación en álgebra. La propuesta *early algebra* pretende subsanar este problema. Algunos autores (e.g., Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2014; Kaput, 2008; Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2007) señalan que los tiempos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y que es conveniente iniciarse en el pensamiento algebraico en educación primaria e incluso en educación infantil, aprovechando diferentes contenidos curriculares previos a la educación secundaria.

El *early algebra* es una propuesta curricular que surge en Estados Unidos y que busca incorporar en el aula de educación primaria actividades que fomenten la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para desarrollar competencias algebraicas en los alumnos. Entre estas competencias algebraicas están explorar, modelizar, hacer predicciones, generalizar, discutir, argumentar, justificar, además de practicar el cálculo. Se pretende desarrollar simultáneamente el pensamiento algebraico y aritmético desde educación primaria, para que se facilite el posterior estudio del álgebra formal en educación secundaria. Esta propuesta está orientada a la instrucción del pensamiento algebraico como a las relaciones algebraicas en niños cuyas edades estén entre los 6 a 12 años (Socas, 2011). Este trabajo es abordable para los estudiantes de educación primaria pues el pensamiento algebraico, en general, se vincula a la

observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, temas que se pueden desarrollar desde educación infantil.

Partiendo de las diferentes concepciones que se distinguen en el álgebra escolar, consideramos las siguientes aproximaciones en el *early algebra*: “El estudio de las relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones” (Molina 2009, p. 136). El *early algebra* no pretende que los alumnos aprendan álgebra formal y su simbolismo desde educación infantil si no que, en algunas situaciones, los profesores introduzcan elementos algebraicos y desarrollen en los alumnos competencias algebraicas que les permitan establecer relaciones y generalizar ciertas propiedades. En general, los enfoques del *early algebra*, concuerdan en que no es necesario agregar más contenidos al programa escolar, sino tratar con mayor profundidad los temas que ya se cubren, subrayando las ideas de generalización, estructura y relaciones.

La mayor parte de las investigaciones que se realizaron antes del año 2009, en el contexto *early algebra* parten de la aritmética y luego acceden al álgebra como parte de la generalización de ciertas propiedades (Warren, 2003). Esto se debe a la gran carga aritmética que tienen el currículo de educación primaria. Los estudios sobre la aritmética como una iniciación al álgebra son prometedores. Sin embargo, hay diversas posturas acerca de cómo llevar a la práctica dicha iniciación. Kaput, Carraher y Blanton (2009) basan su postura en la premisa de que la aritmética y la matemática en la escuela primaria se han abordado de tal manera que restan importancia a la generalización como factor inherente del pensamiento algebraico. En este trabajo nos centramos en un enfoque diferente pero complementario al anterior y que tiene cierto auge en la actualidad: el enfoque funcional.

Usiskin (1999) es uno de los autores que aborda el enfoque funcional del pensamiento algebraico, centrándose en el estudio de las relaciones entre cantidades y en el estudio de las estructuras matemáticas que se crean en torno a esas relaciones.

La autora considera que las letras que se utilizan en una expresión algebraica varían y, con ello, se vuelve necesario establecer relaciones de funcionalidad entre las variables involucradas.

El enfoque funcional propone que el álgebra se empiece a desarrollar y acompañe a los contenidos y tópicos de educación infantil y primaria con conceptos algebraicos que relacionan la variabilidad entre dos conjuntos de datos para que los niños puedan establecer relaciones funcionales de forma intuitiva. En los últimos años hemos identificado diferentes estudios que, a nivel nacional e internacional, abordan el pensamiento funcional.

2.2. Pensamiento funcional

El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que varían (Smith, 2008). Se trata del proceso cognitivo que se pone de manifiesto al “construir, describir y razonar con y sobre las funciones y está construida por tópicos, procedimientos y relaciones concernientes a las funciones” (Cañadas, Brizuela y Blanton, en revisión, p. 4).

Los investigadores en *early algebra* tienen una visión amplia sobre el pensamiento funcional: consideran que dicho pensamiento incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se puede incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos. El pensamiento funcional tiene por objetivo el establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos que están inmersos en una situación, la cual es cotidiana para el alumno, demanda el descubrir otras parejas que también estén en esa relación y la generalización de la relación que se establece entre esos conjuntos.

A través del pensamiento funcional, se busca que los niños sean capaces de detectar similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y viceversa.

Podemos identificar el pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos, con los que está trabajando y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia la generalización de la expresión, encontrando una regla que describa la relación funcional entre esas variables. Esta regla puede ser

descubierta a través de un proceso inductivo (Cañadas, Castro y Castro, 2008) donde, a través de la recursividad, en los procesos podemos obtener la regla general. La generalización es un paso clave y se logra a través de la identificación de la relación general entre los dos conjuntos de datos, que es a lo que se le denomina covariación.

Hay investigaciones que ponen de manifiesto que los niños de educación primaria pueden relacionar, razonar, identificar relaciones entre las variables, generalizar, conceptualizar e incluso expresar notación de variables en sus producciones (Cañadas et al. en revisión; Molina, 2006; Schliemann et al. 2007, Schliemann, Carraher y Brizuela, 2012; entre otros).

Investigaciones como la de Schliemann et al. (2012) destacan que la introducción del álgebra y, específicamente, del pensamiento funcional tiene repercusiones positivas en los niños de educación primaria. Así lo ponen de manifiesto los alumnos que fueron instruidos en 3°, 4° y 5° de educación primaria y a los cuales, en educación secundaria se les hizo un seguimiento de los resultados académicos que obtenían. Los autores destacan que la introducción del álgebra a través del pensamiento funcional en cursos previos les había ayudado a desenvolverse en el álgebra de educación secundaria.

Blanton y Kaput (2004) llevan a cabo una investigación sobre pensamiento funcional en educación infantil. En la actividad que proponían a los alumnos, establecer la relación que existe entre el número de perros de un grupo, con el número de ojos y el número de colas que se tenían en el grupo. Para lograrlo, realizaron una actividad con niños desde los 3 años, donde manipulaban fotografías de perros y escribían en una tabla las parejas de datos que encontraban, luego lo analizaban. Los niños gradualmente descubren propiedades en la relación, como la paridad, la relación aditiva o multiplicativa entre las variables, también son capaces de introducir notación algebraica en su respuesta.

La importancia que tiene el trabajo con el pensamiento funcional de los alumnos desde los primeros niveles de escolarización y el énfasis que los profesores le dan, queda en evidencia en Blanton y Kaput (2011). Estos autores, trabajan con profesores en ejercicio y analizan las producciones de los niños y cómo el pensamiento funcional y la introducción de variables nacen intuitivamente en edades tempranas. Entre los resultados, destacamos que los alumnos evidencian un pensamiento funcional desde los primeros niveles y esto les puede ser útil en educación secundaria. Aunque los autores

defienden la importancia de los profesores, recuerdan que los cambios se deben realizar desde el currículo.

Brizuela et al. (2014), llegan a introducir la notación de variables en alumnos de 5 a 7 años de edad, con funciones lineales, su intención es ver si los alumnos utilizan letras para expresar la generalización a partir de la introducción de parejas de datos de una tabla. Trabajan con 20 alumnos de 6 años, que cursan 1° de educación primaria y encontraron dificultades similares a las detectadas en alumnos de educación secundaria. Algunos de los errores en los que incurren los alumnos apuntan a la relación entre el orden alfabético de las letras utilizadas y su relación con el orden de los números naturales. Los alumnos de 1° de educación primaria fueron capaces de entender que una letra simbolizaba una variable, o que la pueden utilizar para generalizar una expresión, pero no desechan el uso de valores específicos para cada una de las situaciones planteadas.

Cañadas et al. (en revisión) analizan la relación de covariación que establecen alumnos de 2° de educación primaria al trabajar con situaciones que involucran funciones lineales. Las autoras trabajan en un aula con 21 alumnos, donde piden a los niños relacionar las cantidades en una tabla. Entre los resultados destacan las diferentes estrategias utilizadas para relacionar las dos variables. Por ejemplo, había niños que utilizaban el doble como la suma de sí mismo (donde identifican la relación de covariación presente en la función) y otros que utilizaba la suma de 2 en 2 (con base en la relación de recursividad, lo cual les dificulta para llegar a la generalización). Las autoras destacan el interés de utilizar material manipulativo para introducir a los alumnos en los problemas que se les plantean.

Como hemos observado, las investigaciones citadas, aportan diferentes indicadores de qué observar cuando buscamos describir el pensamiento funcional de un niño durante la realización de una tarea. Por ejemplo, las funciones como contenido matemático, los patrones, la generalización, las estrategias de resolución o los sistemas de representación son algunos de estos elementos, que describiremos en los siguientes apartados de este capítulo. Comenzaremos por la función, como contenido matemático en el que se fundamenta el pensamiento funcional.

2.2.1. Pensamiento funcional en los documentos curriculares

En cuanto a las directrices curriculares, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) propone el estudio del álgebra de forma transversal en todos los niveles educativos, junto con contenidos como número y operaciones, geometría, medida, análisis de datos y probabilidades, dando énfasis a que el bloque de contenidos de álgebra debe ser desarrollado no solo en educación secundaria, si no desde educación infantil. Desde esta perspectiva, el álgebra tiene un enfoque multidimensional, ya que los tópicos que componen el bloque algebraico son variados, como la relación entre cantidades y funciones, comprensión de patrones, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, entre otras.

En el currículo español el estudio del álgebra se inicia en la educación secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b), abordando temas como, la relación entre variables, la generalización de expresiones, la introducción de letras en la escritura de expresiones numéricas. Por lo que los alumnos se introducen en el álgebra a partir de los 12 años, cuando ya se han trabajado contenidos que podrían haber hecho de puente entre esos contenidos y el álgebra.

En el Real Decreto de Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), en torno a los objetivos transversales, vemos como estos apuntan hacia el sentido crítico que deben tener los alumnos:

... sentido crítico, iniciativa personal, curiosidad, interés y creatividad en el aprendizaje... Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana. (p. 31488)

Las competencias en matemáticas que hacen referencia a nuestro estudio en particular y que nos ayuda a la concreción de nuestro objetivo de investigación son:

...Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones... la competencia

matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros)... (p. 31493-31494)

En la definición del área de conocimiento de matemática el currículo hace mención a “... Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria...” (p. 31555). En cuanto al desglose de los contenidos por ciclos, nos encontramos que en el primer ciclo (1º y 2º curso de educación primaria), los alumnos tienen la noción de serie y cómo esta se construye, relacionando los números a través de sumas iteradas, se les pide explícitamente que sean capaces de relacionar y comunicar los resultados que van obteniendo. En el 2º ciclo (3º y 4º de educación primaria), los alumnos tienen por objetivo utilizar los números para codificar información, utilizarlos en situaciones reales, explicando los procesos y resultados en forma oral y escrita. En el 3º ciclo (5º y 6º curso de educación primaria), nos encontramos con, “Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas” (p. 31562).

El currículo de educación infantil (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007c) se detallan algunas nociones que abordan tangencialmente el desarrollo del pensamiento funcional en edades tempranas (edades comprendidas entre 3 y 5 años). Como objetivo de este ciclo escolar, queda de manifiesto que las directrices curriculares hacen referencia al desarrollo de las relaciones lógico-matemáticas.

Observamos que, a medida que los cursos van avanzando, se hacen más explícitos los conceptos de relaciones entre las magnitudes, y al análisis de estas relaciones numéricas. En ningún momento del currículo español se hace referencia explícita a la integración del álgebra en educación primaria. Sin embargo, sí existen contenidos en los cuales se pueden incluir situaciones que sean de provecho en la introducción del pensamiento funcional.

2.2.2. Funciones

Una función es una relación entre dos conjuntos de datos, donde hay una dependencia de los valores de uno o más conjuntos de datos respecto de otro(s). En este trabajo nos centraremos en las funciones que relacionan dos conjuntos de datos. Las funciones

cumplen con las condiciones que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada. Las funciones se pueden expresar a través de diferentes sistemas de representación, como son el gráfico, tabular, pictórico o simbólico.

Usualmente se representa con x a la variable independiente y por y o $f(x)$ a la variable dependiente, al conjunto de todos los valores que toma la variable independiente es el dominio de la función y el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente es el rango o recorrido de la función (Spivak, 1996).

Hay dos tipos de funciones, las algebraicas y las trascendentales. En las funciones algebraicas nos encontramos con las racionales, polinómicas y radicales (por parte). En las funciones trascendentales tenemos a las funciones exponenciales, logarítmica y trigonométricas (Thomas, 2006). A continuación se presenta un resumen gráfico de los tipos de funciones, adaptado a las necesidades de nuestra investigación.

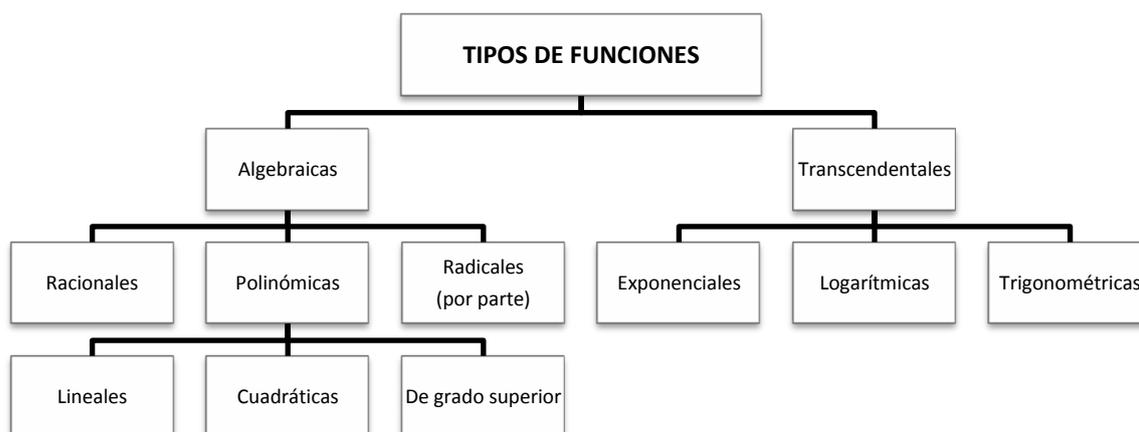


Figura 2.1. Tipos de funciones

En nuestra investigación trabajamos con un tipo concreto de funciones polinómicas: las funciones lineales. Las funciones lineales son de la forma $f(x)=mx+b$, donde m es la pendiente de la recta y b es el punto de corte con el eje Y.

Merino et al. (2013) distinguen dos relaciones que se pueden establecer en las funciones de dos variables, dependiendo de los valores de la variable que se conocen: relación directa y relación inversa.

El autor trabaja con la relación que se puede establecer entre el número de mesas y las personas que se pueden sentar alrededor de ellas, estamos frente a lo que define como relación directa, dado el número de mesas puedo descubrir el número de niños que se pueden sentar a su alrededor, en cambio, cuando el autor le da como dato conocido el número de niños que están sentados y requiere el número de mesas que son necesarias, estamos frente a lo que define como relación inversa entre las variables.

En educación infantil y educación primaria no expresamos las funciones mediante simbolismo algebraico, sino que es habitual utilizar el lenguaje natural. Así, se tiene que para la función identidad ($f(x)=x$), se pueden utilizar expresiones verbales, como “los mismos que...” o “tantos como...”, para indicar la relación entre los dos conjuntos involucrados, haciendo referencia a que ambos poseen la misma cantidad de elementos. Otras funciones lineales que se utilizan comúnmente son el doble o la mitad, $f(x)=2x$ o $f(x)=x/2$. Podemos generalizar a las expresiones a $f(x)=ax$ o $f(x)=x/a$ (con a diferente de 0, cuando a es denominador). También se puede utilizar expresiones verbales como “tengo dos más que tú...” ($f(x)=x+2$) o “tengo dos menos que tú...” ($f(x)=x-2$).

2.2.3. Patrones

La búsqueda de patrones entre los conjuntos numéricos involucrados en las funciones sirven al niño para desarrollar el pensamiento funcional y establecer el término general de la función.

Los patrones son considerados como “algo” que se repite con regularidad (Castro, 1995). Lo común, lo repetido con regularidad y que se prevé que puede volver a repetirse (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

Moss y London (2011) trabajan con alumnos de 2° de educación primaria, de diferentes escuelas de Estados Unidos y de Canadá, se les presentan a los alumnos patrones de crecimiento geométricos y numéricos, llegan a la conclusión que la utilización de patrones crecientes ayuda a los alumnos a desarrollar el pensamiento funcional, ya que ellos deben crear sus propios patrones y verificar si son correctos, defendiendo su postura frente a la clase.

Radford (2012) trabaja en una investigación longitudinal con alumnos de 2° a 4° de educación primaria, donde ven la evolución del lenguaje, corporal y simbólico, en la búsqueda de patrones geométricos. Los alumnos en 2° de educación primaria, tienden a

utilizar el conteo de las figuras, sin crear relaciones que vayan más allá de dar una respuesta a la pregunta planteada, sin embargo, con ayuda de la maestra, son guiados en la forma de establecer patrones para la figura dada y generalizar ese patrón. En 3° grado se observa una evolución del lenguaje y de la aplicación de la técnica para encontrar patrones aprendida el año anterior. En 4° grado, los alumnos establecen sin problemas los patrones y son capaces de generar más de una expresión algebraica que determine ese patrón. Concluye el autor, con la reflexión de que podemos incluir actividades algebraicas en lo cotidiano y los alumnos van a reaccionar a ellas de forma positiva.

2.2.4. Generalización

Según Piaget (1978), la generalización es un proceso de abstracción empírica y solo basta con el paso de algunos a todos, ya que es de carácter extensional, también nos propone que la generalización es fundamental en la construcción de conocimiento, que está sometida a la abstracción y que tiene como tarea fundamental el encontrar relaciones reales entre los objetos en estudio.

Kaput (1999) define generalizar como:

... extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 58).

En Cañadas y Castro (2007) se describe la generalización como una expresión que abarca a todos los casos posibles, que se construye a través de la inducción comenzando con casos particulares. La generalización es un paso clave dentro del proceso de razonamiento inductivo, que parte de casos particulares y busca expresar el término general.

En el estudio de Lannin (2005) podemos ver los tipos de generalización que los alumnos utilizan en las tareas asignadas, se destacan el de la generalización empírica y el de generalizar a través de un ejemplo genérico. Al principio de la investigación, que se realiza con alumnos de 6° grado, los alumnos no dan importancia a la justificación de la generalización. Al tratarse de una investigación de diseño, a medida que van

interactuando en la instrucción sobre la generalización y que el investigador los va formando, los alumnos enriquecen su vocabulario y formalizan la generalización a través de la justificación de sus decisiones.

Merino et al. (2013) trabajan el pensamiento funcional con alumnos de 5° de educación primaria en la realización de tareas de generalización. A través de un ejemplo genérico, los alumnos establecen relaciones funcionales entre las variables. Concluyen que los tipos de representaciones que los alumnos utilizan son variados, que logran generalizar y que evidencian en sus producciones utilización de pensamiento funcional.

Butto y Rojano (2009) desarrollan su investigación con 12 alumnos de 5° de primaria. Las autoras introducen el concepto de variación proporcional y generalización con la ayuda de lápiz y papel y el programa Logo. Concluyen que los alumnos pueden trabajar conceptos algebraicos en edades anteriores a la formalización, en diferentes tipos de tareas y con diversos materiales de apoyo como lo son la utilización de lápiz y papel o el manejo del programa computacional Logo.

2.2.5. Estrategias de resolución de tareas que involucran relaciones funcionales

Las estrategias son las diferentes formas o caminos que el alumno utiliza para resolver el problema, específicamente, en nuestra investigación nos basamos en la relación funcional que los alumnos establecen entre las variables involucradas, las cuales los conducen a la posterior generalización. Establecer una estrategia válida o adecuada, llevará a dar una respuesta correcta.

Cañadas (2007) plantea la secuenciación de siete pasos que podemos utilizar como estrategia en resolución de problemas en los que se busca llegar a la generalización: (a) trabajo con casos particulares, (b) organización de los casos particulares, (c) identificación de patrones, (d) formulación de conjeturas, (e) justificación, (f) generalización y (g) demostración. Los pasos previos a la generalización se consideran importantes pero no imprescindibles para lograr la generalización.

Las estrategias que los alumnos identifican en una relación funcional, dependen de cuál sea la relación que adopte el alumno. Podemos observar una relación funcional, tratando de buscar cual es la relación entre dos magnitudes, observar la progresión de cada una de las variables involucradas en el problema, la diferencia entre dos pares de datos

consecutivos, establecer cuanto más (o menos) es una magnitud respecto a la otra, entre otras relaciones que podrían establecer.

Merino et al. (2013) trabajan con alumnos de 5° de educación primaria, se les pide que encuentren un patrón para dar respuesta a las cuestiones de relación directa de las mesas (ver figura 2.2), donde deben sentar a dos niños en los costados de las mesas y a dos en las cabeceras, según vayan colocando más mesas, llegando a establecer un patrón entre el número de mesas y el número de niños. Observamos que los alumnos utilizan una diversidad de estrategias, algunas erróneas y otras correctas, $M \times 2 + 2$, $M + M + 2$, $M + M + 1 + 1$, $M + 8$, $M \times 4$ (donde M representa el número de mesas utilizadas), respuesta directa y conteo de dibujos. Todas estas fueron estrategias que los alumnos utilizaron para resolver el problema.

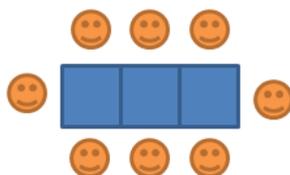


Figura 2.2, Ejemplo generador (Merino et al. 2013)

Las estrategias que establecen estos autores en el proceso de generalización, son:

Conteo (los alumnos cuentan elementos para dar respuesta a la cuestión), uso de patrón (los alumnos identifican algún patrón, que puede ser completo/incompleto y apropiado/inapropiado, para una cuestión concreta), operación sin uso de patrón (los alumnos utilizan alguna operación que no podemos relacionar con un patrón para la cuestión), y repetición de enunciado (los alumnos repiten las instrucciones dadas en el enunciado general de la prueba) (p. 29).

En Cañadas et al. (en revisión) trabajan el uso de diferentes estrategias para llegar a la generalización, identificamos el uso de la covariación entre las variables, también los alumnos identifican el doble de la variable o la serie de 2 en 2, los alumnos logran establecer estas estrategias por la utilización de material manipulativo.

2.3. Sistemas de representación

En este apartado definimos los sistemas de representación, presentando algunos ejemplos. Finalmente nos centramos en aquellos sistemas de representación que son relevantes por el contenido matemático en el que se centra nuestra investigación: las funciones.

En la literatura encontramos diferentes definiciones de representaciones y de sistemas de representación (e.g., Brizuela, Carraher y Schliemann, 2000; Brizuela y Lara-Roth, 2002; Cañadas y Figueiras, 2011; Gómez, 2007; Rico, 2009), aunque todos coinciden en que una representación nos sirve para expresar contenidos matemáticos y que diferentes representaciones destacan ciertas características de cada contenido. En el caso de los sistemas de representación, existen unos signos o símbolos propios de cada sistema y existen unas reglas para crear, transformar y relacionar esos signos.

Gómez (2007) define los sistemas de representación como “los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto” (p. 41) y que cada sistema de representación permite resaltar ciertos significados de ese concepto.

El pensamiento funcional involucra a las funciones que, como contenido matemático, conlleva una serie de sistemas de representación asociados. Cada uno de esos sistemas de representación pone de manifiesto unos u otros significados de este contenido. El sistema de representación simbólico es muy importante para las funciones, incluyendo tanto los números como las letras. Sin embargo, no es uno de los sistemas de representación clave para los niños de educación primaria porque no están familiarizados con él. El uso del lenguaje natural (sistema de representación verbal) es especialmente útil para los alumnos de los primeros cursos porque les resulta cercano (Cañadas et al. en revisión; Radford, 2011). Los investigadores en *early algebra* tienen una visión sobre los sistemas de representación asociados al pensamiento funcional y consideran que incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se pueden incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos.

2.3.1. Sistema de representación verbal

El sistema de representación verbal permite utilizar el lenguaje natural para exponer los resultados que van obteniendo, de forma cohesionada y estructurada y permiten expresar el proceso de razonamiento (Cañadas y Figueiras, 2011).

En la figura 2.3 recogemos un ejemplo de situación expresada verbalmente.

Cantidad de bandejas de media docena necesarias
para tener una cierta cantidad de huevos

Figura 2.3. Ejemplo de los huevos.

La relación funcional que está inmersa en la situación de la figura 2.3, expresada mediante simbolismo algebraico, es $f(x) = 6x$, siendo x el número de bandejas y $f(x)$ el número de huevos.

El sistema de representación verbal puede ser útil en el enunciado de situaciones como en la resolución de las mismas. En la figura 2.4 mostramos ejemplos de la solución dadas por diferentes sujetos ficticios para la relación mostrada en la figura 2.3 en el sistema de representación verbal.

Juan: En la primera bandeja hay 6 huevos y en la segunda bandeja también hay 6 huevos y así seguimos hasta llegar a la última bandeja.

María: Con cada bandeja de huevos agregamos 6 huevos a los que ya teníamos.

Antonia: Los huevos son 6 veces la cantidad de bandejas que tengamos.

Figura 2.4. Ejemplos de sistema de representación verbal

Brizuela y sus colaboradores (Brizuela et al. 2000; Brizuela et al. 2014; Brizuela y Lara-Roth, 2002), trabajan con entrevistas donde los alumnos se expresan verbalmente sobre la relación que establecen entre las variables, la cual se encauza para que los niños cambien de sistema de representación al simbolismo algebraico o tabular, según sea el fin que persiga la investigación.

Cañadas et al. (en revisión) proponen utilizar un lenguaje natural con el cual los niños estén familiarizados y plantearles todas las formas de representación, inclusive la notación algebraica una vez han identificado el patrón, así el desarrollo del pensamiento funcional se ve enriquecido. Inician su investigación empírica con la premisa que los niños tienen más recursos para razonar de lo que se pensaba hace algunos años. Concluyen que en este ámbito del conocimiento la investigación es muy reciente y que

se están haciendo esfuerzos por desentrañar la forma de utilizar el pensamiento funcional de los niños.

2.3.2. Sistema de representación simbólico

Como lo expone Rico (2009, p. 8), el sistema de representación simbólico es de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas computacionales y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas y procedimientos. Para las funciones, se suele distinguir entre el numérico y el simbolismo algebraico.

Los niños de educación primaria no están familiarizados con el simbolismo algebraico, por lo que este sistema de representación se suele restringir a expresiones que involucran números.

En la figura 2.5 ponemos de ejemplo lo que se puede encontrar en el sistema de representación simbólico, en el problema de los huevos anteriormente mencionado (figura 2.3).

6+6+6+6 o 6 y 6 y 6 y 6	$n^{\circ}H = 6 \times n^{\circ}B$ donde, H=huevos B=bandejas	$f(x)=6x$	1 2 3 4 5 (6)
			7 8 9 10 11 (12)
			13 14 15 16 17 (18) ...

Figura 2.5. Ejemplos de sistema de representación simbólico

En la investigación que lleva a cabo Brizuela et al. (2014), el objetivo es la introducción del simbolismo algebraico a través de la inclusión de letras, las cuales actúan como variables. En sus conclusiones resaltan que los alumnos pueden adquirir un lenguaje de letras como variables y evidencian el pensamiento funcional en la introducción de éstas variables en las tareas propuestas a los alumnos.

2.3.3. Sistema de representación pictórico

El sistema de representación pictórico es aquel en el que intervienen dibujos.

Los dibujos ayudan al alumno a organizar la información que está generando, en la cual está pensando y busca dar solución al problema que le plantearon. Los dibujos también pueden recoger información presente del enunciado y sobre él puede el alumno hacer anotaciones que le permiten resolver el problema.

En la figura 2.6 recogemos tres dibujos que representan la situación de la figura 2.3 para tres bandejas de media docena.

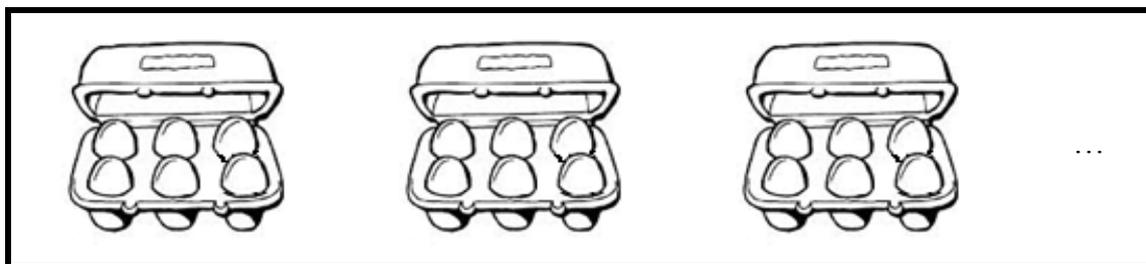


Figura 2.6. Ejemplo de sistema de representación pictórico

Brizuela et al. (2000) hace una investigación con alumnos de 3º de educación primaria en la que les plantean situaciones problemáticas que deben resolver. El sistema de representación, que los alumnos utilizan con mayor frecuencia es el pictórico. Los alumnos representan la información entregada por el profesor en este sistema de representación. La autora identifica cómo los estudiantes ponen de manifiesto la relación entre las variables implicadas en las tareas verbal y pictóricamente. A medida que la instrucción avanza, como parte del estudio, los alumnos utilizan cada vez menos el sistema de representación pictórico, dando paso al sistema de representación simbólico.

2.3.4. Sistema de representación tabular

El sistema de representación tabular se basa en el uso de tablas que relacionan valores. En el caso de las funciones con dos variables, las tablas permiten organizar la información, relacionando los valores de las dos variables involucradas. Para que los alumnos establezcan relaciones entre los valores de las columnas o filas de las tablas que deben ir construyendo.

Siguiendo con el ejemplo de la figura 2.3, en la figura 2.7 mostramos un ejemplo en el sistema de representación tabular.

Nº de bandejas	Nº de huevos
1	6
2	12
3	18
4	24

Nº de bandejas	Nº de huevos
...	...

Figura 2.7. Ejemplo de sistema de representación tabular

Brizuela y Lara-Roth (2002) estudian los distintos modos de utilización de las tablas por los alumnos en la resolución de tareas, los autores ponen de manifiesto lo útiles que son las tablas para ayudar a los alumnos a avanzar en el establecimiento de las relaciones funcionales. La creación de tablas y el análisis por parte de los alumnos de los datos que estas organizan, hacen que ellos identifiquen las relaciones existentes entre las variables con mayor facilidad que cuando los datos se encuentran de manera desordenada.

CAPÍTULO 3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo, con base en los elementos introducidos en el capítulo anterior, presentamos el objetivo general de la investigación y lo desglosamos en tres objetivos específicos.

3.1. Objetivo general

El objetivo general de esta investigación es “Describir el pensamiento funcional de alumnos¹ de primero de educación primaria en España”.

3.2. Objetivos específicos

Para abordar el objetivo general propuesto, lo desglosamos en los siguientes objetivos específicos.

OE1 Identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos en tareas que involucran una relación funcional lineal directa entre dos variables, prestando especial atención a los diferentes tipos de patrones que utilizan.

OE2 Identificar y describir estrategias utilizadas por alumnos en tareas que involucran una relación funcional inversa, una función lineal con término independiente y una relación funcional lineal entre varias variables.

OE3 Describir los sistemas de representación que los alumnos utilizan en la resolución de las tareas sobre las funciones propuestas.

Con base en los objetivos de investigación propuestos, diseñamos este estudio.

¹ En este trabajo utilizaremos la palabra “alumnos” para hacer referencia tanto al masculino como al femenino de este término.

CAPÍTULO 4. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo describimos los aspectos metodológicos de este estudio. Para ello, describimos el tipo de investigación, caracterizamos los sujetos que participan, describimos el diseño de los instrumentos para la recogida de datos, el procedimiento de esta recogida, y las categorías definidas para el análisis de datos.

4.1. Tipo de investigación

Esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Exploratorio, porque las investigaciones que hay en torno a este tema son recientes y escasas. El estudio es descriptivo porque el análisis de los datos pretende describir los procesos de los alumnos en torno a su pensamiento funcional.

Se trata de un estudio de campo exploratorio, pues no hay información sobre el pensamiento funcional de los alumnos de primero de educación primaria en España. Pretendemos recopilar información que sea la base para posteriores investigaciones, con la intención de sentar la base para una posterior Tesis Doctoral sobre el desarrollo del pensamiento funcional en las primeras edades.

Nuestro trabajo es una investigación transversal ya que está situada en un momento específico de la vida de estos estudiantes. Recogemos información de un grupo de estudiantes de primero de educación primaria, elegido intencionalmente, a los que aplicamos una prueba escrita. De ellos, elegimos a cuatro estudiantes, a los que realizamos una entrevista semiestructurada. Tanto la prueba escrita como el guión de la entrevista fueron elaborados por las investigadoras.

4.2. Sujetos

Con base en nuestros objetivos, seleccionamos una muestra intencional compuesta por 32 niños, que cursan primero de primaria en el período académico 2013-2014, en el Colegio San José, Granada. Los niños tenían edades comprendidas entre los 6 y 7 años en el momento de la recogida de la información. El colegio incluye educación infantil, primaria y secundaria, es un centro concertado y tiene dos grupos por cada curso.

En cuanto a los conocimientos previos de los alumnos, ellos no habían trabajado con los sistemas de representación, patrones numéricos o algebraicos y no se les ha instruido sobre los procesos de generalización. Esto no es de extrañar porque, estos tópicos no están incluidos en el currículo actual del primer curso de educación primaria. Sin embargo, sí habían trabajado en educación infantil la identificación de patrones geométricos y las maestras manifestaron que habían trabajado las series de 1 en 1 y de 2 en 2, como actividades de conteo en matemáticas, pero no estaban asociadas a ningún contexto específico.

Algunos alumnos presentan características específicas: un alumno con hiperactividad y dos alumnos no lectores. Los tres reciben apoyo continuo de la psicopedagoga. También nos encontramos con que la mitad del grupo está iniciándose en la escritura.

Tuvimos en cuenta las características de los sujetos para el diseño de la investigación.

4.3. Diseño de la recogida de la información

Inicialmente, teníamos previsto proponer una prueba escrita con una serie de tareas en las que los sujetos pudieran poner de manifiesto su pensamiento funcional. Además, teníamos en mente la realización de entrevistas. Dadas las dificultades con la lectura que presentan algunos de los sujetos, decidimos hacer una presentación inicial ante toda la clase, donde planteamos las tareas de forma oral. Además, decidimos introducir las actividades a través de recursos manipulativos para facilitar su comprensión (a ellos no les entregamos el material concreto en la prueba escrita, pero sí en las entrevistas). Elaboramos material igual al que tenían impreso pero de forma que pudiéramos manipularlo y, simultáneamente, les sirviera para entender en qué consistía la prueba escrita. A continuación, hubo un tiempo destinado al trabajo individual en el que los alumnos debían responder a una serie de tareas de forma escrita e individualmente. Durante esta parte del trabajo podían preguntar dudas sobre los planteamientos a las investigadoras. Esto también sirvió para, tener una primera aproximación del tipo de respuesta que daban los alumnos a las tareas propuestas porque continuamente nos paseábamos por el aula.

Al aula entramos la investigadora (autora de este TFM) y la tutora del trabajo. Fue labor de la autora del TFM presentar la prueba escrita a la clase, explicarles cómo completar

las diferentes tareas propuestas (les entregamos tareas individuales por escrito para que las cumplimentaran y las explicaran), utilizando materiales manipulativos. Registramos lo acaecido mediante cámaras de video y audio. Durante el tiempo de trabajo individual, tanto la autora como la tutora, hicimos un seguimiento de la resolución de las tareas y resolvimos dudas. La tutora tomó algunas notas escritas e hizo fotografías.

Con base en la información recogida del trabajo individual, seleccionamos a algunos sujetos para la realización de entrevistas semiestructuradas. Los criterios que utilizamos para la selección son la utilización de patrones únicos, o bien la representatividad que tenga la estrategia en el grupo. El fin de las entrevistas es complementar la información recogida a través de las pruebas escritas y profundizar en el pensamiento funcional que evidenciaban estos alumnos. Para ello, preguntamos sobre la prueba escrita e incluimos algunas cuestiones adicionales que presentaremos más adelante. Dado que en las entrevistas introdujimos materiales manipulativos, también analizamos si esto les ayudó en la resolución de la tarea. Los estudiantes que fueron seleccionados para la realización de las entrevistas fueron aquellos que en la prueba escrita evidenciaron una estrategia de representación de la solución innovadora o diferente a la de sus compañeros, o que habían incurrido en errores en la solución y necesitábamos que verbalizaran la explicación (escasa o nula) que dieron por escrito. Finalmente seleccionamos a 4 alumnos para realizar las entrevistas.

4.4. Instrumentos de recogida de información

Utilizamos dos instrumentos de recogida de información, que describimos en este apartado: (a) prueba escrita y (b) entrevista semiestructurada.

4.4.1. Diseño de la prueba escrita

El diseño de la prueba escrita parte del interés por elaborar tareas que evidenciaran en los alumnos la presencia de pensamiento funcional. Diseñamos una tarea en un contexto cercano y ameno para los sujetos (un cumpleaños), que involucraran diferentes variables, con relaciones funcionales que pudieran ser abordados por los sujetos en 1,5 horas de trabajo máximo, para evitar el cansancio.

Las variables de tarea que consideramos fueron: (a) número de variables involucradas, (b) tipo de relación entre las variables, (c) tipo de relación funcional, (d) tamaño de los

números implicados, (e) sistemas de representación empleados en el enunciado, (f) sistemas de representación en el que se les pedía la respuesta, (g) preguntas sobre casos particulares consecutivos y no consecutivos.

Número de variables involucradas

En cada tarea se trabaja con la relación entre dos variables, la variable independiente para todas las relaciones es la misma. En la entrevista hay una tarea que incluye las 4 variables involucradas en la investigación, a la cuál denotamos por varias variables.

Tipo de relación entre las variables

Las relaciones que fueron estudio de esta investigación son la relación directa, si al alumno se le entrega como dato conocido el valor de la variable independiente y se le pide que encuentre el valor de la variable dependiente, estamos frente a una relación inversa cuando el grado de dependencia se invierte y hacemos referencia a la relación de varias variables cuando son más de dos las variables involucradas.

Tipo de relación funcional

Las relaciones funcionales que están inmersas son polinómicas lineales de la forma $f(x)=mx + b$.

Tamaño de los números implicados

Los números utilizados como variable independiente fueron 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100. Los primeros cinco casos se tomaron de forma consecutiva para que los alumnos percibieran la relación entre las variables, luego se les entregan casos particulares lejanos y no consecutivos, el octavo, décimo y vigésimo término, para obligar al niño a abstraer la relación numérica, y por ultimo una generalización de un caso particular lejano, al hacerles una pregunta abierta sobre el valor 100.

Sistemas de representación empleados en el enunciado

Los sistemas de representación que fueron utilizados en los enunciados de las tareas son pictórico, simbólico, verbal y tabular.

Sistemas de representación en el que se les pedía la respuesta

Como se definió en el apartado anterior se les hizo mención a los alumnos en forma oral que ellos podían utilizar la forma de explicación que quisiesen, haciéndoles explícito que podían escribir un número u operaciones (simbólico), hacer un dibujo (pictórico), o escribir con palabras (verbal) lo que pensaban.

Preguntas sobre diferentes casos particulares y generalización

Para esta investigación, utilizamos la continuación para los primeros cinco términos de la relación (consecutivos) y la extrapolación para los casos particulares 8, 10, 20 y 100 (no consecutivos); pudiéndose considerar 20 y 100 como generalización, por no ser casos particulares consecutivos ni cercanos para el ámbito numérico de los alumnos.

Tras varias revisiones en las que tuvimos en cuenta otras cuestiones como que el contexto fuera cercano y llamativo para los niños de la muestra según la revisión de antecedentes y que los alumnos en su mayoría estaban aprendiendo a escribir, nos llevó a confeccionar un instrumento que recogiera la información que necesitábamos para lograr los objetivos. Llegamos a lo que consideramos la primera versión de prueba, que utilizamos en el estudio piloto 1 (ver Anexo A).

4.4.1.1. Estudio piloto 1

Aplicamos la primera versión de la prueba a una niña de 4 años de edad, elegida intencionalmente, con resultados académicos superiores a la media de alumnos de esa edad, en forma de entrevista semiestructurada. Le explicamos lo que debía ir haciendo en cada una de las tareas y le fuimos preguntando que hacía y cómo se lo podría explicar a otra persona.

La entrevista tuvo una duración 1 hora y 10 minutos y nos permitió obtener las siguientes conclusiones. Por un lado, la alumna entendió lo que se le pedía y las respuestas pusieron de manifiesto relaciones entre las variables implicadas en la tarea

(ejemplo de pensamiento funcional), utilizando frases como “a cada niño le toca un gorro, entonces 5 gorros, 5 niños”. En esta ocasión, la alumna explicitó la generalización directa verbalmente. También trabajamos con ella la relación inversa, la cual tampoco le conllevó mayor dificultad y la relación funcional entre varias variables que resolvió sin dificultad.

Después de llevar a cabo el primer estudio piloto, analizamos las dificultades y fortalezas. Tras este análisis, decidimos incluir una tercera relación funcional (relación $f(x)=5x$), una tarea con un valor independiente (relación $f(x)=x+1$), incluir únicamente la relación directa en la prueba escrita y dejar la relación inversa y varias variables en la entrevista, esto debido al tiempo que conlleva la introducción de una tercera y cuarta tarea, estamos duplicando el número de tareas y aumentando la complejidad de las mismas, además hay que considerar el tiempo que demanda el trabajo con el gran grupo. Tras estas decisiones, produjimos una segunda versión de la prueba (ver Anexo B), Utilizamos esta versión en el estudio piloto 2.

4.4.1.2. Estudio piloto 2

Realizamos el segundo estudio piloto a un niño de 6 años de edad que cursa primero de primaria en un colegio público de la ciudad de Granada. El niño es no lector y es elegido de manera intencionada. La tarea se le aplicó en forma de prueba escrita, sin mayor instrucción de lo que debía hacer. Este niño dedicó mucho tiempo a dibujar en forma correcta los dibujos que representan los elementos de las relaciones, dedicándole demasiado tiempo a los detalles de los dibujos. Logró identificar la primera relación funcional (relación $f(x)=x$) de forma correcta, pero se agota al ver el número de folios que se le entregó. En la segunda relación (relación $f(x)=3x$) repartió a cada niño un elemento, sin tomar en cuenta la relación de la unidad uno a tres entregada como primera pareja de datos y procedió de la misma manera con las siguientes relaciones ($f(x)=5x$ y $f(x)=x+1$), tratando de terminar rápidamente.

Después de analizar los datos obtenidos en el estudio piloto 2, tomamos algunas decisiones para la versión definitiva de la prueba.

- Los dibujos no deben tener muchos detalles, para que no actúen como distractores.

- Es importante explicar a los niños en la pizarra como introducir datos relativos a los primeros casos particulares en una tabla.
- Es mejor entregarles la prueba separando las tareas (no todos los folios simultáneamente).
- En la entrevista trabajaremos con la relación inversa, relación entre varias variables y con la inclusión de un término independiente en la relación.

4.4.1.3. Prueba escrita definitiva

Tras la realización de los dos estudios pilotos y sucesivas modificaciones tras los resultados obtenidos en los mismos, diseñamos la prueba definitiva, que la presentamos en el Anexo C.

Para esta investigación le planteamos a los alumnos tres relaciones funcionales lineales distintas, que tenían que ver con objetos presentes en una fiesta de cumpleaños, en los cuales debían rellenar los casilleros vacíos de una tabla, según el ámbito numérico en el cual se manejan los alumnos.

Tarea 1

Relación entre número de niños y número de gorros que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños. Para la tarea 1, la función identidad es la que determina la relación entre las variables, o bien, $f(x)=x$, donde el valor de la variable independiente es siempre igual al valor de la variable dependiente. Se les da explícita la relación 1 niño-1gorro y se les pregunta por los siguientes casos particulares, 2, 3, 4, 5, 8, 10 y 20 niños y como explicarían a la mamá la compra de gorros de haber 100 invitados a la fiesta.

Tarea 2

Relación entre número de niños y número de piruletas que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños. Para la tarea 2, la función que determina esta relación es $f(x)=3x$, donde el valor de la variable independiente es siempre un tercio del valor de la variable dependiente, o bien el valor de la variable dependiente es el triple del valor de la variable independiente. Se les da escrita en el folio la relación 1 niño-3 piruletas y ante el gran grupo se hace explícita la relación 2 niños-6 piruletas, se les pregunta por los

siguientes casos particulares, 3, 4, 5, 8, 10 y 20 niños y como explicarían a la mamá la compra de piruletas de haber 100 invitados a la fiesta.

Tarea 3

Relación entre número de niños y número de globos que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños. Para la tarea 3, la función que determina esta relación es $f(x)=5x$, donde el valor de la variable independiente es la quinta parte del valor de la variable dependiente, o bien el valor de la variable dependiente es el quíntuple del valor de la variable independiente. Se les da escrita en el folio la relación 1 niño-5 globos y ante el gran grupo se hace explícita la relación 2 niños-10 globos, se les pregunta por los siguientes apartados, 3, 4, 5, 8, 10 y 20 niños y como explicarían a la mamá la compra de globos de haber 100 invitados a la fiesta.

4.4.2. Entrevistas semiestructuradas

La entrevista (Anexo D) consta de dos partes. En la primera se pretende complementar la información del trabajo del alumno en la prueba escrita. Para ello, con sus producciones escritas delante, se le hacen preguntas como por ejemplo, ¿Qué hiciste? ¿Cómo lo pensaste? ¿Cómo se lo explicaríamos a la mamá de Lola? ¿Podríamos saber la solución para 100 niños? En la segunda parte de la entrevista, utilizamos una tarea escrita que involucra la relación inversa de las variables trabajadas en la prueba escrita inicial, la inclusión de un término independiente en la relación ($f(x)=x+1$) y la relación entre varias variables dado solo uno de los términos de esta relación.

A continuación detallaremos las tareas utilizadas en la entrevista, las variables son las mismas que se utilizaron en la prueba escrita.

Tarea 1 entrevista

Relación inversa entre número de niños y número de gorros que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños, se les da escrita en el folio la relación 3 niños-3 gorros y se les pregunta por el número de niños dados 7 y 12 gorros. Oralmente les preguntamos cómo se podía obtener esa información.

Tarea 2 entrevista

Relación entre número de niños y número de gorros que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños, si a la cumpleañera se le debe comprar un gorro diferente al de los invitados, se les da escrita en el folio la relación 2 invitados-3 gorros y se les pregunta por el número de gorros dados 4, 9 y 12 invitados. Oralmente les preguntamos cómo se podía obtener esa información.

Tarea 3 entrevista

Relación inversa entre número de niños y número de piruletas que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños, se les da escrita en el folio la relación 1 niño-3 piruletas y se les pregunta por el número de piruletas dados 6 y 15 gorros. Oralmente les preguntamos cómo se podía obtener esa información.

Tarea 4 entrevista

Relación inversa entre número de niños y número de globos que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños, se les da escrita en el folio la relación 1 niño-5 globos y se les pregunta por el número de niños dados 10 y 25 globos. Oralmente les preguntamos cómo se podía obtener esa información.

Tarea 5 entrevista

Relación entre varias variables, número de niños, número de gorros, número de piruletas y número de globos que deben ser comprados para la fiesta de cumpleaños, se les da escrita en el folio el dato que se tienen 9 piruletas y se les pregunta por el número de niños, número de gorros y número de globos que son necesarios para esas 9 piruletas, se les pregunta como lo descubrieron.

4.5. Recogida de la información

Para que la presencia de las investigadoras no creara un sesgo de la información que queríamos recibir de los alumnos, al ser tan pequeños, la autora de este TFM y su tutora, asistimos al aula durante el mes anterior a la recogida de la información. Esta intervención consistió en ayudar en diversas tareas, atendiendo a los alumnos que necesitaban algún apoyo o tenían dudas sobre las tareas que la maestra les requería. Este

apoyo no tenía relación con matemática. Con esta actuación, los alumnos se sintieron cómodos en el momento de la recogida de datos y en las entrevistas personales. La maestra habitual de los niños estuvo presente pero no intervino (ver figura 4.1).



Figura 4.1. Imagen de la aplicación de la prueba escrita

En la recogida de información a través de la prueba escrita, los sujetos trabajaron individualmente tras las explicaciones generales sobre la tarea dadas por la autora de este TFM al gran grupo. Tanto investigadora como tutora estuvieron presentes para aclarar dudas puntuales que pudieran surgir y tomaron notas de aquellas cuestiones que pudieran resultar relevantes para los objetivos de investigación o para la realización de las entrevistas semiestructuradas. Los alumnos realizaron la prueba escrita en una sesión de trabajo de 1 hora y 40 minutos el día 2 de abril del presente año, en el aula habitual de los alumnos participantes. Asistieron un total de 32 alumnos. Quedó registro de la sesión en audio y video. Además, hicimos fotografías de diferentes momentos significativos. Las producciones escritas de los alumnos se encuentran en el Anexo E.

La recogida de datos se llevó a cabo como lo teníamos previsto. Los niños se portaron correctamente y tuvieron excelente disposición.

Realizamos las entrevistas en los dos días siguientes a la recogida de datos; en la biblioteca del colegio el primer día y en un salón pequeño el segundo día. Los dos

lugares son acogedores y tranquilos, con la única presencia, del niño y la autora de este TFM, que fue la encargada de realizar las entrevistas. Además, se le proporcionó material concreto: tarjetas con dibujos de niños, gorros, coronas de princesas, globos y piruletas, en cantidad suficiente para que los utilizaran si lo encontraban necesario (ver figura 4.2).



Figura 4.2. Aplicación de la entrevista

Las entrevistas fueron grabadas en audio en su totalidad y se tomaron algunas fotos de lo que los alumnos hicieron con el material manipulativo. Las transcripciones de las entrevistas se encuentran en el Anexo F.

En el Anexo G, encontramos fotografías de los materiales manipulativos utilizados en la entrevista y en la explicación al gran grupo.

4.6. Categorías para el análisis de datos

Partimos de las categorías utilizadas por Merino et al. (2013), y que hemos descrito en el marco teórico. Adaptamos estas categorías para que aporten al desarrollo del objetivo de esta investigación con base en la información recogida y según la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Finalmente, utilizamos las siguientes categorías: (a) responden, (b) corrección, (c) sistemas de representación y

(d) estrategias. A partir de estas categorías, definimos una serie de sub-categorías para desglosar la información. A continuación, describiremos las categorías y sub-categorías identificadas y el significado que atribuimos a cada una de ellas.

4.6.1. Responden

Con la categoría respuesta identificamos si los alumnos contestan o no a cada uno de los apartados de las tareas propuestas. Se trata de una categoría dicotómica que puede tomar los valores sí o no.

4.6.2. Corrección

La categoría corrección indica si los alumnos dieron una respuesta correcta. Se trata de una categoría dicotómica que puede tomar los valores sí o no.

4.6.3. Sistemas de representación

Con la categoría de sistemas de representación, recogemos los sistemas de representación que emplea cada alumno en la resolución de cada apartado de la tarea. Los sistemas de representación no son excluyentes, puesto que un alumno puede utilizar más de un sistema de representación en su respuesta. Los sistemas de representación que hemos considerado en nuestra investigación son: pictórico, simbólico y verbal.

4.6.4. Estrategias

La categoría sobre estrategias recoge el procedimiento que utilizó cada alumno para dar respuesta a cada uno de los apartados de cada tarea. Estas categorías son excluyentes e independientes de si la respuesta es correcta o no.

Conteo de dibujos

Consideramos que un alumno realiza un conteo de dibujos, cuando realiza un dibujo el cuál puede ir acompañado del respectivo valor numérico.

Respuesta directa

El alumno da una respuesta directa cuando responde únicamente con un número en el casillero asignado a la respuesta.

Asociación de elementos en grupos

En esta categoría están las respuestas en las que hay dibujos o números de los elementos, pero que de alguna manera hicieron grupos con estos elementos.

Cambia el número de niños de la relación

En esta categoría consideraremos las respuestas en las que los alumnos cambian el número de niños dado de la relación.

Otra estrategia

En esta categoría están considerados los alumnos que establecieron alguna otra estrategia, pero que no soluciona el problema.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este capítulo analizamos la información obtenida por medio de los dos instrumentos descritos en el capítulo anterior: la prueba escrita y la entrevista. Esta información la podemos analizar desde diferentes puntos de vista: (a) un análisis individual por cada uno de los apartados que componen cada tarea, (b) un análisis individual de cada una de las tareas, (c) un estudio individualizado por cada uno de los alumnos que formaron parte de la muestra a través de sus producciones escritas o entrevistas o (d) un análisis de los resultados comparando las actuaciones en conjunto de todas las tareas y apartados. Nos centraremos, por extensión y tiempo, en el análisis por tarea y apartado ((a) y (b)), considerándose los otros análisis como líneas de continuación abiertas sobre el tema de esta investigación.

El capítulo consta de dos apartados, que se corresponden con los dos instrumentos de recogida de información utilizados. Mientras que en el primer apartado hacemos referencia únicamente a las pruebas escritas, en el segundo, combinamos información procedente de ambos instrumentos, pues la entrevista se realizó para complementar la información obtenida a través de la prueba escrita en primera instancia.

Para mantener el anonimato de los alumnos, hemos asignado al azar un número del 1 al 32 para cada uno de ellos.

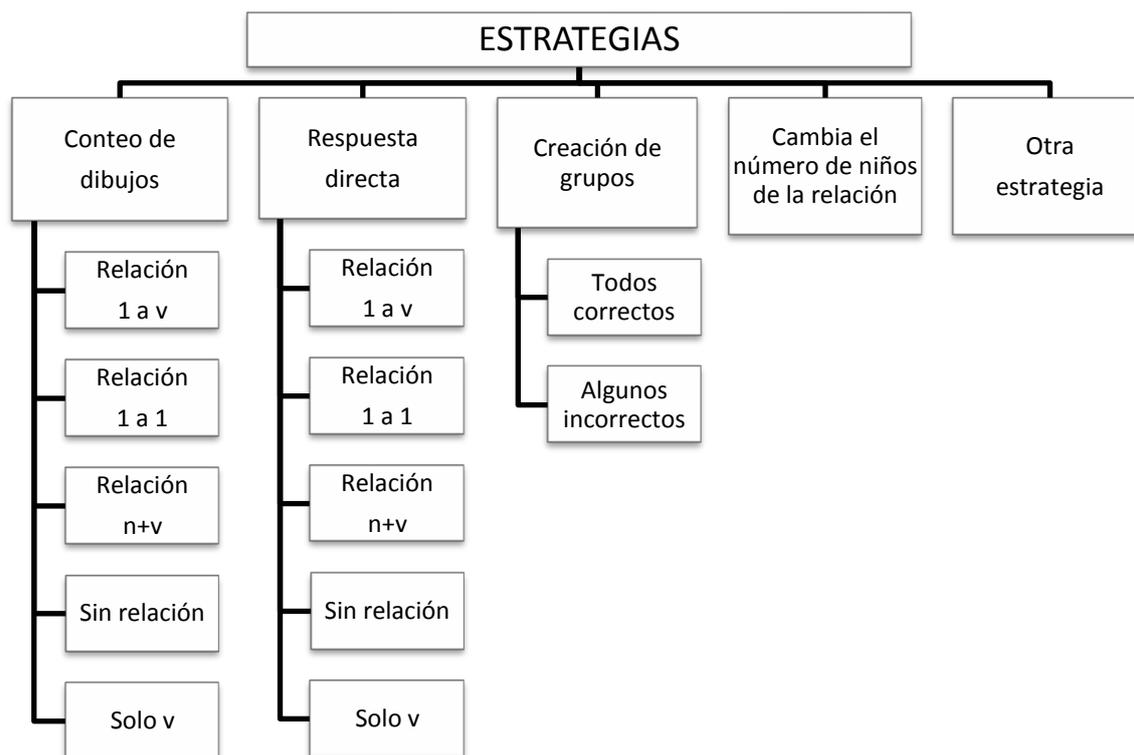
5.1. Producciones de los alumnos en la prueba escrita

En este apartado presentamos los resultados provenientes de las producciones de los alumnos en la prueba escrita. Describimos el trabajo que realizaron los alumnos en cada tarea y en cada uno de los apartados que la constituyen, organizando los resultados según las categorías descritas en el capítulo 4 (respuesta y corrección de la respuesta, sistemas de representación y estrategias). Nos centramos en hallazgos comunes para la mayoría de los alumnos, en casos particulares que destaquen por su resolución y en las características de los apartados de cada una de las tareas.

Dado que los alumnos pueden utilizar diferentes sistemas de representación en sus respuestas, las categorías referentes a los sistemas de representación no son disjuntas en ninguno de los apartados y en ninguna de las tareas.

En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos, nos basamos en la teoría fundamentada de Corbin y Strauss (1990) para establecer sub-categorías de la categoría estrategias, según las producciones escritas de los alumnos, las cuales se detallan en cada tarea.

En el siguiente esquema se aprecian la categoría estrategias y sus correspondientes sub-categorías (ver figura 5.1).



Nota. n = números de niños de la relación; v = valor de la variable dependiente para un niño.

Figura 5.1. Esquema de sub-categorías de categoría estrategias

Para una mejor comprensión de las sub-categorías a las que hacemos referencias, pondremos ejemplos (en cada tarea) de las producciones escritas de los alumnos, para cada una de las sub-categorías encontradas en la categoría estrategias.

5.1.1. Tarea 1

La tarea 1 consiste en relacionar la variable independiente (número de niños) y la dependiente (número de gorros), a través de la función $f(x)=x$, y se compone de ocho apartados etiquetados desde la letra A a la letra H. En la tabla 5.1 recogemos un

resumen de resultados sobre el número de alumnos para cada una de las variables consideradas para la tarea 1.

Tabla 5.1. Respuestas, sistemas de representación y estrategias en tarea 1

R	RC	SR			Estrategia			
					Conteo de dibujos		Respuesta directa	
		P	S	V	Relación 1 a 1	Sin relación	Relación 1 a 1	Sin relación
					Apartado A			
32	32	29	12	0	29	0	3	0
					Apartado B			
32	32	28	11	1	28	0	4	0
					Apartado C			
32	31	29	11	0	28	1	3	0
					Apartado D			
31	28	26	7	2	24	2	5	0
					Apartado E			
31	31	25	8	2	25	0	6	0
					Apartado F			
31	28	25	8	2	22	3	6	0
					Apartado G			
31	27	25	8	2	19	5	7	0
					Apartado H			
32	23	5	14	26	2	3	21	6

Nota. R = responden; RC = respuesta correcta; SR = sistema de representación; P = pictórico; S = simbólico; V = verbal.

Como podemos observar en la tabla 5.1, todos los alumnos responden a los apartados A, B, C y H. Hay un alumno que no responde a los apartados D, E, F y G. Todos los alumnos, con excepción de uno de ellos respondieron a todos los apartados y, en su gran mayoría, lo hicieron correctamente.

En los cuatro primeros apartados (A, B, C y D), donde los casos particulares son consecutivos, apreciamos que casi la totalidad de los alumnos contesta de forma correcta. Cuando los casos particulares no son consecutivos (E, F, G y H), baja un poco el número de alumnos que contestan correctamente a estos apartados. En el apartado de generalización (apartado H) es al que menor número de alumnos respondieron correctamente (23).

Como observamos en la tabla 5.1, los alumnos utilizaron los sistemas de representación pictórico, simbólico y verbal. El sistema de representación pictórico es predominante en la mayoría de los apartados de esta tarea y el sistema de representación verbal es el

menos empleado. Esta situación se invierte en el último apartado, donde el que menos se utiliza es el pictórico y el sistema de representación verbal es el más empleado.

En la tabla 5.1 podemos observar que la mayor parte de los alumnos utilizaron los dibujos como estrategias para resolver cada uno de los apartados, exceptuando el apartado H, en el cual se hace explícita la petición de redactar una respuesta para explicar, a otra persona, la relación que observan. Notamos también que alrededor de un tercio de los alumnos utilizaron o complementaron sus respuestas con números como representación simbólica y que menos de una décima parte utilizaron el sistema de representación verbal. El apartado H, como comentamos anteriormente, es extraordinario porque 26 alumnos utilizaron este tipo de sistema de representación.

Observamos que la estrategia más utilizada es la de dibujar tantos gorros como niños estaban invitados a la fiesta (relación 1 a 1), llegando a ser utilizada por alrededor de dos tercios de los alumnos de la muestra. En la figura 5.2 mostramos un ejemplo de esta estrategia para el apartado F.

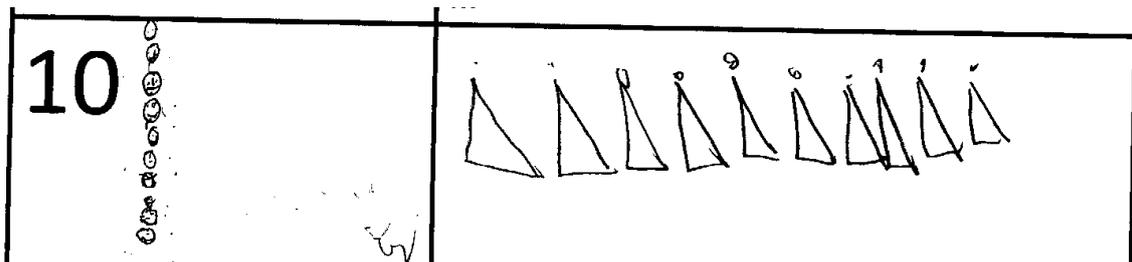


Figura 5.2. Conteo de dibujos en relación 1 a 1. Alumno 29. Tarea 1, apartado F

Observamos algunos dibujos en las producciones escritas en los cuales no fuimos capaces de encontrar una relación aparente o una estrategia específica. En cuanto a las respuestas directas, un tercio de los alumnos solo aportaron un número, la relación que establecieron fue 1 a 1.

En esta tarea identificamos dos estrategias diferentes: (a) la realización de un conteo sobre dibujos y (b) respuesta directa. En ambas estrategias, distinguimos entre los alumnos que identificaron la relación 1 a 1 y los que no identificaron ninguna relación.

Las detallamos a continuación.

Conteo de dibujos:

- Relación 1 a 1. Las respuestas que se corresponden con esta categoría presentan tantos dibujos como número de niños haya en la relación.
- Sin relación. Se trata de respuestas en las que hay dibujos pero no se observa relación entre los dibujos y el número de niños dado.

Respuesta directa:

- Relación 1 a 1. En las respuestas encontramos el mismo número de niños que de la variable pedida.
- Sin relación. Se trata de respuestas en las que hay un número que no tiene relación aparente con el número de niños dado.

5.1.1.1. Apartado A (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 2 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En cuanto a los sistemas de representación utilizados en el apartado A, 20 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico para dar solución al apartado, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta. De ellos 9 utilizaron el sistema de representación pictórico y simbólico simultáneamente. En cuanto a las estrategias utilizadas, todos los alumnos identificaron la relación 1 a 1 entre el número de niños y número de gorros. 29 de ellos utilizaron dibujos para realizar el conteo y 3 dieron una respuesta numérica directa.

5.1.1.2. Apartado B, (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 3 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En el apartado B, 20 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta y 1 alumno utiliza la representación verbal para expresar su solución, hay 8 alumnos que utilizan en conjunto el sistema de representación pictórico y simbólico. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos, todos establecieron la relación 1 a 1, 28 alumnos utilizaron dibujos y 4 dieron una respuesta numérica directa.

5.1.1.3. Apartado C (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 4 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación utilizados en el apartado C, se desglosan de la siguiente manera, 21 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico para dar solución al apartado C y 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta, 8 alumnos utilizaron el sistema de representación pictórico y simbólico al dar su respuesta. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos, 31 de ellos dieron una respuesta en relación 1 a 1, 28 de los cuales utilizaron dibujos y 3 dieron una respuesta numérica directa, 1 alumno dibujó gorros sin una relación aparente.

5.1.1.4. Apartado D (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En el apartado D, 24 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico como respuesta, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico y 2 alumnos solo el verbal, hay 2 alumnos que utilizan el sistema de representación pictórico y simbólico para dar la respuesta a este apartado y 2 que utilizan el sistema de representación simbólico y verbal en su respuesta. En las estrategias utilizadas por los alumnos, 29 de ellos establecieron la relación 1 a 1, 24 de los cuales utilizaron dibujos y 5 dieron una respuesta numérica directa, 2 alumnos dibujaron gorros sin una relación aparente (ver figura 5.3).

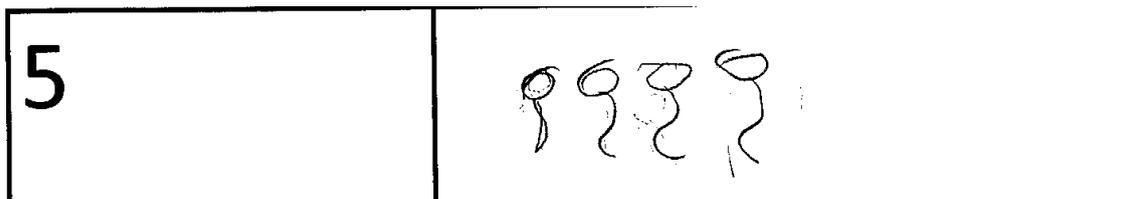


Figura 5.3. Conteo de dibujos sin relación. Alumno 20. Tarea 1, apartado D

5.1.1.5. Apartado E (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 8 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En el apartado E, 23 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico y 2 alumnos redactan su respuesta utilizando el sistema de representación verbal, observamos que hay 2 alumnos

que utilizan el sistema de representación simbólico y pictórico y 2 alumnos que utilizan el sistema de representación simbólico y verbal. En las estrategias utilizadas por los alumnos, todos los alumnos establecieron la relación 1 a 1 en sus respuestas (ver figura 5.4), 25 de los cuales utilizaron dibujos y 6 alumnos dieron una respuesta numérica directa.

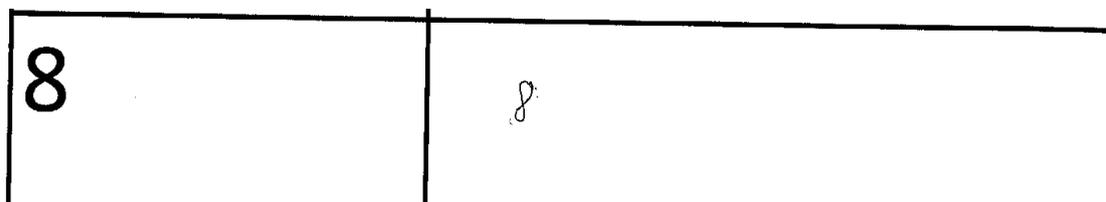


Figura 5.4. Respuesta directa en relación 1 a 1. Alumno 30. Tarea 1, apartado E

5.1.1.6. Apartado F (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En el apartado F, 23 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta, 2 alumnos utilizaron el sistema pictórico y simbólico en su respuesta y 2 el sistema simbólico y sistema de representación verbal. Las estrategias utilizadas por los alumnos fueron, 28 alumnos establecen la relación 1 a 1 en sus respuestas, 22 de ellos utilizaron dibujos, 6 dieron una respuesta numérica directa y 3 alumnos dibujaron gorros sin relación aparente.

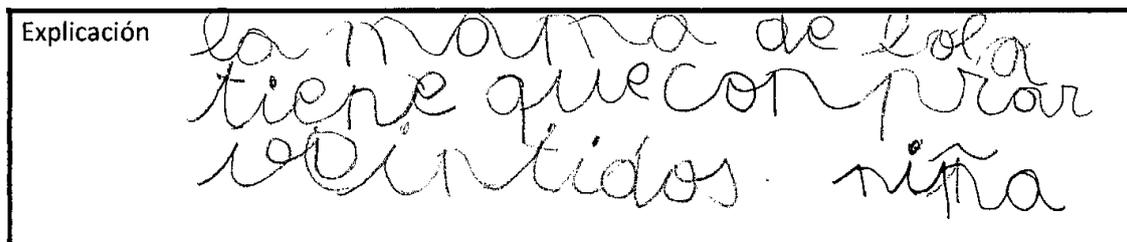
5.1.1.7. Apartado G (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 20 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En los sistemas de representación utilizados en el apartado G, 23 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, 2 alumnos utilizan tanto el sistema de representación pictórico como el simbólico y 2 utilizan el sistema de representación simbólico y el sistema de representación verbal. En cuanto a las estrategias utilizadas, 26 alumnos establecen la relación 1 a 1, 19 de ellos utilizaron dibujos y 7 dieron una respuesta numérica directa, 5 alumnos dibujaron gorros sin relación aparente entre el número de niños y el número de gorros.

5.1.1.8. Apartado H (Explícale a la mamá de Lola cuántos gorros tiene que comprar si asisten 100 niños a la fiesta de cumpleaños.)

Los sistemas de representación utilizados en el apartado H fueron, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 2 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta y 26 alumnos redactan su respuesta utilizando solo el sistema de representación verbal para dar una explicación a la mamá de Lola, 12 utilizan el sistema de representación simbólico y verbal.

En cuanto a las estrategias utilizadas, 23 alumnos establecieron la relación 1 a 1, 2 de ellos utilizaron dibujos y 21 dieron una respuesta numérica directa, 9 alumnos dieron una respuesta sin relación (ver figura 5.5), de los cuales 3 alumnos dibujaron y 6 alumnos dan una respuesta numérica directa.



Explicación la mamá de Lola tiene que comprar cincuenta niña

Figura 5.5. Respuesta directa sin relación. Alumno 3. Tarea 1, apartado H

Este apartado trata que el alumno generalice la relación a través de un caso lejano (100 niños) y donde se le pide que le dé la explicación del porqué de su respuesta a otra persona, encontramos frases que evidencian un pensamiento funcional. Tenemos a los alumnos 6, 7, 12, 14 y 15, que hacen explícita la relación a continuación se muestra la respuesta del alumno 7.

Alumno 7 “Usted la mamá de Lola tiene que comprar 50 gorros porque usted su hija a invitado a 50 niños”

Observamos que establecen la relación 1 a 1, entre el número de gorros y el número de niños y que hacen explícita esta relación en frases como por ejemplo, porque ha invitado a esos niños.

5.1.2. Tarea 2

La tarea 2 consiste en relacionar la variable independiente (número de niños) y la dependiente (número de piruletas), a través de la función $f(x)=3x$, y se compone de siete apartados etiquetados desde la letra A a la letra G. En las tablas 5.2 y 5.3 recogemos un resumen de resultados sobre el número de alumnos para cada una de las variables consideradas para la tarea 2.

Tabla 5.2. Respuestas y sistemas de representación en tarea 2

Responden	Responden correctamente	Apartado	Sistema de representación		
			Pictórico	Simbólico	Verbal
32	13	Apartado A	29	8	0
32	12	Apartado B	29	8	0
31	7	Apartado C	28	7	2
30	2	Apartado D	25	8	1
30	3	Apartado E	26	8	0
28	1	Apartado F	24	6	1
22	0	Apartado G	1	11	20

Podemos observar en la tabla 5.2, que la mayor parte de los alumnos contestaron a los apartados de esta tarea, llegando a que en el apartado G, que es el que menor cantidad de respuestas tiene, sean 22 alumnos los que contestaron, la progresión de alumnos que contesta correctamente al apartado disminuye hasta desaparecer.

Notamos que en los dos primeros apartados (A y B) el número de respuestas correctas son alrededor de un tercio, en el apartado C es alrededor de un cuarto y en los apartados siguientes (D, E y F), no llega ni a la décima parte, ningún alumno contesta correctamente el apartado G.

La mayor parte de los alumnos, alrededor de $\frac{4}{5}$ de ellos, utilizaron los dibujos, es decir, el sistema de representación pictórico como medio para resolver cada uno de los apartados y que complementan con números, un cuarto de los alumnos utilizan el sistema de representación simbólico. Habiendo algunos alumnos que expresan su respuesta en forma verbal.

Cabe mencionar que el apartado G, insta al alumno a verbalizar su respuesta y explicación, por lo que los sistemas de representaciones se invierten en orden de utilización quedando $\frac{2}{3}$ de los alumnos con representación verbal, un tercio con representación numérica, siendo solo 1 de ellos el que utiliza un dibujo para representar la respuesta.

En la tarea 2 identificamos tres estrategias diferentes (a) la realización de conteo de dibujos, (b) respuesta directa y (c) creación de grupos con 3 elementos. En las diferentes estrategias, distinguimos entre los alumnos que identificaron la relación 1 a 3, la relación 1 a 1 o la relación $n+3$, también identificamos a alumnos que solo escribieron o dibujaron 3 o que no identificaron ninguna relación. Las cuales se detallan a continuación.

Conteo de dibujos:

- Relación 1 a 3. Las respuestas que están en esta categoría muestran tantos dibujos por cada niño como le fueron pedidos en la relación dada.
- Relación 1 a 1. Las respuestas que están en esta categoría muestran
- tantos dibujos como niños estén en la relación.
- Relación $n+3$. Las respuestas que se corresponden con esta categoría presentan el dibujo del número de niños dados más el número de elementos dados en la segunda variable.
- Sin relación. Se trata de respuestas en las que hay dibujos pero no hay relación entre los dibujos y el número de niños dados.
- Dibujo de 3 elementos. Se trata de respuestas donde solo dibujan los elementos del caso particular de 1 niño, creando una relación constante para cualquier caso.

Respuesta directa:

- Relación 1 a 3. En las respuestas de esta categoría encontramos el número de la relación 1 a 3, como fue pedido en el apartado de tarea.

- Relación 1 a 1. En las respuestas encontramos que escribe el mismo número de niños que de la variable pedida.
- Relación $n+3$. En las respuestas de esta categoría escribe el número de niños más el número de elementos dados en la segunda variable.
- Sin relación. Se trata de respuestas en las que hay un número que no tiene relación aparente con el número de niños dado.
- 3. Encontramos por respuesta solo el número de elementos de la segunda variable, sin explicación.

Asociación de elementos en grupos:

- Todos los grupos correctos. Se trata de respuestas, donde encontramos grupos con 3 elementos o con números 3 y todos los grupos tienen el número correcto de elementos.
- Algunos incorrectos. Se trata de respuestas, donde encontramos grupos con 3 elementos y algunos de los grupos tienen más o menos elementos que los requeridos.

Cambia el número de niños de la relación

En esta categoría consideraremos las respuestas en las que se cambian el número de niños dado de la relación.

Otra estrategia

En esta categoría están consideradas las respuestas que establecieron alguna otra estrategia, pero que no soluciona el problema.

Tabla 5.3. Estrategias en tarea 2

Conteo de dibujos					Estrategias								
					Respuesta directa					AG			
R	R	R	SR	3	R	R	R	SR	3	TC	AI	CNNR	OE
1-3	1-1	n+3			1-3	1-1	n+3						
Apartado A													
10	7	0	1	6	1	0	0	2	0	2	0	1	2
Apartado B													
8	8	0	0	6	2	0	0	2	0	2	0	2	2
Apartado C													
4	16	0	1	1	1	0	0	1	1	2	0	2	2

Tabla 5.3. Estrategias en tarea 2

Conteo de dibujos					Estrategias								
					Respuesta directa					AG			
R	R	R	SR	3	R	R	R	SR	3	TC	AI	CNNR	OE
1-3	1-1	n+3			1-3	1-1	n+3						
Apartado D													
1	14	0	2	1	0	0	0	2	2	1	0	5	2
Apartado E													
2	15	1	2	0	0	0	1	1	2	1	1	2	2
Apartado F													
1	11	1	5	0	0	1	1	2	2	0	0	3	1
Apartado G													
0	0	0	1	0	0	12	2	5	0	0	0	0	2

Nota. R 1-3 = relación 1 a 3; R 1-1 = relación 1 a 1; R n+3 = relación n+3; SR = sin relación; 3 = escribe solo 3; AG = asociación en grupos; TC = todos correctos; AI = algunos incorrectos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia.

Observamos en la tabla 5.3, que la mayor concentración de respuestas se da en torno a la relación de las variables 1 a 1, también, que a medida que los valores de la variable independiente aumentan, las estrategias se desplazan a la relación 1 a 1 o bien n+3. También observamos que toma fuerza la creación de grupos de 3 elementos para los primeros valores de la variable independiente, pero que a medida que los valores aumentan se cometen errores en la conformación de los grupos, lo que lleva al alumno a la respuesta errónea, también nos damos cuenta que el cambiar el número de niños invitados a la fiesta se vuelve más común cuando los valores no son consecutivos y los alumnos siguen con la secuencia numérica encontrada; alrededor de 2 alumnos por apartado evidencian otra estrategia que no soluciona el problema.

5.1.2.1. Apartado A (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 3 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En cuanto a los sistemas de representación utilizadas en el apartado A, 24 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico para dar solución a este apartado, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, 5 alumnos utilizaron el sistema de representación pictórico y simbólico simultáneamente. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos en este apartado, 13 alumnos identificaron la relación 1 a 3 (ver figura 5.6), 10 de ellos utilizaron dibujos, 1 dio una respuesta directa y 2 crearon grupos, 7 alumnos identificaron la relación 1 a 1 con conteo de dibujos, 1 alumno cambia el número de niños de la relación, 6 alumnos dan por respuesta el dibujo

de 3 piruletas, 3 alumnos no identifican ninguna relación entre las variables y 2 alumnos dieron una respuesta donde utilizan otra relación que los lleva a una respuesta errónea.

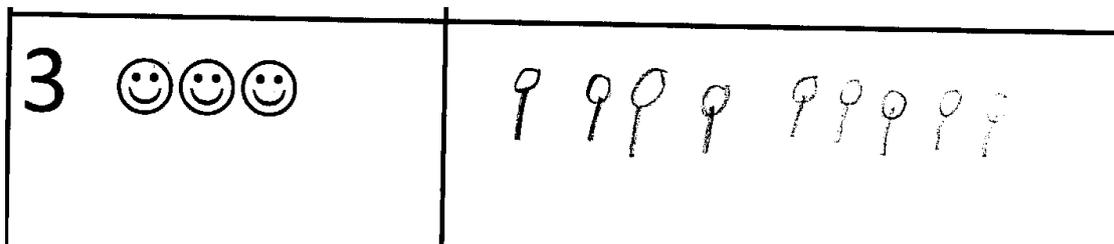


Figura 5.6. Conteo de dibujos en relación 1 a 3. Alumno 8. Tarea 2, apartado A

5.1.2.2. Apartado B (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 4 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación utilizados en el apartado B fueron, solo el pictórico (24) y solo el simbólico (3), hubo 5 alumnos que utilizaron los dos sistemas de representación en sus respuestas. Las estrategias utilizadas por los alumnos en este apartado, fueron: 12 alumnos identifican la relación 1 a 3 entre el número de niños y el número de piruletas, 10 de ellos lo hacen por conteo de dibujos, 1 por respuesta directa (ver figura 5.7) y 2 por conformación de grupos; 8 alumnos identificaron la relación 1 a 1, todos ellos dibujaron, 6 alumnos utilizaron la constante 3 dibujos de piruletas, 2 alumnos escribieron un número sin relación aparente; 2 alumnos cambian el número de niños involucrados en el apartado y 2 dan otra estrategia que no soluciona el problema.

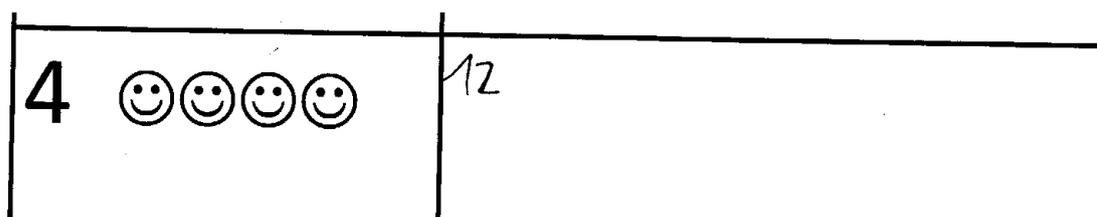


Figura 5.7. Respuesta directa en relación 1 a 3. Alumno 6. Tarea 2, apartado B

5.1.2.3. Apartado C (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?)

23 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico para dar solución al apartado C, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico y se agrega el sistema de representación verbal que no había sido utilizado en los apartados anteriores de esta tarea, 1 alumno utilizó este sistema de representación, 4 alumnos utilizan el sistema de representación pictórico y simbólico, 1 utiliza los sistemas de

representación pictórico y verbal y otro alumno utiliza los sistemas de representación simbólico y verbal. En las estrategias utilizadas por los alumnos, 7 alumnos identifican la relación 1 a 3, 4 alumnos a través del conteo de dibujos, 1 por respuesta directa y 2 conformando grupos, un ejemplo de esta categoría la podemos ver en la figura 5.8.

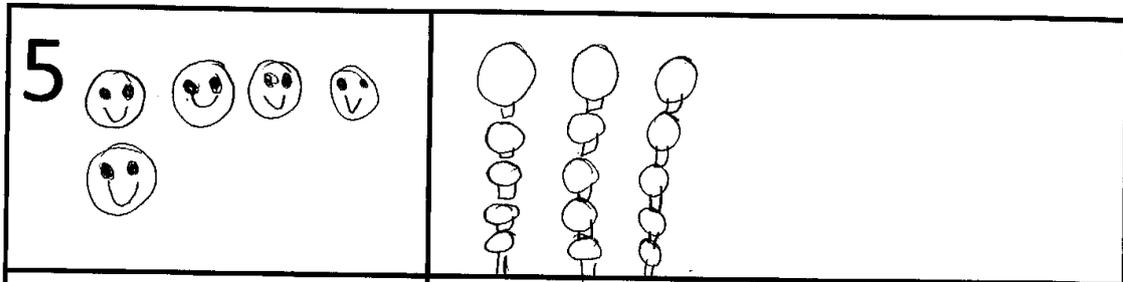


Figura 5.8. Creación de grupos con todos los elementos correctos.
Alumno 12. Tarea 2, apartado C

16 alumnos identifican la relación 1 a 1 a través del conteo de dibujos; 2 alumnos solo utilizan el número 3, uno con dibujos y el otro en respuesta directa, un ejemplo de solo dibuja 3 piruletas la podemos ver en la figura 5.9.

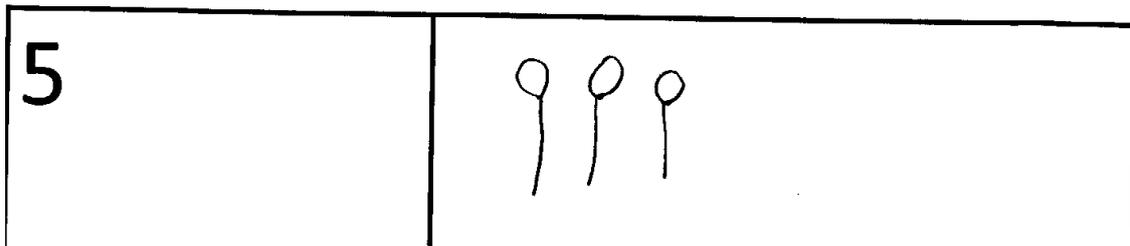


Figura 5.9. Conteo de dibujos solo 3. Alumno 29. Tarea 2, apartado C

2 alumnos escriben una respuesta sin relación aparente, 2 alumnos cambian el número de niños involucrados en el apartado y 2 alumnos dan otra estrategia que no soluciona el problema.

5.1.2.4. Apartado D (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 8 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En este apartado (D), 21 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico como respuesta, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, 1 alumno utiliza solo el sistema de representación verbal, 4 alumnos utilizan en conjunto el sistema de representación pictórico y simbólico. Las estrategias utilizadas por los alumnos fueron: 2 alumnos identificaron la relación 1 a 3, uno de ellos dibujó mientras

que el otro agrupó; 14 identificaron la relación 1 a 1, todos ellos dibujaron; 3 alumnos identifican una constante y 4 alumnos no identifican ninguna relación aparente, 5 alumnos cambian el número de niños involucrados en el apartado (ver figura 5.10) y 2 alumnos dan otra estrategia que no soluciona el problema.

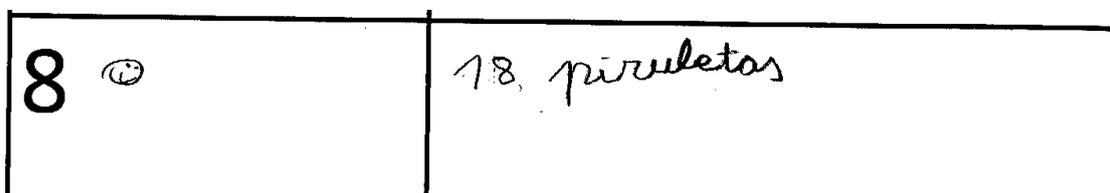


Figura 5.10. Cambia el número de niños (6) de la relación.
Alumno 7. Tarea 2, apartado D

5.1.2.5. Apartado E (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación que utilizaron en su mayoría son el sistema de representación pictórico (22) y 4 alumnos utilizaron solamente el sistema de representación simbólico, 4 alumnos utilizan al mismo tiempo los sistemas de representación pictórico y simbólico. Al analizar las diferentes estrategias que utilizaron nos encontramos con que 4 alumnos identificaron la relación 1 a 3, 2 de ellos a través de un dibujo y los otros dos por medio de conformación de grupos, aunque uno tuvo un error en la agrupación (ver figura 5.11).

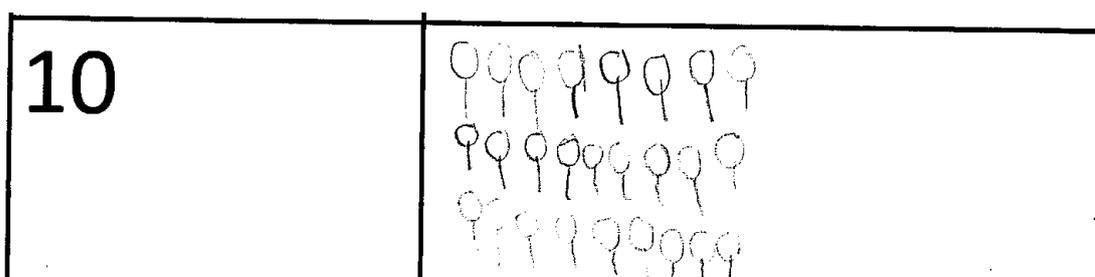


Figura 5.11. Creación de grupos algunos incorrectos. Alumno 19. Tarea 2, apartado E

15 alumnos identificaron la relación 1 a 1 a través de dibujos; 2 alumnos identifican la relación $n+3$ (ver figura 5.12).

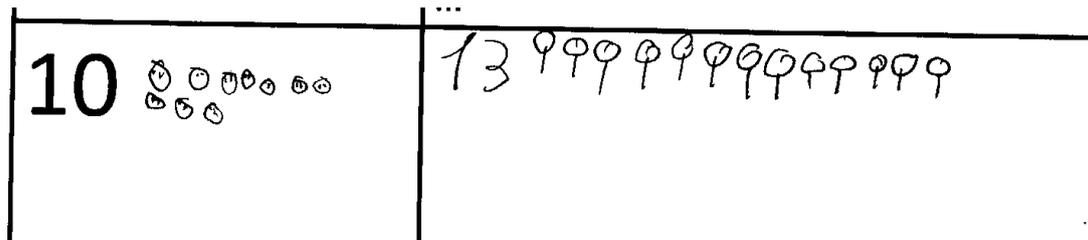


Figura 5.12. Conteo de dibujos en relación $n+3$. Alumno 5. Tarea 2, apartado E

3 alumnos no establecen una relación aparente, 2 alumnos cambian el número de niños que son invitados a la fiesta y 2 utilizaron otra estrategia que no soluciona el problema (ver figura 5.13).

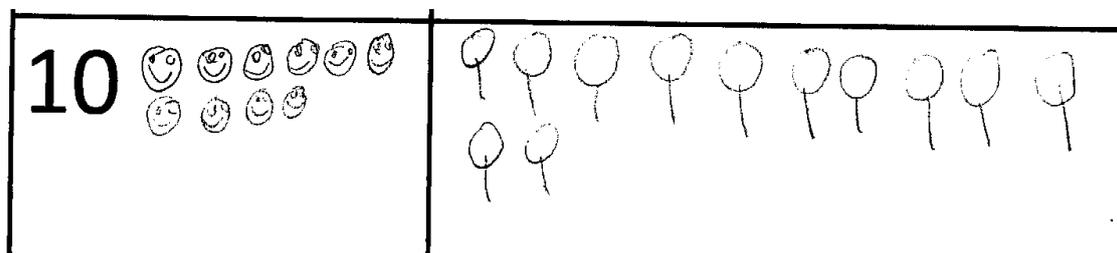


Figura 5.13. Otra estrategia ($n+2$). Alumno 3. Tarea 2, apartado E

5.1.2.6. Apartado F (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 20 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En este apartado (F), predomina el sistema de representación pictórico, con 21 alumnos y 3 alumnos utilizaron solo el sistema simbólico, 1 alumno solamente utiliza el sistema de representación verbal, encontramos a 3 alumnos que utilizan en conjunto los sistemas pictórico y simbólico. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para responder a este apartado, nos encontramos con que 1 alumno identifica la relación 1 a 3 y lo hace utilizando dibujos, 12 alumnos identifican la relación 1 a 1, 11 de los cuales dibujan, uno de ellos escribe la respuesta directa, 2 alumnos identifican la relación $n+3$, tanto en conteo de dibujos como en respuesta directa, 7 alumnos no encuentran relación aparente, 2 alumnos consideran la relación como constante, 3 alumnos cambiaron el número de niños involucrado en el apartado y 1 utilizó otra estrategia que no soluciona el problema.

5.1.2.7. Apartado G (Explícale a la mamá de Lola cuántas piruletas tiene que comprar si asisten 100 niños a la fiesta de cumpleaños.)

El sistema de representación que predomina con casi $\frac{2}{3}$ de los alumnos de la muestra es el verbal, le siguen el sistema de representación simbólico y verbal en conjunto con 10 alumnos y 1 que utiliza solo el sistema de representación pictórico. En las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado nos encontramos con que 12 alumnos establecen la relación 1 a 1 con respuestas directas; 2 establecen la relación $n+3$, un ejemplo de esta categoría lo encontramos en la figura 5.14; 6 alumnos no establecen una relación aparente y 2 alumnos utilizaron otra estrategia que no soluciona el problema propuesto.

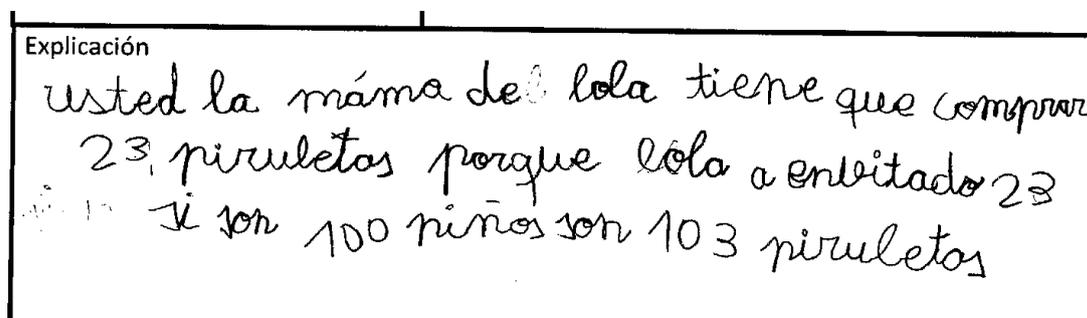


Figura 5.14. Respuesta directa en relación $n+3$. Alumno 7. Tarea 2, apartado G

En este apartado, que trata que el alumno generalice la relación a través de un caso lejano (100 niños) y donde se le pide que le dé la explicación del porqué de su respuesta a otra persona, encontramos frases que evidencian pensamiento funcional. Tenemos a los alumnos 4, 6, 7, 12, 15, 22 y 26, que hacen explícita la relación y de los cuales hemos transcrito textualmente la respuesta del alumno 15.

Alumno 15 “Es el cumpleaños de David y hay 100 niños necesita 103”

Observamos que la relación más frecuentemente utilizada es 1 a 1, y que los alumnos 7 y 15, establecen la relación $n+3$, no encontramos ninguna respuesta correcta en este apartado (G).

5.1.3. Tarea 3

La tarea 3 consiste en relacionar la variable independiente (número de niños) y la dependiente (número de globos), a través de la función $f(x)=5x$, y se compone de siete apartados etiquetados desde la letra A hasta la letra G. En la tabla 5.4 y 5.5 recogemos

un resumen de resultados sobre el número de alumnos para cada una de las variables consideradas para la tarea 3.

Tabla 5.4. Respuestas y sistemas de representación en tarea 3

Responden	Responden correctamente	Sistema de representación			
		Pictórico	Simbólico		Verbal
			N	O	
		Apartado A			
32	10	14	20	3	3
		Apartado B			
32	10	14	20	3	3
		Apartado C			
30	7	16	15	2	3
		Apartado D			
30	4	16	15	2	3
		Apartado E			
29	3	16	14	2	3
		Apartado F			
28	0	14	13	2	4
		Apartado G			
22	1	2	11	1	19

Nota. N = números; O = operaciones.

En esta tarea nos encontramos con que algunos alumnos utilizaron operaciones en sus respuestas, valorando esta introducción de simbología, hacemos la diferencia en el sistema de representación simbólico, entre número y operación.

Como observamos en la tabla 5.4, en los primeros apartados de casos particulares consecutivos casi la totalidad de los alumnos contestan a estos apartados (A, B, C), en los casos particulares no consecutivos (D, E, F) observamos que el número de alumnos que contestan a estos apartados va disminuyendo, llegando a solo 22 niños en el apartado G, que trata de generalizar la relación para 100 niños. La mayoría no llegó a la respuesta correcta.

Apreciamos que son pocos los alumnos que contestan correctamente a cada uno de los apartados de la tarea 3. En los tres primeros apartados, donde los valores de la variable independiente son consecutivos, observamos que los alumnos que contestan correctamente son alrededor de 10, pero cuando los valores no son consecutivos vemos decaer estas cifras hasta que solo 1 alumno contesta el apartado G correctamente.

Podemos observar que, alrededor de un tercio de los alumnos, utilizaron los dibujos, es decir, la representación pictórica como medio para resolver cada uno de los apartados y que complementan con números, alrededor de $\frac{2}{3}$ de los alumnos, en la categoría de representación simbólica, destacando que hay un pequeño grupo de 2 o 3 alumnos que trabaja con operaciones, habiendo algunos alumnos que expresan su respuesta en forma verbal. Se menciona aparte el apartado G que pide expresamente que se explique el por qué de la respuesta dada, donde el sistema de representación que tiene mayor predominio es el verbal (18) seguido del simbólico (12).

En la tarea identificamos tres estrategias diferentes; (a) la realización de un conteo sobre dibujos, (b) respuesta directa y (c) creación de grupos con 5 elementos. En las diferentes estrategias, distinguimos entre los alumnos que identificaron la relación 1 a 5, la relación 1 a 1 o la relación $n+5$, también identificamos a alumnos que solo escribieron o dibujaron 5 o que no identificaron ninguna relación. A continuación describimos las categorías encontradas en esta tarea.

Conteo de dibujos:

- Relación 1 a 5. Las respuestas que se corresponden con en esta categoría presentan tantos dibujos por cada niño como le fueron pedidos en la relación dada.
- Sin relación. Se trata de respuestas donde hacen dibujos pero no hay relación entre los dibujos y los niños dados.

Respuesta directa:

- Relación 1 a 5. Las respuestas de esta categoría se corresponden con que escriben el número de la relación 1 a 5, como fue pedido en el apartado de tarea.
- Relación 1 a 1. Se trata de respuestas donde encontramos que escribe el mismo número de niños que de la variable pedida.
- Relación $n+5$. Las respuestas que se corresponden con esta categoría son la escritura del número de niños más el número de elementos dados en la segunda variable.
- Sin relación. Se trata de respuestas donde está escrito un número que no tiene relación aparente con el número de niños dado.

Asociación de elementos en grupos:

- Todos los grupos correctos. En las respuestas de esta categoría encontramos grupos con 5 elementos o con números 5 y todos los grupos tienen el número correcto de elementos.
- Algunos incorrectos. En las respuestas de esta categoría encontramos grupos con 5 elementos y algunos de los grupos tienen más o menos elementos que los requeridos.

Cambia el número de niños de la relación

En esta categoría consideraremos las respuestas en las que los alumnos cambian el número de niños dado de la relación.

Otra estrategia

En esta categoría están considerados los alumnos que establecieron alguna otra estrategia, pero que no soluciona el problema.

Tabla 5.5. Estrategias en tarea 3

Estrategia										
Conteo de dibujos			Respuesta directa				Asociación en grupos			
R 1-5	R 1-1	SR	R 1-5	R 1-1	R n+5	SR	TC	AI	CNNR	OE
Apartado A										
5	3	4	4	1	3	8	3	0	0	1
Apartado B										
3	4	3	4	1	1	9	4	0	2	1
Apartado C										
1	10	1	2	1	1	9	3	0	1	1
Apartado D										
1	10	1	1	1	1	10	3	0	2	1
Apartado E										
1	10	1	1	1	1	9	2	0	3	1
Apartado F										
0	5	6	0	1	1	9	1	1	3	1
Apartado G										
0	0	2	0	12	2	5	1	0	0	0

Nota. R 1-5 = relación 1 a 5; R 1-1 = relación 1 a 1; R n+5 = relación n+5; SR = sin relación; TC = todos correctos; AI = algunos incorrectos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia.

Observamos en la tabla 5.5, que la relación 1 a 1 es utilizada por un tercio de los alumnos, un cuarto de los alumnos establece la relación 1 a 5 en los primeros apartados, pero a medida que estos aumentan en complejidad al aumentar el número de niños invitados, el número de alumnos decae progresivamente. Otra estrategia utilizada es la relación $n+5$, con 1 o 2 alumnos que las utilizaron en el transcurso de la tarea. Toma fuerza la creación de grupos para todos los apartados, con 3 alumnos que la utilizaron continuamente como estrategia, solo en uno de los apartados hay uno de esos alumnos que crea alguno de los grupos con el tamaño incorrecto, lo que lo lleva a una respuesta errónea. También nos damos cuenta que el cambiar el número de niños invitados a la fiesta se vuelve más común (3 alumnos) cuando los valores no son consecutivos y los alumnos siguen con la secuencia numérica encontrada; 1 alumno por apartado evidencia otra estrategia que no soluciona el problema, esto lo podemos observar en la figura 5.15.

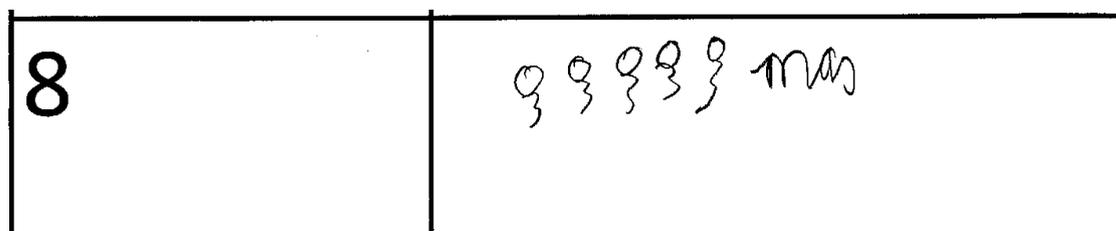


Figura 5.15. Otra estrategia. Alumno 27. Tarea 3, apartado D

5.1.3.1. Apartado A (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 3 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En cuanto a los sistemas de representación utilizados por los alumnos en el apartado A, 10 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, por primera vez en el transcurso de los apartados y de las tareas anteriores hay alumnos que utilizaron en el sistema simbólico las operaciones (3), además de los números (2), 15 alumnos utilizaron solamente el sistema de representación simbólico, hay 1 alumno que utilizó solo el sistema de representación verbal para dar a conocer su respuesta. Hemos identificado a 4 alumnos que utilizan en conjunto el sistema de representación pictórico y simbólico y 2 que utilizan el sistema de representación simbólico y verbal. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado, 12 alumnos identificaron la relación 1 a 5, 5 de ellos a través de dibujos, 4 nos entregaron una respuesta directa y 3 utilizaron la conformación de grupos; 4 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y el resto dibujó.

5.1.3.2. Apartado B (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 4 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación utilizados por los alumnos fueron: 10 alumnos usaron solamente el sistema de representación pictórico, 15 solamente el sistema de representación simbólico, 1 alumno utilizó solo el sistema de representación verbal. Destacamos a 4 alumnos que utilizaron tanto el sistema de representación pictórico como simbólico y 2 que utilizaron tanto el sistema de representación simbólico como el verbal. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado, 11 alumnos identificaron la relación 1 a 5, 3 de ellos a través de dibujos, 4 nos entregaron una respuesta directa y 4 utilizaron la conformación de grupos; 5 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y el resto dibujó.

5.1.3.3. Apartado C (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Podemos observar que los sistemas de representación utilizados en el apartado C, fueron: 13 alumnos que utilizaron solamente el sistema de representación pictórico, 11 alumnos utilizaron solamente el sistema de representación simbólico, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación verbal. 3 alumnos utilizaron en conjunto el sistema de representación pictórico y simbólico y 2 el simbólico y verbal. Las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado: 6 alumnos identificaron la relación 1 a 5, de ellos 2 a través de una respuesta directa, 1 con dibujos y 3 utilizaron la conformación de grupos (ver figura 5.16); 11 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y los demás alumnos dibujaron.

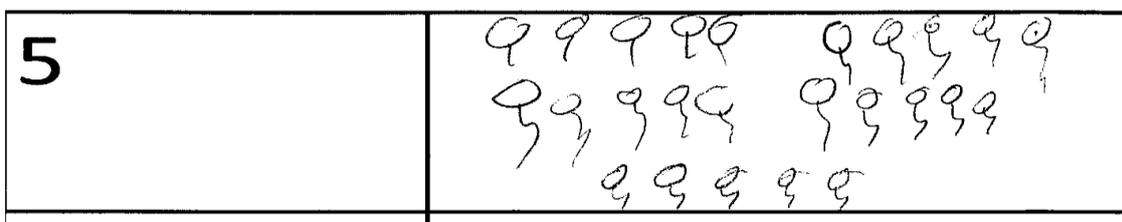


Figura 5.16. Creación de grupos. Alumno 26. Tarea 3, apartado C

5.1.3.4. Apartado D (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 8 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En cuanto a los sistemas de representación que utilizaron, 13 alumnos trabajan solo con la representación pictórica, 11 alumnos solo con la representación simbólica, 1 alumno utilizó solo el sistema de representación verbal. En conjunto, se utilizaron los sistemas de representación pictórico y simbólico (2) y simbólico y verbal (2). En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado, 4 alumnos identificaron la relación 1 a 5, 1 de ellos a través del conteo de dibujos y 3 utilizaron la conformación de grupos; 11 alumnos establecieron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y el resto dibujó para solucionar el problema. 1 alumno estableció la relación $n+5$, su respuesta la podemos ver en la figura 5.17.

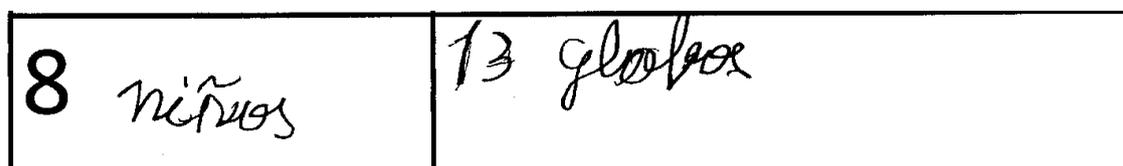


Figura 5.17. Respuesta directa en relación $n+5$. Alumno 5. Tarea 3, apartado D

5.1.3.5. Apartado E (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Observamos que los sistemas de representación que utilizaron para resolver el apartado E, se desglosan de la siguiente manera: 13 alumnos trabajaron solamente con el sistema de representación pictórico, 10 alumnos solo con el sistema de representación simbólico, 1 alumno utilizó solamente el sistema de representación verbal. En conjunto trabajaron con el sistema de representación pictórico y simbólico (3) y simbólico y verbal (2). En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado, 3 alumnos identificaron la relación 1 a 5, uno de ellos a través de dibujos (ver figura 5.18) y 2 utilizaron la creación de grupos; 11 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales 10 dibujaron y un alumno nos entregó una respuesta directa.

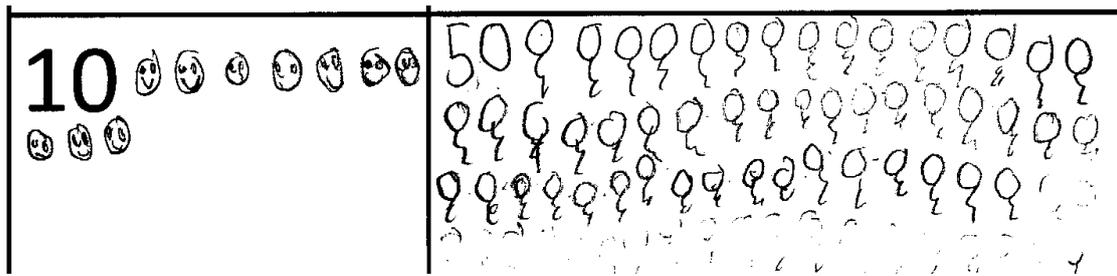


Figura 5.18. Conteo de dibujos en relación 1 a 5. Alumno 15. Tarea 3, apartado E

5.1.3.6. Apartado F (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 20 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación utilizados para resolver este apartado (F), fueron: 12 alumnos solo utilizaron el sistema de representación pictórico, 10 solo el simbólico, 2 alumnos utilizaron solo el sistema de representación verbal. Notamos que 2 alumnos utilizaron el sistema simbólico y pictórico simultáneamente y 2 el simbólico y verbal. Las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado: 2 alumnos identifican la relación 1 a 5 a través de la conformación de grupos, aunque uno de ellos se equivoca en la conformación de alguno de los grupos, lo cual le lleva a una respuesta errónea; 6 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y los otros alumnos utilizaron el conteo de dibujos.

5.1.3.7. Apartado G (Explícale a la mamá de Lola cuántos globos tiene que comprar si asisten 100 niños a la fiesta de cumpleaños.)

En el apartado G, los sistemas de representación que los alumnos utilizaron, fueron: 9 alumnos utilizaron solo el sistema de representación verbal, seguido por 1 alumno que utilizó solo el simbólico, solo 2 alumnos utilizaron un dibujo para dar solución al apartado. Observamos que 10 alumnos utilizan en conjunto el sistema simbólico y verbal. En cuanto a las estrategias utilizadas, 1 alumno identificó la relación 1 a 5 a través de la conformación de grupos y 12 alumnos identificaron la relación 1 a 1 en su respuesta directa.

En este apartado que trata que el alumno generalice la relación a través de un caso lejano (100 niños) y donde se le pide que le dé la explicación del porqué de su respuesta a otra persona, encontramos frases que evidencian un pensamiento funcional, aunque este no sea el correcto. Tenemos a los alumnos 1, 4, 6, 7, 12, 15 y 31, que hacen

explicita la relación funcional que establecen, se puede ver a continuación la respuesta del alumno 4.

Alumno 4 “aisien niños 5 5 5 5 5 5 5 5 5 100”
(hay cien niños 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 100)

Observamos que la relación más común es 1 a 1 y que en algunos casos establecieron la relación $n+5$, el alumno 4 sigue una serie de números 5 hasta llegar al niño 100.

5.2. Entrevistas individuales

En este apartado presentamos los resultados procedentes de las entrevistas realizadas a 4 alumnos (alumnos 7, 12, 15 y 27) y las producciones escritas de cada uno de esos alumnos. Nos centramos en las evidencias del pensamiento funcional puestas de manifiesto a través de las explicaciones que dan sobre su trabajo en la prueba escrita y la producción escrita en el instrumento aplicado en la entrevista. El objetivo de la entrevista era profundizar sobre el pensamiento funcional en la relación directa e inversa, por lo que organizaremos cada una de las entrevistas según estos dos sistemas de relaciones consideradas. Inicialmente, presentamos para cada alumno, el trabajo que hizo en la prueba escrita, complementando con las explicaciones que dieron en la entrevista sobre su propia producción. A continuación, presentamos los resultados que ayudaron a completar las entrevistas sobre la relación directa y resultados sobre la relación inversa, incorporación de un término independiente y relación entre varias variables, proceso descrito en el capítulo 4, apartado 4.4.2 de esta memoria.

5.2.1. Entrevista alumno 7

Los criterios para entrevistar al alumno 7, fueron que estableció la relación $n+v$ entre las variables, y que aunque fue capaz de establecer relaciones entre las variables, había ítems que contestaba erróneamente porque seguía una secuencia consecutiva cuando los valores de la variable no eran consecutivos. En la tabla 5.6 recogemos los resultados del alumno 7 en la prueba escrita, información de la que partimos para la preparación de la entrevista.

Tabla 5.6. Resultados prueba escrita alumno 7

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H
			Tarea 1					
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tabla 5.6. Resultados prueba escrita alumno 7

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
SR	Pictórico y simbólico				Simbólico y verbal			
Estrategia	Conteo de dibujos R1-1				Respuesta directa R1-1			
Tarea 2								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	x	x	✓	x	x	x	x	
SR	Simbólico y verbal							
Estrategia	CNNR	OE	R1-3	CNNR	Relación n+3			
Tarea 3								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	x	x	✓	x	x	x	x	
SR	Simbólico y verbal							
Estrategia	Respuesta directa R1-5			CNNR	Relación n+5			

Nota: SR = sistema de representación; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia; R1-3 = respuesta directa relación 1 a 3; R1-5 = relación 1 a 5.

Relación directa

En la prueba escrita el alumno contestó correctamente a los apartados de la tarea 1 utilizó la respuesta directa en relación 1 a 1, en la entrevista explicitó la relación funcional identidad “...pues al ver que si un niño, un gorro, pues 2 niños 2 gorros...”.

En la tarea 2 el alumno incurrió en errores de conteo ya que entrega respuestas erróneas a los apartados A, B, en el apartado C entregó la respuesta correcta y en el apartado D cambió el número de niños, en vez de 8 niños utilizó 6 niños, en el apartado E, F y G utilizó la relación n+3, en la entrevista se dio cuenta de los errores y los rectificó utilizando material concreto, logró establecer la relación “más niños más piruletas”, “tres piruletas más por cada niño que invitemos de más”.

En la tarea 3 el alumno completó de forma correcta los apartados A, B, C, el apartado D, E, F, entrega un número sin relación aparente y en el apartado G utilizó la relación n+5, en la entrevista se dio cuenta que a un número pequeño (5 niños-25 globos) no le podían corresponder más globos que a un número grande (8 niños- 15 globos) y trata de solucionarlo encontrando la relación “5 más”, “encontrar para cada niño 5 globos”.

Relación inversa

Para la relación inversa entre número de niños y número de gorros, el alumno contestó de inmediato y correctamente, ya que estableció la relación “a un niño un gorro”.

En la relación inversa número de niños y número de piruletas, respondió antes que se le preguntara “son 6, tres para un niño y tres para otro, son 2 niños”, el alumno con el material concreto formó grupos de 3 piruletas “porque son 3 las que tengo que contar”, “para 15 hay 5 niños”, “hemos puesto las 15 en montones de 3 piruletas y conté 5 montones, lo que me da 5 niños”.

En la relación inversa número de niños y número de globos, respondió estableciendo la relación “si uno es 5 globos, entonces para 2 serán 10”, formó grupos de 5 globos, relacionado los niños con cada grupo hasta completar los 25 globos pedidos y descubrir que son 5 niños los involucrados, “he puesto los 25 globos y hay 5 montones de globos...”.

Incorporación de un término independiente

La incorporación de un término independiente no tuvo mayor dificultad para el alumno ya que estableció que “Por cada invitado un gorro y además el gorro de Lola”, utilizó dibujos solo en el primer caso para 4 niños, para 9 y 12 invitados, escribió directamente el sucesor del número, se le pregunta por 100 y 1000 y contestó correctamente.

Relación entre varias variables

Cuando se le pidió que relacionara todas las variables que había visto en el transcurso de las tareas de la prueba escrita y de la entrevista, donde solo se le dio el valor de las piruletas, partió por entregarle una a cada niño, se le hizo ver el error y que debían seguir la relación que ya estaba establecida, el alumno hizo grupos de 3 piruletas, relacionado un niño por cada grupo de piruletas, con ello descubrió el número de niños que están involucrados, luego hizo 3 grupos de 3 gorros y por último 3 grupos de 5 globos, dándole por resultado el número de globos que debía comprar.

5.2.2. Entrevista alumno 12

Los criterios para entrevistar al alumno 12, fueron que este alumno utilizó tres estrategias distintas en la resolución de las tareas. En la tarea 1 dio una respuesta directa, en la tarea 2 utilizó grupos de 3 elementos y en la tarea 3 utilizó expresiones simbólicas ayudándose de operaciones. En la tabla 5.7 presentamos la información relativa al alumno 12 en la prueba escrita.

Tabla 5.7. Resultados prueba escrita alumno 12

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H	
Tarea 1									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
SR	Simbólico							Verbal	
Estrategia	Respuesta directa en relación 1 a 1								
Tarea 2									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Corrección	✓	✓	✓	x	x	x	x		
SR	Pictórico						Verbal		
Estrategia	CGTC			CNNR			RD1-1		
Tarea 3									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Corrección	✓	✓	✓	x	x	x	x		
SR	Simbólico						Verbal		
Estrategia	CGTC			CNNR			RD1-1		

Nota. SR = sistema de representación; CGTC = creación de grupos todos correctos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; RD1-1 = respuesta directa relación 1 a 1.

Relación directa

En la tarea 1 el alumno respondió de forma directa a todos los apartados, y estableció la relación a cada niño un gorro “80 niños, 80 gorros”.

En la tarea 2, el alumno contestó de forma correcta a todos los apartados “haciendo filas” de “tres piruletas”, “para uno son 3 y para otro, otros 3”, en el apartado G estableció la relación 1 a 1, pero en la entrevista estableció la relación “hay que darle 3 para cada uno y luego van llegando más invitados y les vamos dando tres piruletas”.

En la tarea 3, el alumno utilizó la operación suma, y la serie de tantos 5 como niños, aunque se equivocó en la cantidad de 5 cuando el número de niños era más grande, el alumno se dio cuenta de los errores en la entrevista y rectificó verbalmente, diciendo que solo puso los 5 que le alcanzaban “aquí van 20 cincos”, y llegó a la conclusión que para 100 niños debe sumar “pues 100 cincos”.

Relación inversa

En la relación inversa entre número de niños y número de gorros completó rápidamente la relación “para cada uno hay un gorro” y logró la tarea sin dificultad.

Para la relación inversa entre número de niños y número de piruletas, “un niño, 3 piruletas”, el alumno utilizó las series “ahora de revés” donde va agrupando conjuntos de 3 piruletas y los asoció con una carita de niño “3 piruletas para uno”

Para la relación inversa entre número de niños y número de globos, el alumno no quiso trabajar en ella, ya que se encontraba cansado.

Incorporación de un término independiente

En la incorporación de un término independiente el alumno resolvió las actividades propuestas sin mayor dificultad y descubrió la relación número de invitados “...y la corona”.

Relación entre varias variables

Al relacionar todas las variables estudiadas, el alumno nos dio por respuesta 101, que se obtiene de suma todos los niños que están involucrados en todas las tareas de la entrevista, estaba cansada así que no quiso seguir con la actividad propuesta por la investigadora.

5.2.3. Entrevista alumno 15

Los criterios para entrevistar al alumno 15, fueron que este alumno utilizó el sistema de representación pictórica en todas las tareas, logrando contestar de forma correcta la mayor parte de ellas, estableció en la generalización la relación $n+v$ y en el apartado G de la tarea 3 establece una relación de covariación respecto al apartado anterior, “si son 10 niños más, entonces 10 gorros más”, esto lo pudimos apreciar al atender a su consulta en el desarrollo de la prueba escrita y luego lo ratificamos en la entrevista. En la tabla 5.8 recogemos los resultados del alumno 15 en la prueba escrita.

Tabla 5.8. Resultados prueba escrita alumno 15

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H	
	Tarea 1								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
SR	Pictórico y simbólico							Verbal	
Estrategia	Respuesta directa en relación 1 a 1								

Tabla 5.8. Resultados prueba escrita alumno 15

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H
Tarea 2								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	x	✓	x	x	
SR	Pictórico y simbólico						Verbal	
Estrategia	CD1-3		CDSR		CD1-3	CDSR	n+3	
Tarea 3								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	x	x	
SR	Pictórico y simbólico						Verbal	
Estrategia	Conteo de dibujos relación 1 a 5					OE	n+5	

Nota. SR = sistemas de representación; CDSR = conteo de dibujos sin relación, CD1-3 = conteo de dibujos relación 1 a 3, OE = otra estrategia.

Relación directa

La tarea 1 fue respondida completamente por el alumno y en forma correcta estableciendo la relación “20 niños, entonces 20 gorros”, en la entrevista estableció la relación “si sé que a un niño un gorro, pues entonces en todos es lo mismo”.

En la tarea 2 el alumno contestó de forma correcta los apartados A, B, C y E en el apartado D y F dibuja un número erróneo de piruletas al cual no le encontramos relación aparente, en el apartado G, siguió la relación $n+3$, en la entrevista el alumno verbalizó la relación “uno se lleva 3 y otro se lleva otros 3 y lo mismo con los otros”, “hay que darle a cada uno 3 piruletas” y se dio cuenta que había valores que no correspondían en sus respuestas en la prueba escrita.

En la tarea 3 el alumno contestó correctamente los apartados A, B, C, D, E, pero en el apartado F, cometió un error de asociación lo que lo llevó a un resultado erróneo, en el apartado G utilizó la relación $n+5$, en la entrevista evidenció la relación “porque $5+5$ son 10” “y para 3 niños como para dos son 10 entonces 5 más y son 15”, “y darle 5 a cada niño”.

Relación inversa

En la relación inversa entre número de niños y número de gorros, el alumno obtuvo rápidamente la respuesta relacionando “si tenemos un niño, un gorro”.

En la relación inversa entre número de niños y número de piruletas, el alumno completó de forma correcta los apartados de esta tarea, evidenció verbalmente lo que hacía, “es

como el otro de las piruletas”, “pongo en un grupo tres piruletas y cuento los grupos y sé cuántos niños son”.

En la relación inversa entre número de niños y número de globos, el alumno completó correctamente todos los apartados de la tarea, expresó de forma verbal la relación “lo mismo que en el de las piruletas” el alumno formó grupos de 5 elementos y contó los grupos que obtuvo lo que es igual al número de niños involucrados en el problema.

Incorporación de un término independiente

La incorporación de un término independiente no representó mayor dificultad en este alumno, encontrando la relación funcional $n+1$ “con la corona es uno más” y completando todos los apartados propuestos de forma correcta.

Relación entre varias variables

Cuando se le pide relacionar todas las variables estudiadas, el alumno contestó que son 9 en cada variable, luego de un pequeño análisis, parte con 9 fichas de piruletas y se le recordó que debía respetar las relaciones que ya se habían establecido, el alumno hizo entonces grupos de 3 piruletas, obteniendo el número de niños involucrados en el problema, luego relacionó “si hay 3 niños, hay 3 gorros”, con los globos en un principio dice “5 globos un niño” pero igualmente contestó de forma incorrecta.

5.2.4. Entrevista alumno 27

Los criterios para entrevistar al alumno 27, fueron que este alumno utilizó expresiones como “más”, lo que fue considerado en la prueba escrita como otra categoría, en varios apartados de diferentes tareas dibujó v elementos, específicamente queríamos ahondar en que significaba para el alumno la expresión “más”. Presentamos la información relativa al trabajo del alumno 27 a la prueba escrita en la tabla 5.9.

Tabla 5.9. Resultados prueba escrita alumno 27

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H	
Tarea 1									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
SR	Pictórico							Verbal	
Estrategia	Conteo de dibujos en relación 1 a 1								
Tarea 2									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		

Tabla 5.9. Resultados prueba escrita alumno 27

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H
Corrección	x	x	x	x	x	x	x	
SR			Pictórico				Verbal	
Estrategia	CGTC		Conteo de dibujos relación 1 a 1				RD1-1	
Tarea 3								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	x	x	x	x	x	x	x	
SR			Pictórico y simbólico				Verbal	
Estrategia	OE (dibuja 5 globos y la palabra “más”)						RD1-1	

Nota. SR = sistema de representación; RD1-1 = respuesta directa relación 1 a 1. CGTC = creación de grupos todos correctos.

Relación directa

En la tarea 1 el alumno respondió correctamente a todos los apartados, en la entrevista evidenció la relación funcional entre las variables, “vi a los niños”, “50 niños 50 gorros, si no algún niño queda sin gorro”.

En la tarea 2, el alumno solo dibujó 3 piruletas en cada uno de los apartados A y B, luego dibujó tantas piruletas como niños, en la entrevista se le pidió que explicara que trató de decir en los apartados A y B al dibujar esas 3 piruletas, pero contesta “no me acuerdo”, se le entrega material concreto y establece la relación “a cada niño le doy 3 piruletas”.

En la tarea 3 la alumna dibujó en todos los apartados 5 globos y escribió la palabra “más”, en la entrevista se le pide que explique lo que hizo en esta tarea, aunque no contestó específicamente lo que se le preguntaba, luego de establecer varias situaciones erradas y de analizar la situación llegó a la relación “5 globos para cada niño”.

Relación inversa

En la relación inversa entre el número de niños y número de gorros, el alumno contestó de forma correcta a la tarea, aunque no fue capaz de dar una respuesta que complementara el valor numérico que entregaba.

En la relación inversa entre número de piruletas y número de niños, el alumno estableció la relación 1 a 1, al igual que en la relación entre globos y niños.

Incorporación de un término independiente

La incorporación de un término independiente no le complicó en lo absoluto y respondió sin error el número de gorros y coronas que se necesitan, no estableció una relación clara de funcionalidad, pero si responde al número de invitados "...y una corona".

Relación entre varias variables

Cuando el alumno se vio enfrentado a una tabla con todas las variables que se habían estudiado, estableció como relación que en todos van la misma cantidad que de piruletas.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones obtenidas tras la realización de nuestra investigación.

Con este trabajo hemos querido recoger información útil, que complementen las investigaciones que se están realizando en torno al *early algebra* y específicamente, a su enfoque de pensamiento funcional en edades tempranas. Estas investigaciones, como hemos puesto de manifiesto en los capítulos anteriores, son escasas a nivel internacional y en España son inexistentes. Nuestro principal antecedente en España es el TFM de Merino (2012) y de algunas publicaciones derivadas de este trabajo. Esta investigación resulta innovadora porque contribuye a una línea de actualidad y que a nivel nacional ha recibido poco tratamiento, siendo nulo para alumnos de primero de educación primaria, con los que trabajamos en este estudio. De ahí lo novedoso de este trabajo, en el que nos hemos planteado como objetivo general: *Describir el pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria en España.*

Comenzamos el capítulo por una valoración de la consecución de los objetivos, tanto general como específicos, planteados en el capítulo 3 de este trabajo. A continuación, describimos las limitaciones que hemos identificado en nuestro trabajo y las líneas de investigación abiertas para futuros trabajos.

6.1. Consecución de los objetivos de investigación

Con el fin de cumplir con el objetivo general de la investigación, lo desglosamos en tres objetivos específicos. A continuación describimos el logro de los mismos.

Para dar respuesta a los objetivos de investigación, hemos analizado las producciones escritas de un grupo de 32 alumnos de primero de educación primaria, con edades comprendidas entre los 6 y 7 años, en la realización de tareas que abordan el pensamiento funcional (relación directa); y de las entrevistas semiestructuradas (relación directa y relación inversa) a 4 alumnos, incorporando además un término independiente y la relación entre varias variables.

Como primer objetivo específico, nos planteamos: *Identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos en tareas que involucran una relación funcional lineal*

directa entre dos variables, prestando especial atención a los diferentes tipos de patrones que utilizan. Este objetivo específico, según nuestra apreciación, fue cumplido, ya que identificamos las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de cada una de las tareas propuestas, y las describimos en detalle. Identificamos cada una de las relaciones que los alumnos utilizaron en la resolución de cada uno de los apartados de las tareas. Creando una nueva categorización para este tipo de tareas.

En cuanto a las estrategias que identificamos y describimos, nos encontramos con que muchos de ellos establecieron la relación correcta (1 a v), por lo menos en los casos particulares consecutivos, y que seguían esta estrategia para los no consecutivos, por lo que lo describimos como “cambia el número de niños de la relación” y que utilizaron la conformación de grupos para que los dibujos tuvieran un orden y fuese más fácil contarlos. También hubo varios alumnos que se quedaron con la primera tarea y establecieron la relación identidad (1 a 1) en todas las tareas que le seguían, llevándolos a respuestas erróneas, esto se hacía más evidente en los casos no consecutivos y en la generalización. Encontramos alumnos que para valores de la variable independiente mayores, establecieron la relación $n+v$, los cuales tenían la noción que esa relación con la unidad era importante y había que incluirla en algún momento de la resolución de las tareas. Hubo un número menor de alumnos que utilizaron la relación de la unidad como constante, escribiendo o dibujando solo v elementos.

Como segundo objetivo específico, nos planteamos: *Identificar y describir estrategias utilizadas por alumnos en tareas que involucran una relación funcional inversa, una función lineal con término independiente y una relación funcional lineal entre varias variables.* Este objetivo específico lo logramos con las entrevistas personales, en ellas evidenciamos concretamente las relaciones que los alumnos establecieron, ya que la entrevista permite indagar en las resoluciones de las tareas propuestas y en el pensamiento funcional que el alumno utiliza.

Como tercer objetivo específico, nos planteamos: *Describir los sistemas de representación que los alumnos utilizan en la resolución de las tareas sobre las funciones propuestas.* Este objetivo específico, también fue logrado. Y detallamos lo que encontramos en las producciones escritas de los alumnos.

El sistema de representación más frecuentemente utilizado por los alumnos fue el pictórico. Los alumnos tendieron a dibujar los casos particulares por los que se les preguntaba en cada apartado. A partir del dibujo, utilizaban el sistema de representación simbólico (a través de números) para dar respuesta a las preguntas planteadas. Dentro de este sistema de representación, hubo alumnos que llegaron a la expresión numérica final mediante el conteo o mediante la expresión de operaciones entre números que iban anotando. Además hubo alumnos que utilizaron el sistema de representación verbal, a través del cual explicaron su respuesta. Además de las dificultades que pudieron encontrar los alumnos en la explicación de sus producciones escritas, encontramos que, su vocabulario era muy pobre y en ocasiones, esto dificultaba su explicación. Esto no es de extrañar si tenemos en cuenta su edad y que la mayoría de ellos eran lectores principiantes.

Estos objetivos específicos nos ayudan a concretar el objetivo general descrito al inicio de este capítulo, pudimos evidenciar que algunos alumnos establecieron relaciones funcionales entre las variables. El apartado sobre la generalización introducido en las tareas ha ayudado a establecer evidencias concretas en alguna de las frases que utilizaban para explicarle a la mamá de Lola como determinar la cantidad de elementos que necesitaba en general. Las entrevistas ayudaron a complementar la información y destacamos las relaciones funcionales entre las variables que los alumnos de educación primaria son capaces de identificar. También evidenciamos en las entrevistas la utilización de grupos, ya que utilizaban los dedos para generar los grupos de v elementos y en la prueba escrita solo nos daban una respuesta directa. El material concreto introducido por la entrevistadora ayudó a los alumnos a organizar la información que poseían para solucionar el problema.

Al comparar nuestros resultados con los resultados de las investigaciones citadas en este trabajo son similares, considerando la edad de los alumnos y el tipo de investigación realizada, con lo que damos por cumplido el objetivo general y los objetivos específicos propuestos para esta investigación.

6.2. Limitaciones de la investigación

Una de las limitaciones de esta investigación es la instrucción, por lo que debería ser una investigación de diseño, como la mayoría de las investigaciones que encontramos publicadas en torno a este tema.

Por tiempo y espacio disponible para el Trabajo Fin de Máster, realizamos 4 entrevistas. Habría sido interesante entrevistar a más alumnos para obtener información más rica sobre el trabajo que llevaron a cabo, pues sus explicaciones escritas eran escasas en algunos casos.

El que los alumnos fueran en su mayoría lectores principiantes, hizo que no fueran ágiles en dar explicaciones por escrito. Esto supone una limitación en las producciones de los estudiantes. Tratamos de adaptar la recogida de información en la medida de las posibilidades.

6.3. Líneas de investigación abiertas

La introducción del álgebra en educación infantil o educación primaria es un tema de actualidad, más aún, en el pensamiento funcional en edades tempranas, por lo que hay mucho que investigar en este campo. A partir del trabajo realizado, presentamos algunos ejemplos de líneas de continuación en esta investigación.

Trabajar un análisis individual de todas las tareas y apartados desarrollados por cada uno de los alumnos, ya que nosotros analizamos cada uno de los apartados e hicimos un análisis de cada tarea en general.

Trabajar un análisis general de los resultados comparando las actuaciones en conjunto de todas las tareas y apartados.

Analizar por separado los instrumentos y forma de recogida de datos, ya que solo la prueba escrita nos entrega información que puede ser digna de análisis.

Las entrevistas pueden ser consideradas como casos únicos, lo cual también nos lleva a un largo análisis del comportamiento de cada uno de los alumnos entrevistados.

Desde el punto de vista de la investigadora, sería interesante replicar esta investigación en Chile, comparar los resultados que se obtienen con los de esta investigación.

En este trabajo hemos trabajado el pensamiento funcional en el primer curso de educación primaria, queda pendiente indagar sobre el caso de los alumnos de educación infantil. Al ampliar la muestra a otros cursos, podríamos llevar a cabo un estudio longitudinal, viendo cómo son los avances de los alumnos en diferentes cursos en lo relativo a pensamiento funcional. Como parte de esta línea de investigación se podría introducir el diseño de unidades didácticas y la introducción de experimentos de enseñanza que los lleven a avanzar en los conocimientos algebraicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. En M. Jonsen Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135-142). Bergen, Noruega.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Brizuela, B., Carraher, D. y Schliemann, A. (2000). Mathematical notation to support and further reasoning (“to help me think of something”). *Symposium presentation, 2000 NCTM Research Pre-session Meeting, Chicago, IL.*
- Brizuela, B. y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 309-319.
- Brizuela, B., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. (2014) Children’s use of variable notation to represent their algebraic ideas. Manuscrito enviado para publicación.
- Butto, M. y Rojano, M. (2009). *Pensamiento algebraico temprano*. X Congreso Nacional de Investigación Educativa. Área 5: Educación y conocimientos disciplinares. Veracruz, México.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/282/>
- Cañadas, M. C, Brizuela, B. y Blanton, M. (en revisión), Second graders articulating ideas about co-variation with linear functions.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 69-81.

- Cañadas, M., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.
- Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, 34(4), 409-425.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada, España: Comares.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67.
- Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13(1). 3-21.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/444/>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*, 5º edición. México, DF: McGraw Hill.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group.
- Kaput, J., Carraher, D. y Blanton, M. (2009). *Algebra in the Early Grades*. Londres, Reino Unido: Routledge.

- Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.
- Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1926/>
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.
- Ministerio de Educación del Gobierno de Chile (2012). *Decreto 439 de 14 de abril de 2012, por el que se establecen las bases curriculares para la Educación Básica*. Santiago, Chile.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 293, 43053-43102.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación secundaria obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 5, 677-773.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007c). Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de educación infantil. *Boletín Oficial del Estado*, 4, 474-482.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/544/>
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Moss, J. y London, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-

variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education*. Berlin, Alemania: Heidelberg.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Piaget, J. (1978). La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. Madrid, España: SXXI.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in mathematics education monograph series* (pp. 303-322). Nueva York, NJ: Springer.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1751/>

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Schliemann, A. Carraher, D. Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. *Enseignement de l'algèbre élémentaire, volume especial, Recherches en Didactique des Mathématiques*, 107-122

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5-34.
- Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal*. México, DF: Reverté.
- Thomas, G. (2006). *Cálculo. Una variable*. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Adisson Wesley.
- Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 7-13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Warren, E. (2003). Young children's understanding of equals: A longitudinal study. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th conference of Psychology of Mathematics Education North America*, (Vol. 4, pp. 379-387). Honolulu, Hawai: College of Education, University of Hawai.

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA**



**PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ALUMNOS DE
PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA:
UN ESTUDIO EXPLORATORIO**

ANEXOS

**Trabajo Fin de Máster presentado por
D^a Sandra Fuentes Mardones
Dirigido por la Doctora
D^a María C. Cañadas Santiago**

GRANADA, 2014

Anexo A

Estudio piloto 1

Prueba piloto 1 y producción del niño



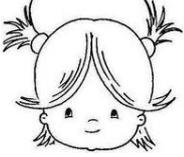
ACTIVIDAD EXPLORATORIA

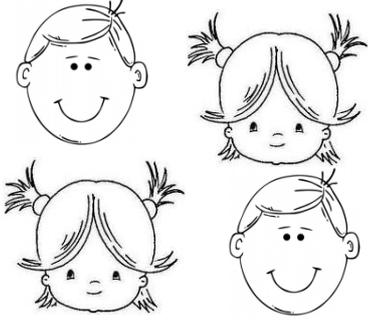
“El cumpleaños de Lola”

Nombre: _____

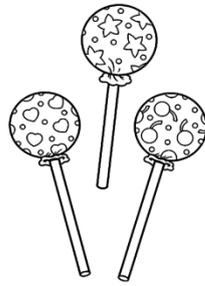
1.- Los gorros.

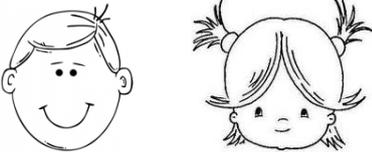
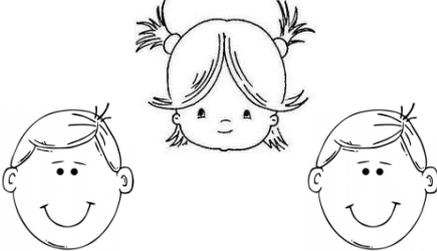
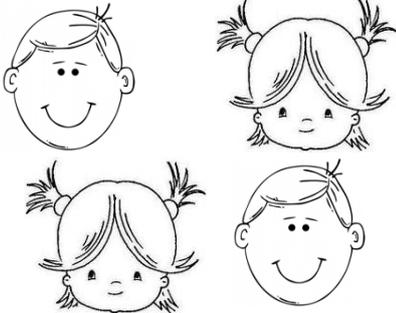


NIÑOS	GORROS
1 = 	
2 =  	
3 =   	

$4 =$ 	
$5 =$	
$8 =$	
$10 =$	
<p>¿Qué relación hay entre el número de niños y los gorros que hay que comprar?</p>	

2.- Los caramelos Chupachups



NIÑOS	CAMELOS CHUPACHUPS
<p>1 =</p> 	
<p>2 =</p> 	
<p>3 =</p> 	
<p>4 =</p> 	

$5 =$	
$8 =$	
$10 =$	
<p>¿Qué relación hay entre el número de niños y los chupachups que hay que comprar?</p>	



AT: 15:40
AT: 16:52

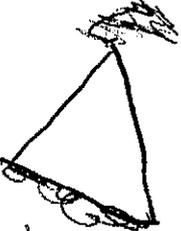
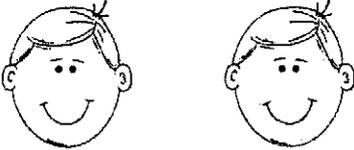
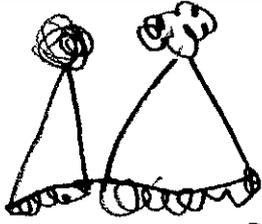
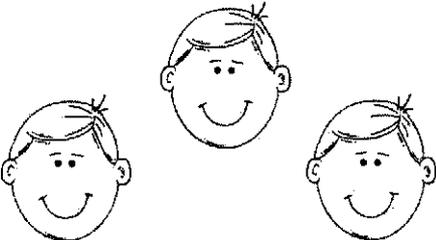
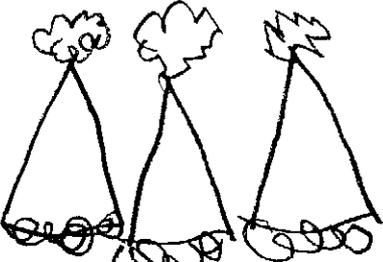
ACTIVIDAD EXPLORATORIA

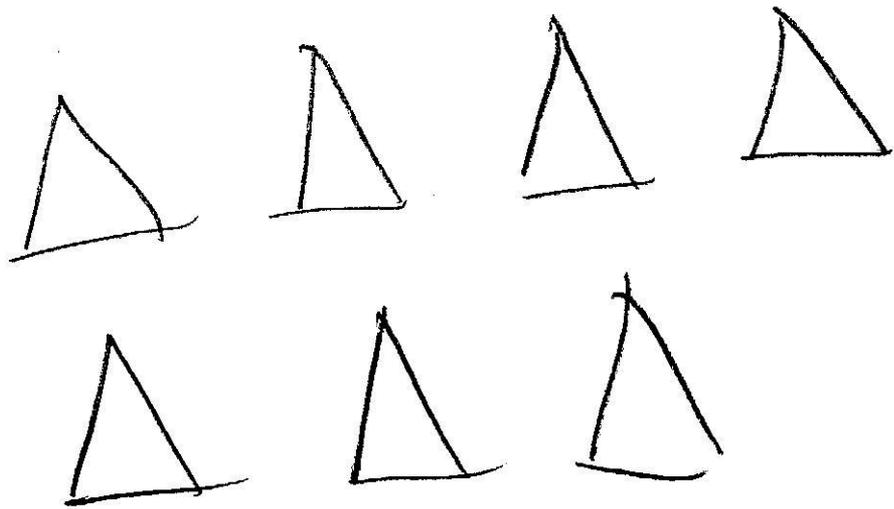
“El cumpleaños de Lola”

Nombre: PILOTO 1 años: 4 años

1.- Los gorros.

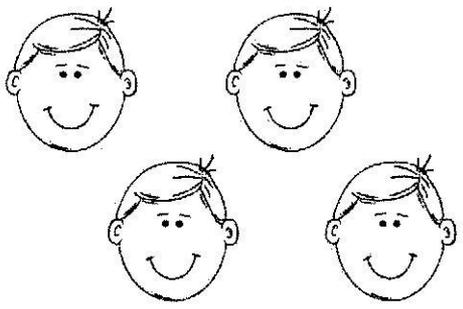
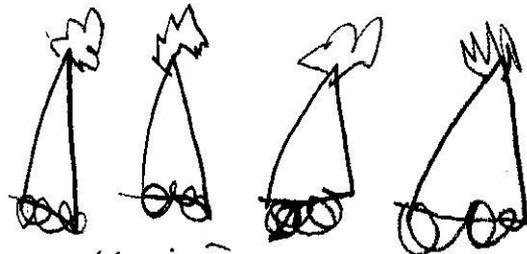
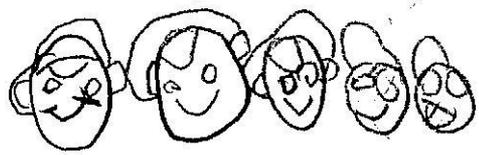
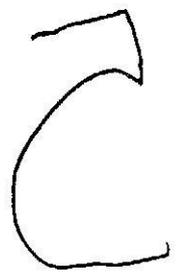
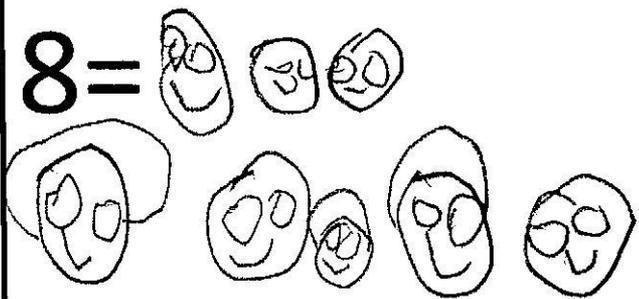
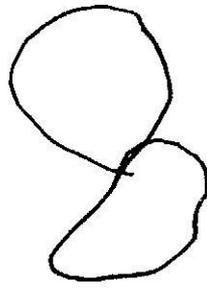
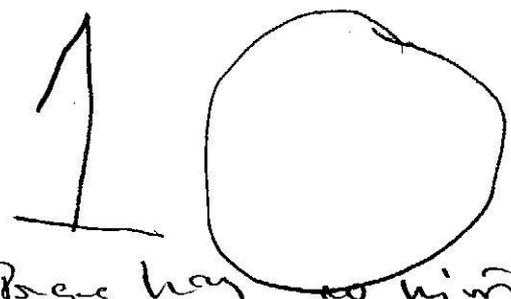


NIÑOS	GORROS
<p>1 =</p> 	 <p>Hay 1 gorro x que hay 1 niño</p>
<p>2 =</p> 	 <p>Por 2 gorros x que son 2 niños</p>
<p>3 =</p> 	 <p>por 3 gorros</p>

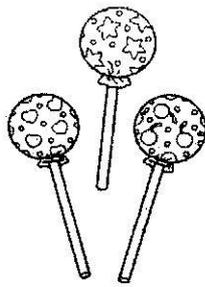


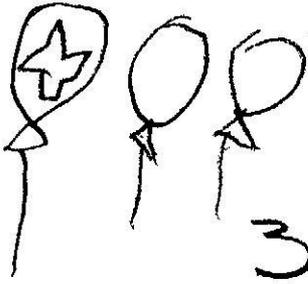
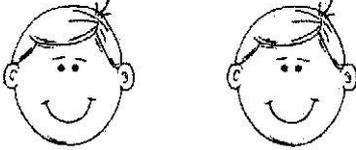
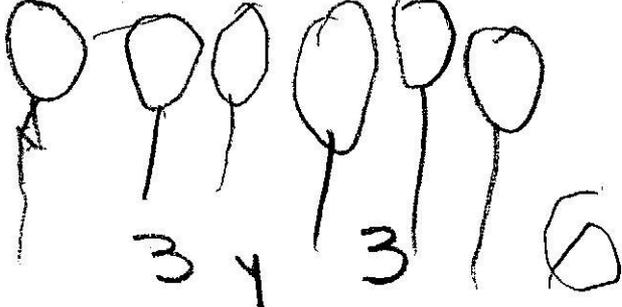
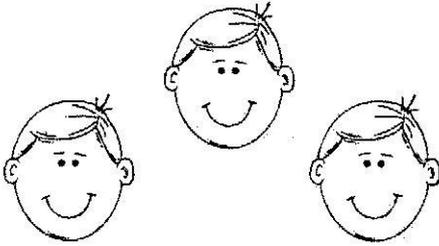
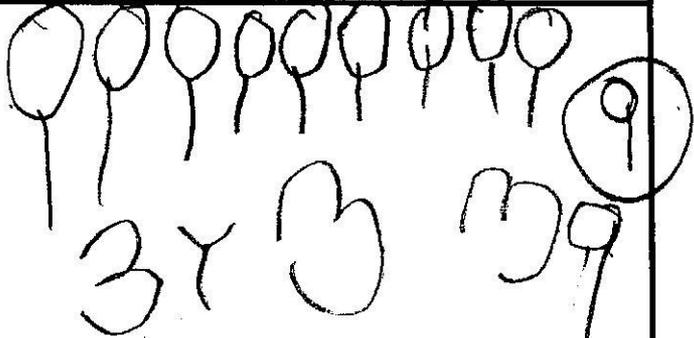
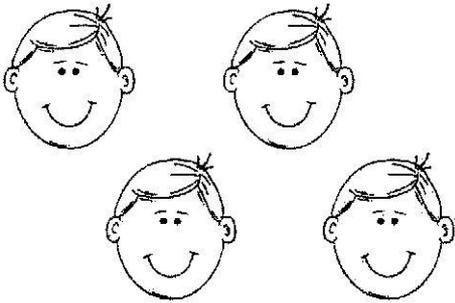
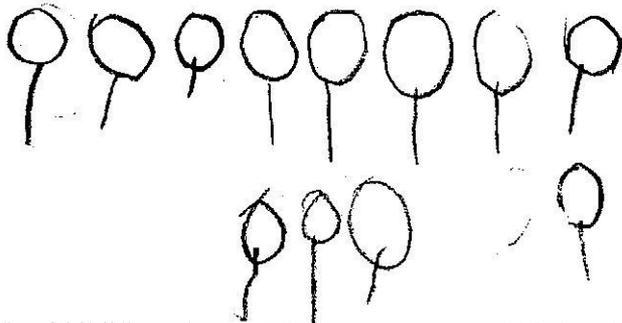
Pueden ir 7 niños

20 gomas - 20 niños

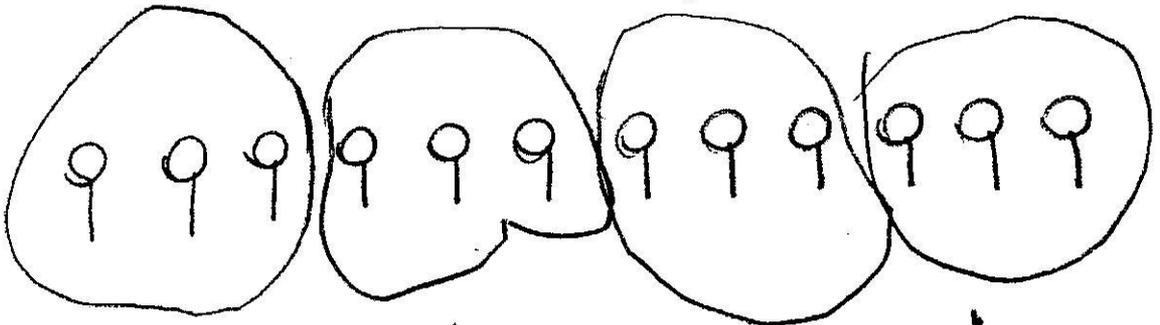
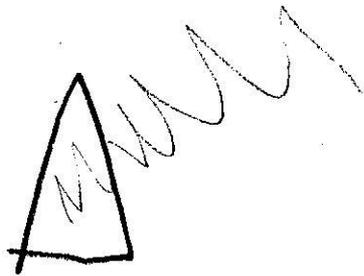
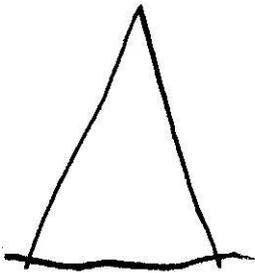
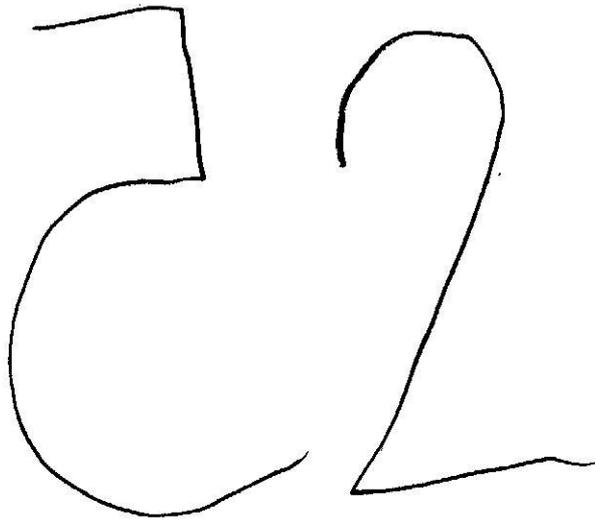
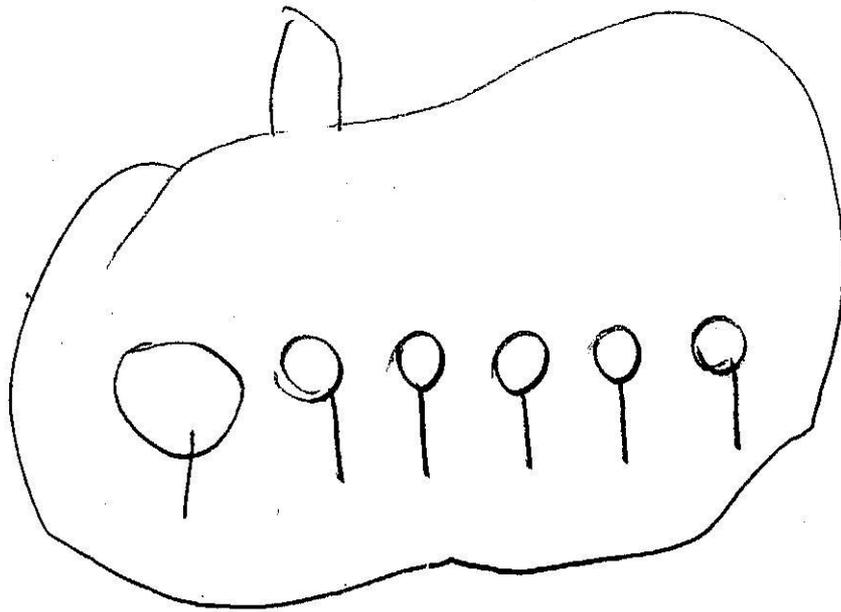
<p>4 =</p> 	 <p>por 4 niños</p>
<p>5 =</p> 	 <p>son 5 gorros x que son 5 niños</p>
<p>8 =</p> 	
<p>10 =</p>	 <p>Porque hay 10 niños.</p>
<p>¿Que relación hay entre el número de niños y los gorros que hay que comprar?</p> <p>Cada niño debe llevar un gorro</p> <p>100 - 100 gorros</p> <p>30 - 30 gorros</p>	

2.- Los caramelos Chupachups

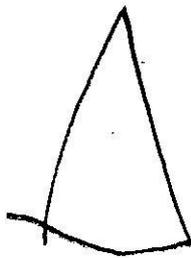


NIÑOS	CAMELOS CHUPACHUPS
<p>1 =</p> 	 <p>3</p>
<p>2 =</p> 	 <p>3 1 3 1 1</p>
<p>3 =</p> 	 <p>3 2 3 1 1</p>
<p>4 =</p> 	 <p>3 3 3 3 1 1 1 1</p>

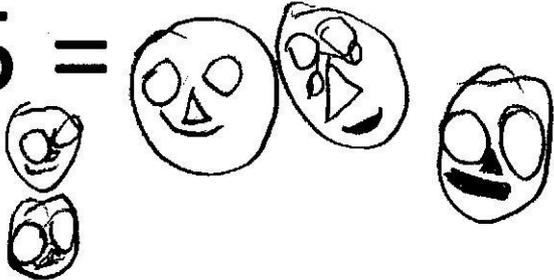
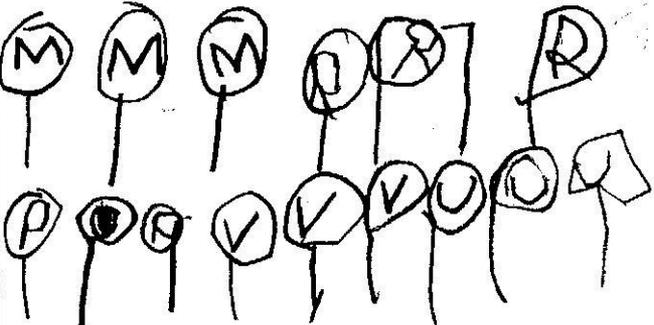
3 + 3 + 3 + 3
4 niños



4 rows



son solo 3 para cada uno⁴

<p>5 =</p> 	
--	--

<p>8 =</p>	
------------	--

<p>10 =</p>	
-------------	--

¿Que relación hay entre el número de niños y los chupachups que hay que comprar?

3 cada uno
muchos niños / 3 chupachups para cada niño.
10 niños 3 para el 1º
 3 para el 2º
 3 para el 3º

Todos los de tu clase

R - necesito saber cuántos son

I - son 25, los conté ayer

R - son 25 como

I - y cuántos chuches

R = 25 1 chuche para cada uno

I y la maná de Jola o cuatro davis.

R = Tres, entonces 3 para 1, 3 para otros

3 ...

Anexo B

Estudio piloto 2

Prueba piloto 2 y producción del niño



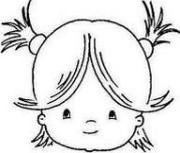
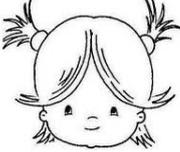
ACTIVIDAD EXPLORATORIA

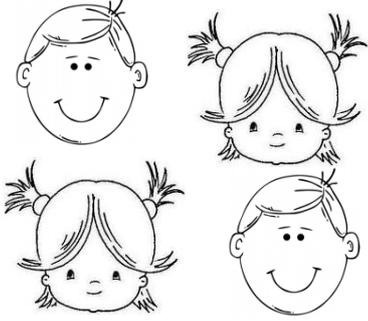
El cumpleaños de Lola

Nombre: _____

1.- Los gorros.

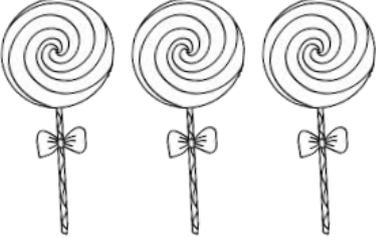
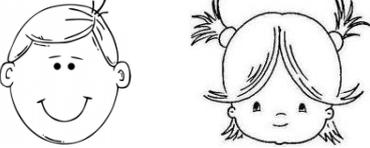
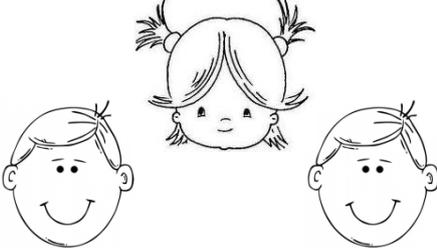
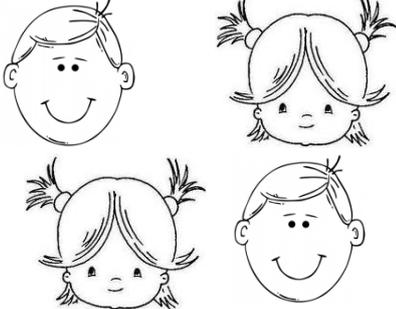


niños y niñas	gorros
1 = 	
2 =  	
3 =   	

$4 =$ 	
$5 =$	
$8 =$	
$10 =$	
<p>¿Qué relación hay entre el número de niños y los gorros que hay que comprar para que no falte ni sobre ninguno?</p>	

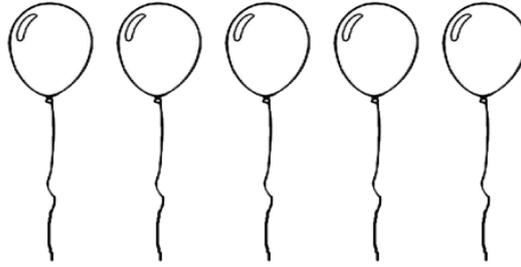
2.- Las piruletas

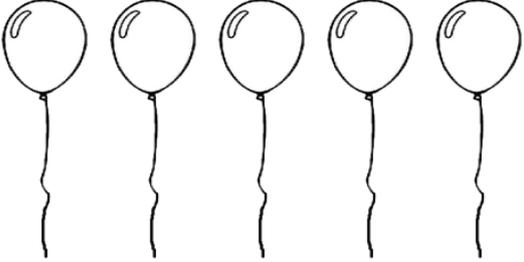
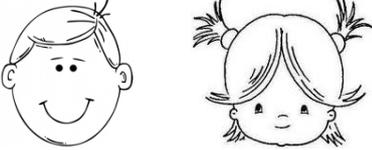
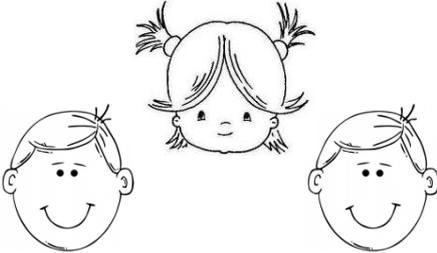
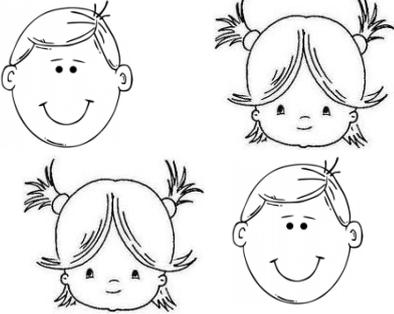


niños y niñas	piruletas
<p>1 =</p> 	
<p>2 =</p> 	
<p>3 =</p> 	
<p>4 =</p> 	

$5 =$	
$8 =$	
$10 =$	
<p>¿Qué relación hay entre el número de niños y las piruletas que hay que comprar para que no falte ni sobre ninguno?</p>	

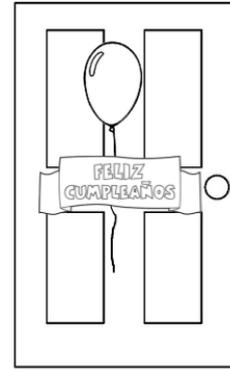
3.- Los globos

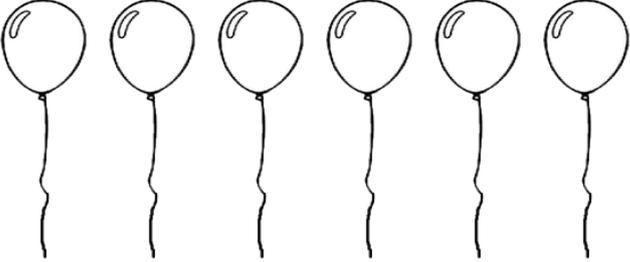
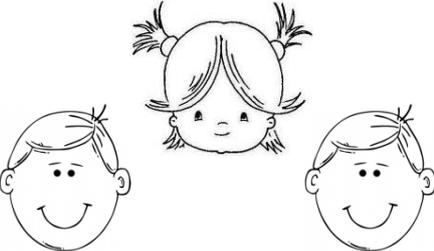


niños y niñas	globos
1 = 	
2 = 	
3 = 	
4 = 	

$5 =$	
$8 =$	
$10 =$	
<p>¿Qué relación hay entre el número de niños y los globos que hay que comprar para que no falte ni sobre ninguno?</p>	

4.- Se debe colocar un globo en la puerta para avisar a los niños y niñas que en esa casa es el cumpleaños



niños y 1 globo en la puerta	globos
<p>1 =</p> 	
<p>3 =</p> 	
<p>5 =</p>	
<p>¿Qué relación hay ahora entre el número de niños y los globos que hay que comprar para que no falte ni sobre ninguno?</p>	



18:05

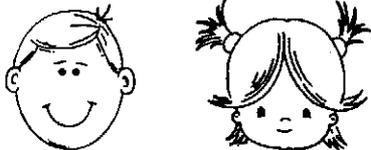
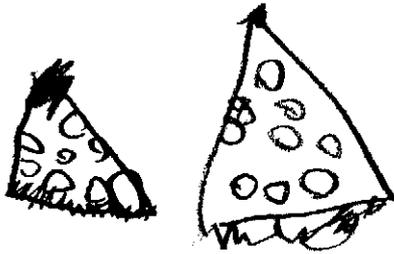
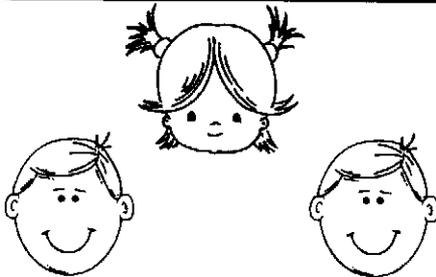
ACTIVIDAD EXPLORATORIA

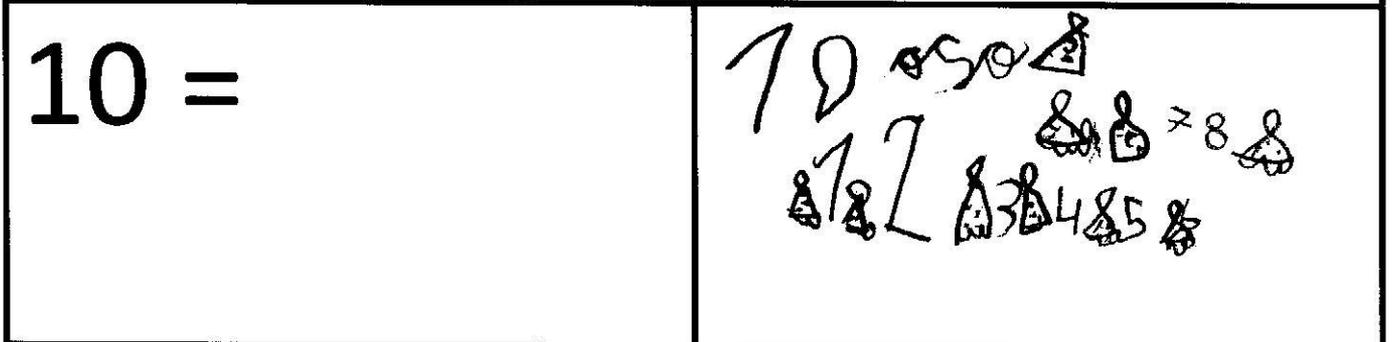
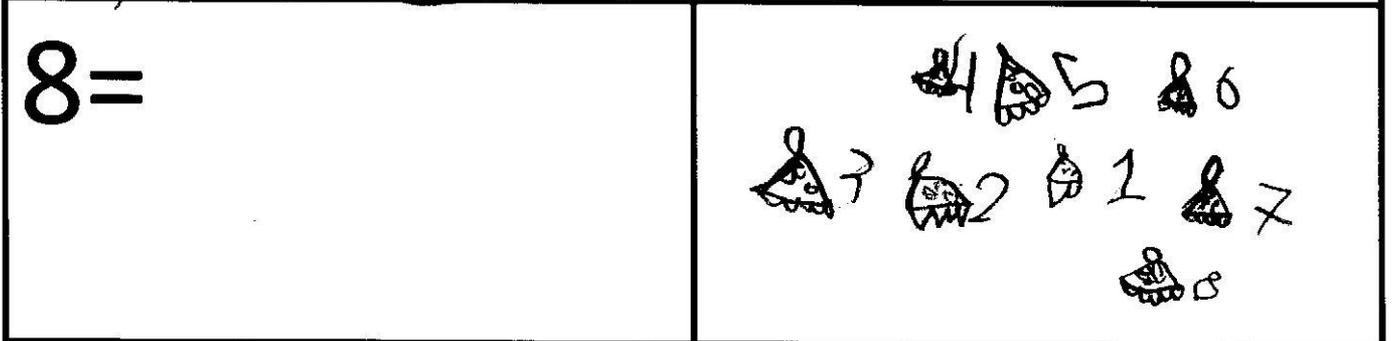
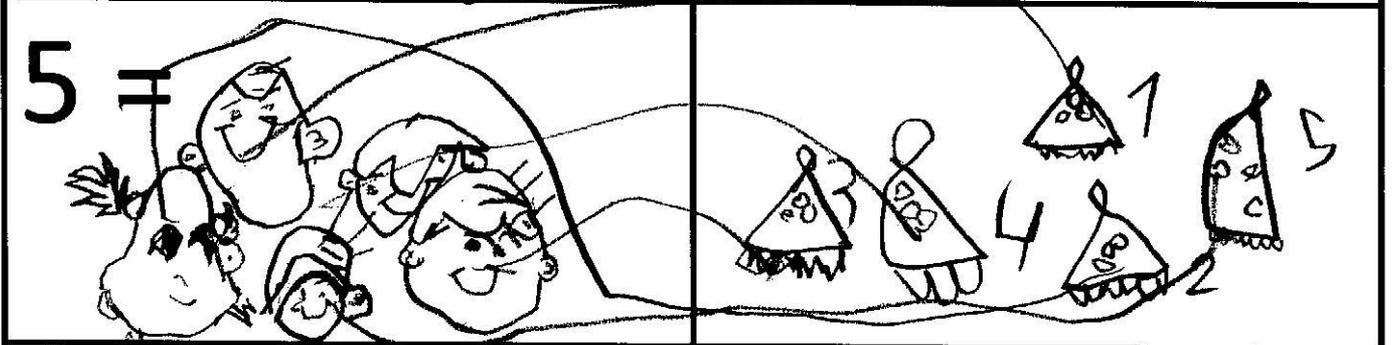
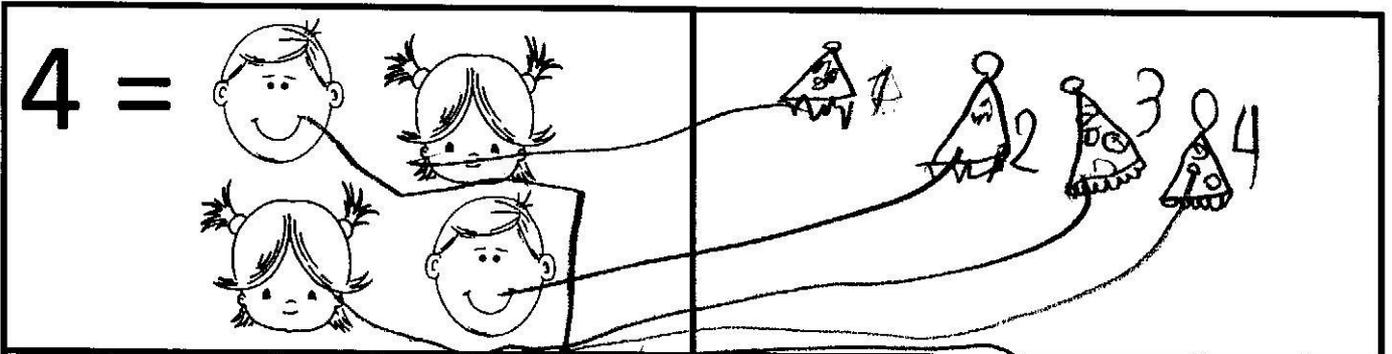
El cumpleaños de Lola

Nombre: Piloto 2 6 años

1.- Los gorros.

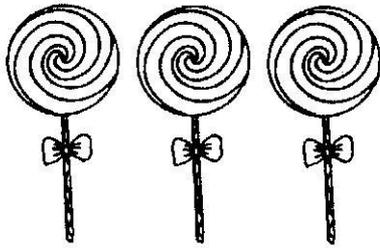


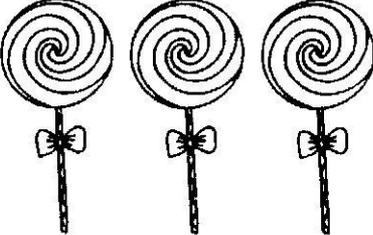
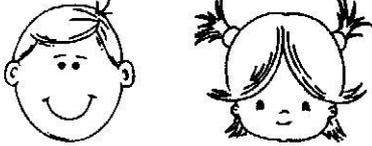
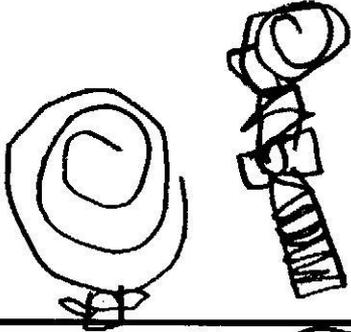
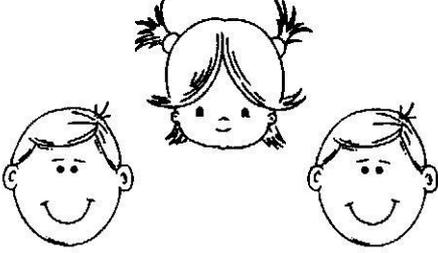
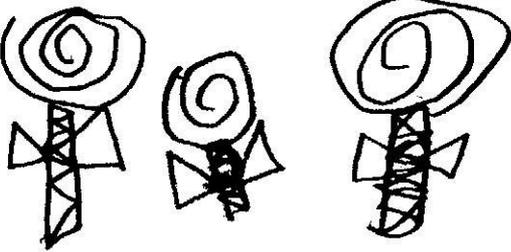
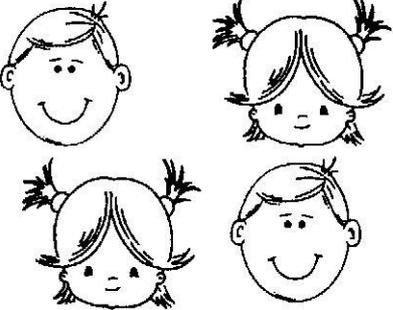
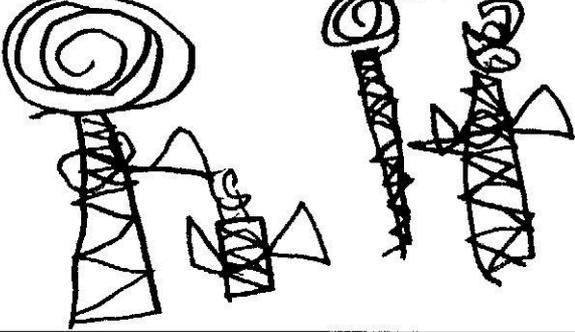
niños y niñas	gorros
<p>1 =</p> 	
<p>2 =</p> 	
<p>3 =</p> 	



¿Qué relación hay entre el número de niños y los gorros que hay que comprar para que no falte ni sobre ninguno?

2.- Las piruletas



niños y niñas	piruletas
<p>1 =</p> 	
<p>2 =</p> 	
<p>3 =</p> 	
<p>4 =</p> 	

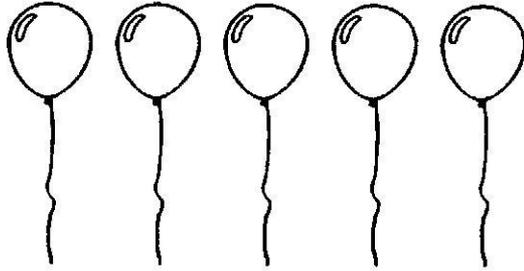
$5 =$

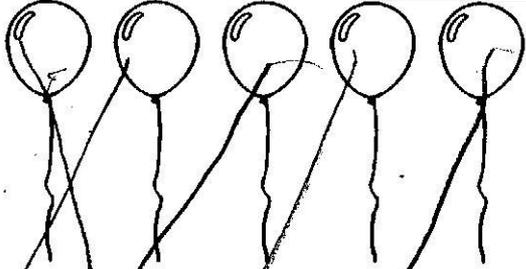
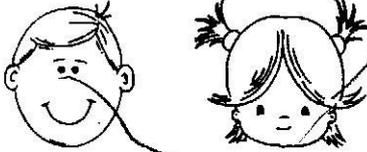
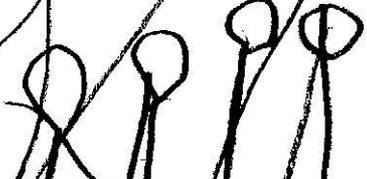
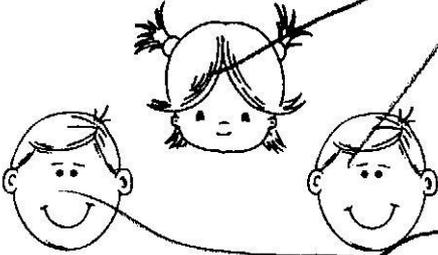
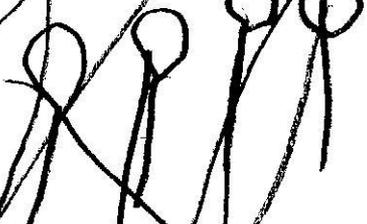
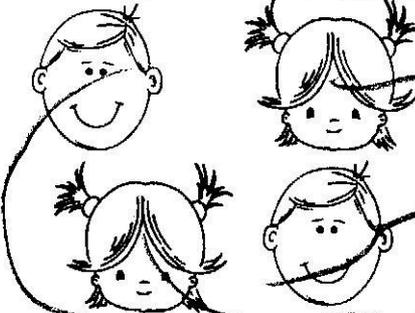
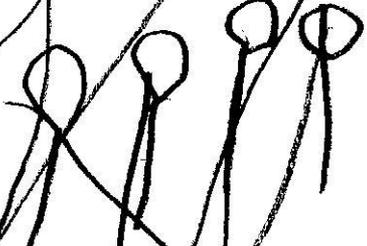
$8 =$

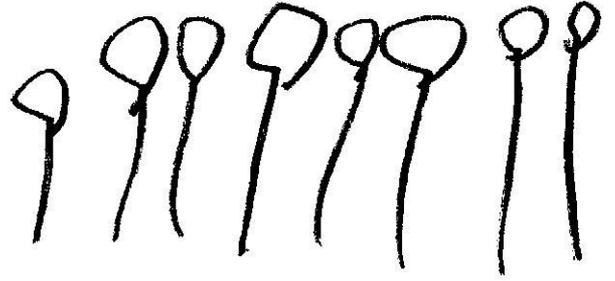
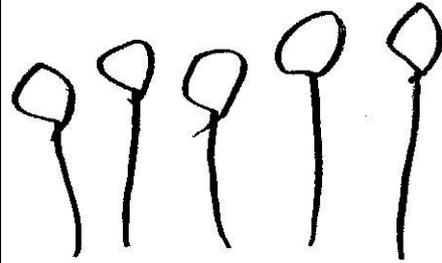
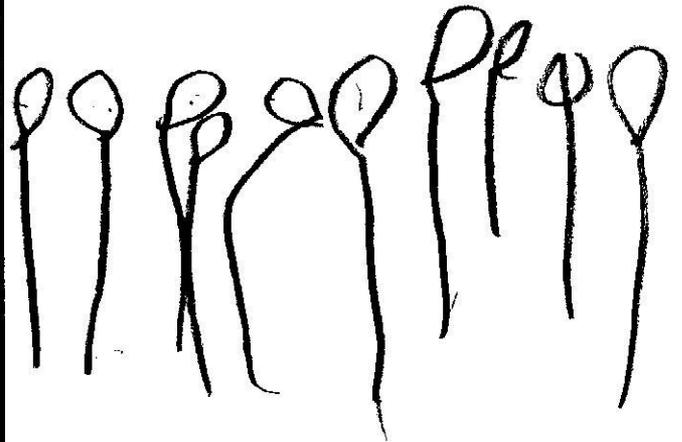
$10 =$

¿Qué relación hay entre el número de niños y las piruletas que hay que comprar para que no falte ni sobre ninguno?

3.- Los globos

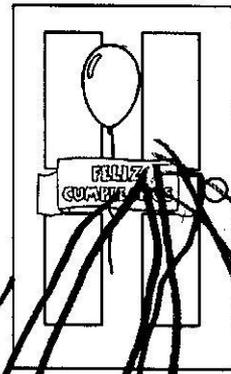


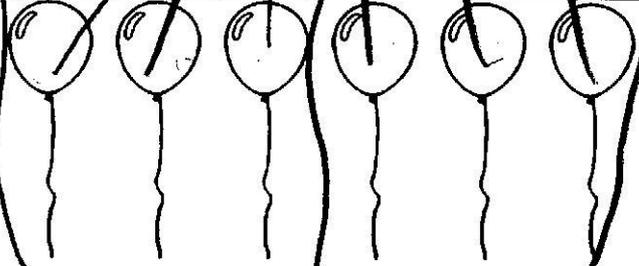
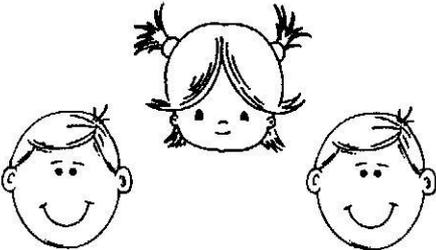
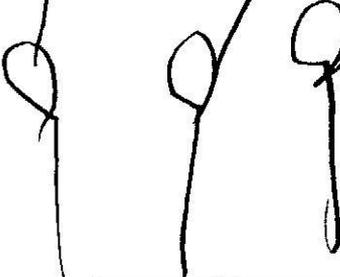
niños y niñas	globos
1 = 	
2 = 	
3 = 	
4 = 	

$5 =$  $8 =$  $10 =$ 

¿Qué relación hay entre el número de niños y los globos que hay que comprar para que no falte ni sobre ninguno?

4.- Se debe colocar un globo en la puerta para avisar a los niños y niñas que en esa casa es el cumpleaños



niños y 1 globo en la puerta	globos
<p>1 =</p> 	
<p>3 =</p> 	
<p>5 =</p>	

¿Qué relación hay ahora entre el número de niños y los globos que hay que comprar para que no falte ni sobre ninguno?

Anexo C

Prueba definitiva



El cumpleaños de Lola

Nombre: _____

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
Explicación	

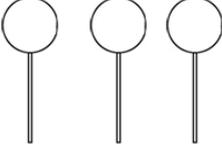


El cumpleaños de Lola

Nombre: _____



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
Explicación	

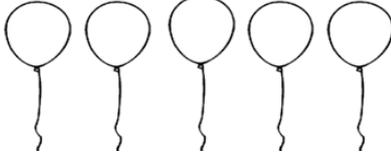


El cumpleaños de Lola

Nombre: _____

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
Explicación	

Anexo D

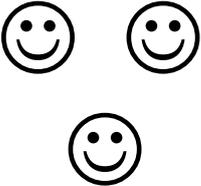
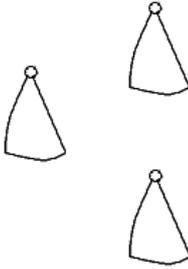
Entrevista semiestructurada y producción de los alumnos



ENTREVISTA

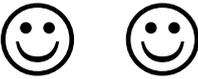
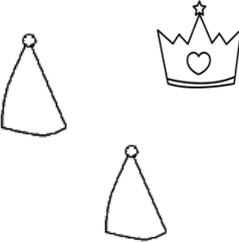
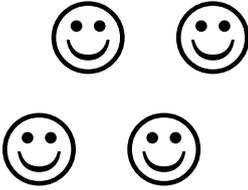
Nombre: _____

1.- Los gorros

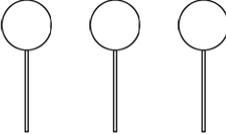
invitados	gorros
3 	3 
	7
	12



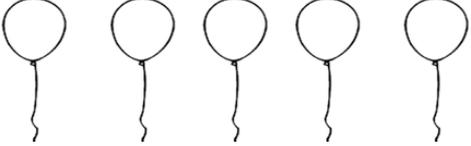
2.- Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños,
Ella quiere un gorro de princesa

invitados	gorros
2 	3 
4 	
9	
12	

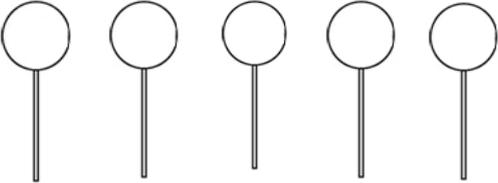
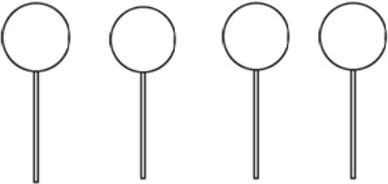
3.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
	6
	15

4.- Los globos

niños	globos
1 	5 
	10
	25

5.- Completa la lista de compras para que no falte ni sobre ninguno

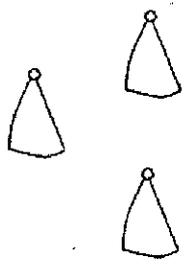
	niños		gorros
9	piruletas		globos
			
			



ENTREVISTA

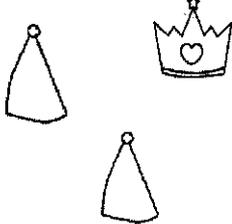
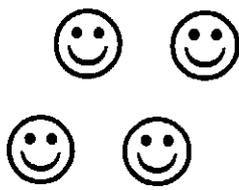
Nombre: ALUMNO 7

1.- Los gorros

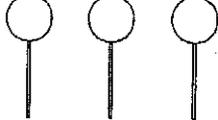
invitados	gorros
3 	3 
7 ☺	7 gorros
12 ☺	12 gorros



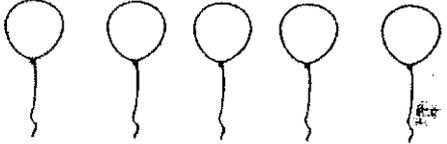
2.- Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños,
Ella quiere un gorro de princesa

invitados	gorros
<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>4</p> 	
<p>9</p> 	<p>10 gorros</p>
<p>12</p> 	<p>13 gorros</p>

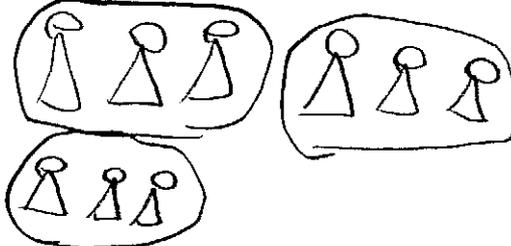
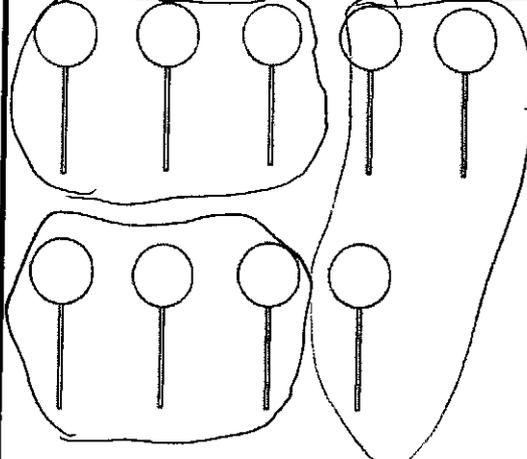
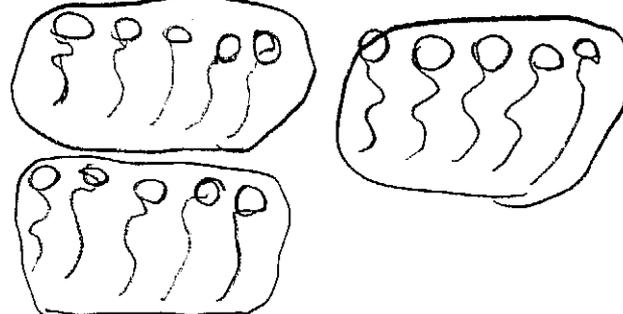
3.- Las piruletas

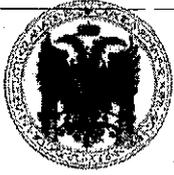
niños	piruletas
1 	3 
20	6 piruletas
50	15 piruletas

4.- Los globos

niños	globos
1 	5 
2 	10 globos
5 	25 globos

5.- Completa la lista de compras para que no falte ni sobre ninguno

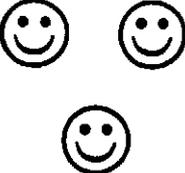
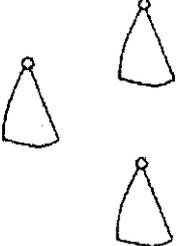
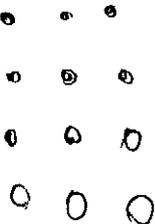
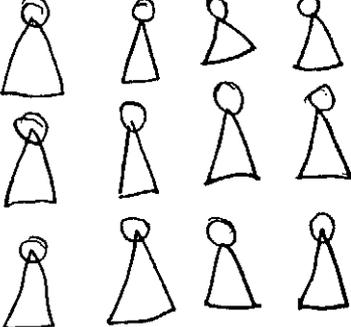
<p>3</p>	<p>niños</p>	<p>9</p>	<p>gorros</p>
<p>1 2 3</p>			
<p>9</p>	<p>piruletas</p>	<p>15</p>	<p>globos</p>
			



ENTREVISTA

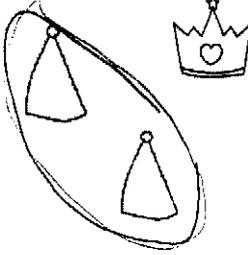
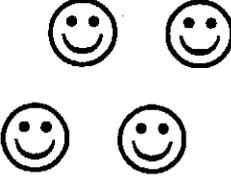
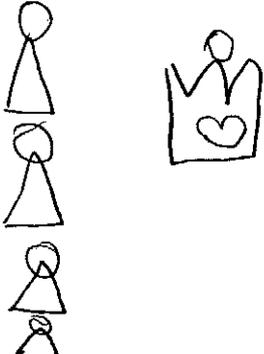
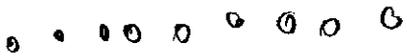
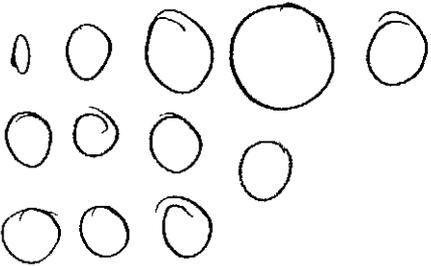
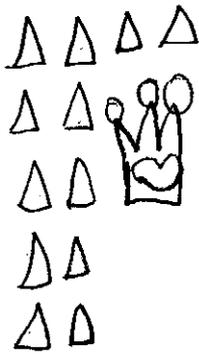
Nombre: ALUMNO 12

1.- Los gorros

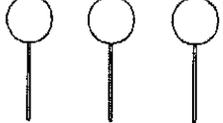
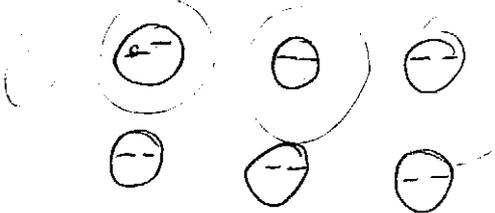
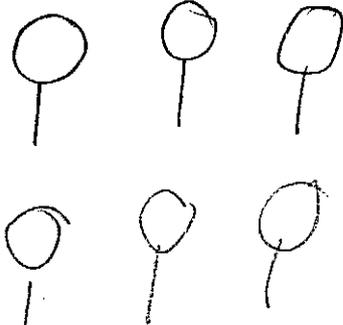
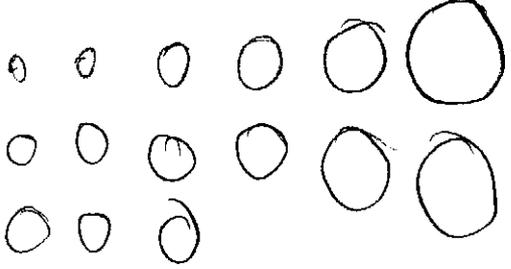
invitados	gorros
<p>3 </p>	<p>3 </p>
<p>7 </p>	<p>7 </p>
<p>12 </p>	<p>12 </p>



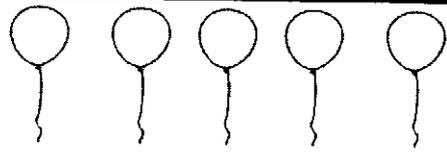
2.- Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños,
Ella quiere un gorro de princesa

invitados	gorros
2 	3 
4 	
9 	
12 	

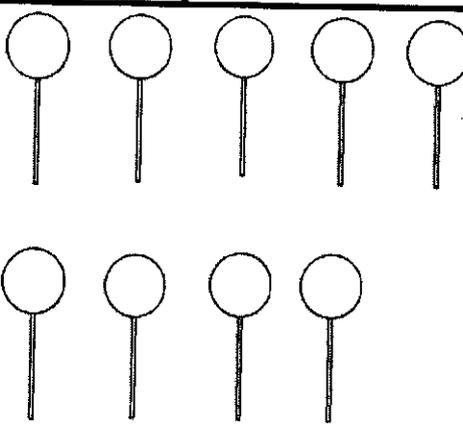
3.- Las piruletas

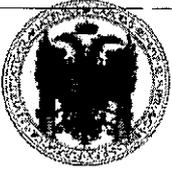
niños	piruletas
<p>1</p> 	<p>3</p> 
	<p>6</p> 
	<p>15</p>

4.- Los globos

niños	globos
1 	5 
	10
	25

5.- Completa la lista de compras para que no falte ni sobre ninguno

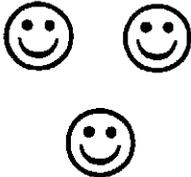
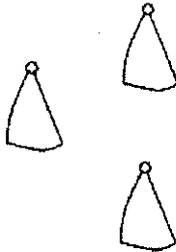
101	niños	101	gorros
9	piruletas	101	globos
			



ENTREVISTA

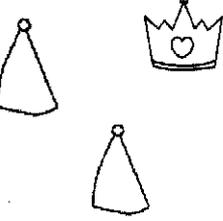
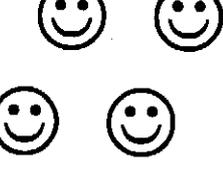
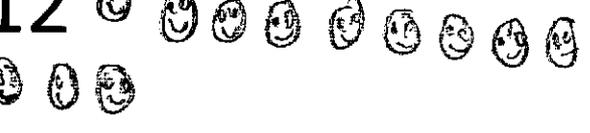
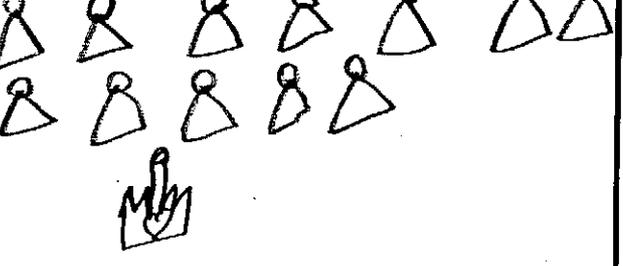
Nombre: **ALUMNO 15**

1.- Los gorros

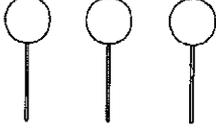
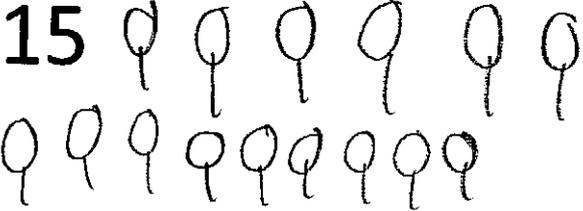
invitados	gorros
3 	3 
7 	7 
12 	12 

2.- Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños,
Ella quiere un gorro de princesa

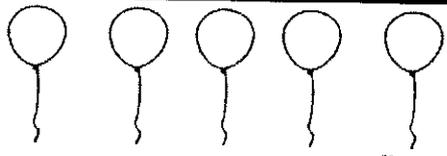
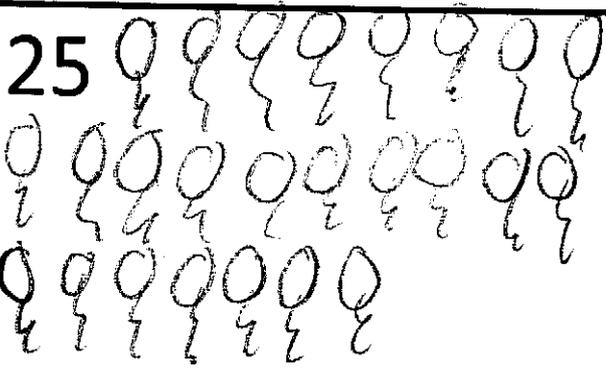


invitados	gorros
2 	3 
4 	
9 	
12 	

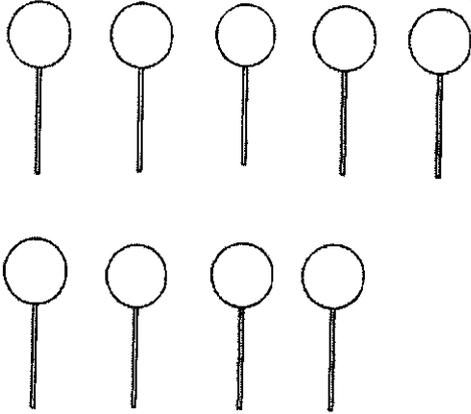
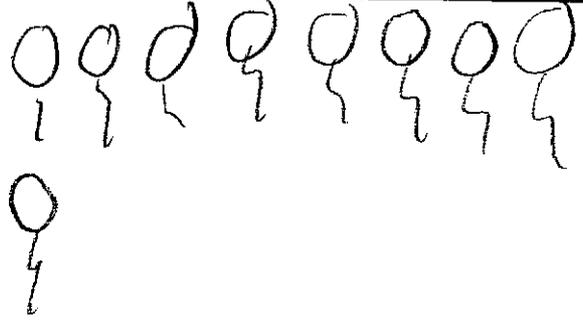
3.- Las piruletas

niños	piruletas
<p>1</p> 	<p>3</p> 
<p>2</p> 	<p>6</p> 
<p>5</p> 	<p>15</p> 

4.- Los globos

niños	globos
1 	5 
2 	10 
5 	25 

5.- Completa la lista de compras para que no falte ni sobre ninguno

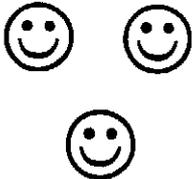
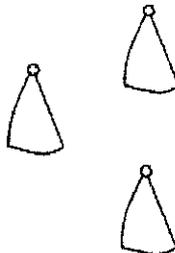
3	niños	3	gorros
			
9	piruletas	9	globos
			



ENTREVISTA

Nombre: ALUMNO 27

1.- Los gorros

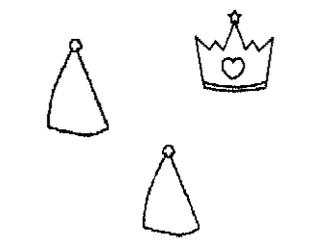
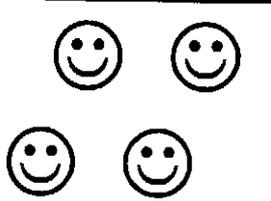
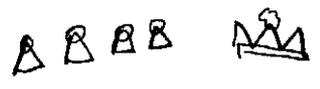
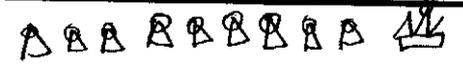
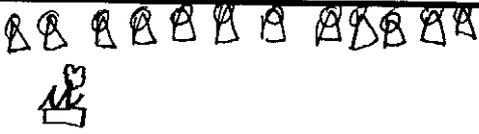
invitados	gorros
3 	3 
	7
	12

(+)

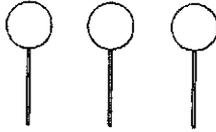
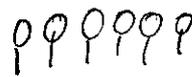
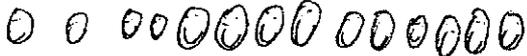


2.- Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños,

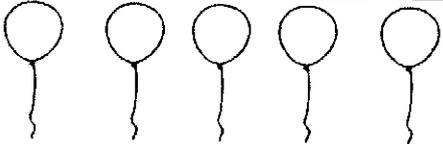
Ella quiere un gorro de princesa

invitados	gorros
<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>4</p> 	
<p>9</p>	
<p>12</p>	

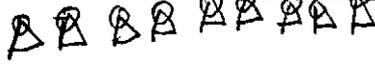
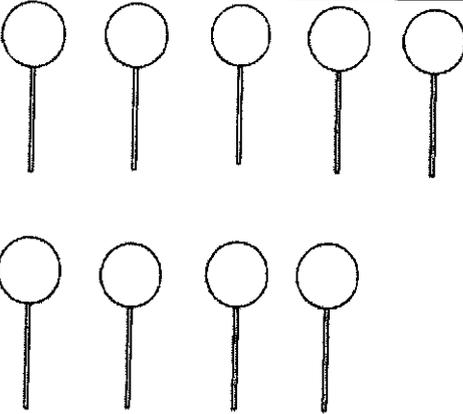
3.- Las piruletas

niños	piruletas
<p>1</p> <p>.</p> 	<p>3</p> 
	<p>6</p> 
	<p>15</p>

4.- Los globos

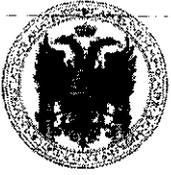
niños	globos
1 	5 
	10
25	25

5.- Completa la lista de compras para que no falte ni sobre ninguno

	niños		gorros
			
9	piruletas		globos
			

Anexo E

Producción de los alumnos en la prueba escrita



El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 1

1.- Los gorros.

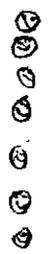


niños	gorros
1 	1 
2 	2 
3 	3 
4 	4 

1

5 	
---	---

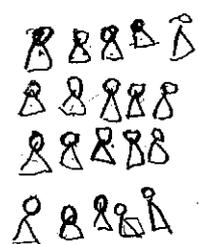
... ..

8 	
---	--

... ..

10 	
--	---

... ..

20 	
---	---

Explicación *antes tiene necesita cien gorros*

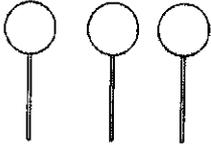
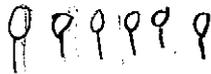
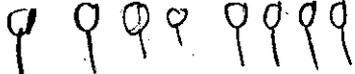


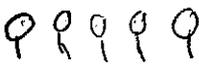
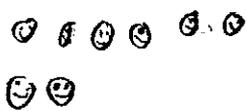
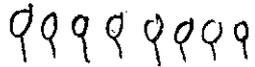
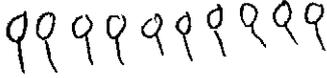
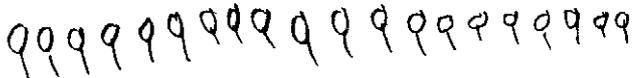
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 1



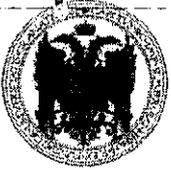
2.- Las piruletas

niños	piruletas
<p>1 </p>	<p>3 </p>
<p>2 </p>	<p>6 </p>
<p>3 </p>	<p>9 </p>
<p>4 </p>	<p>12 </p>

5 	
...	...
8 	
...	...
10 	
...	...
20 	

Explicación

antes de leerla con cien niños. cian pirulitas

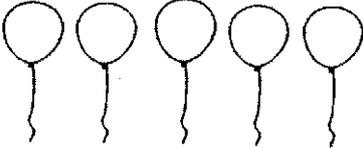
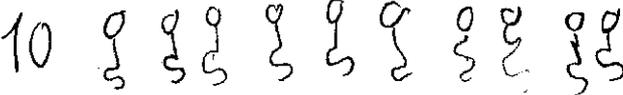
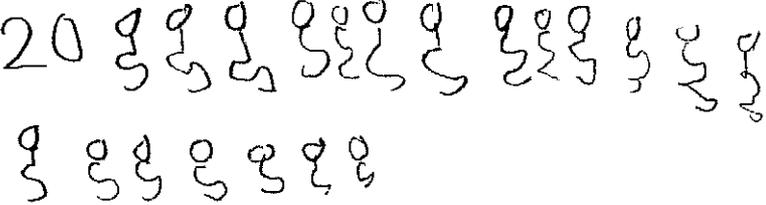


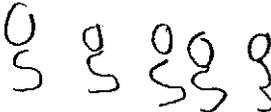
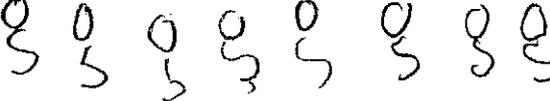
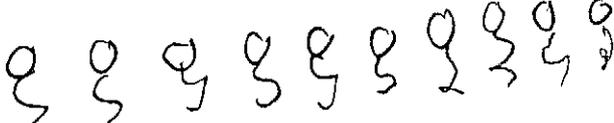
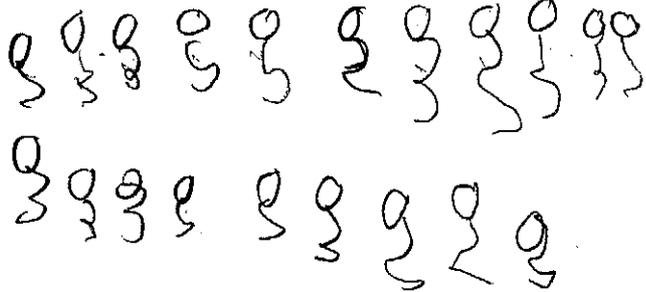
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 1

3.- Los globos



niños	globos
<p>1 </p>	<p>5 </p>
<p>2 </p>	<p>10 </p>
<p>3 </p>	<p>15 </p>
<p>4 </p>	<p>20 </p>

5 	
...	...
8 	
...	...
10 	
...	...
20 	

Explicación

ute de loeria cien niños cien globos



El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 2

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1   
2  	 
3   	  
4    	   

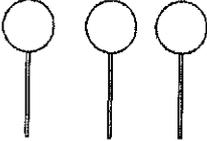
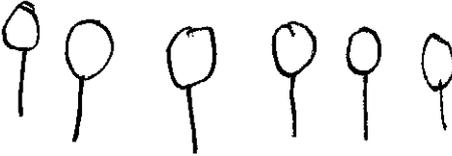
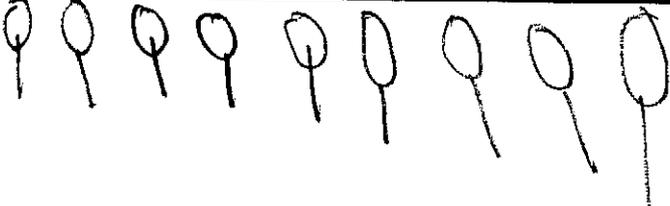


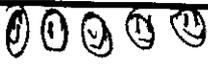
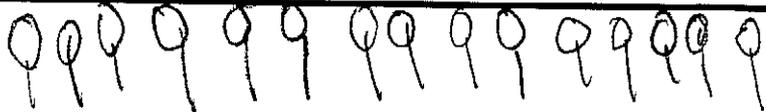
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 2**

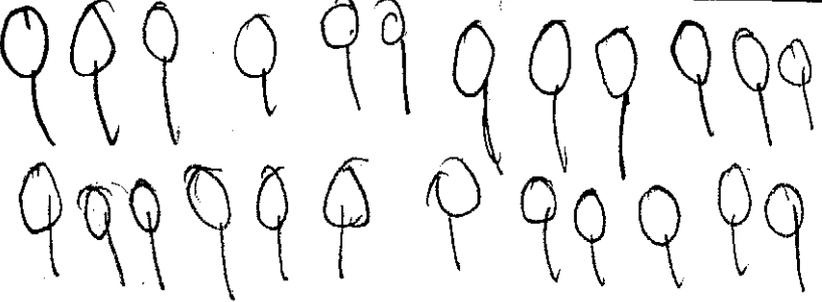
2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

<p>5 </p>	
--	--

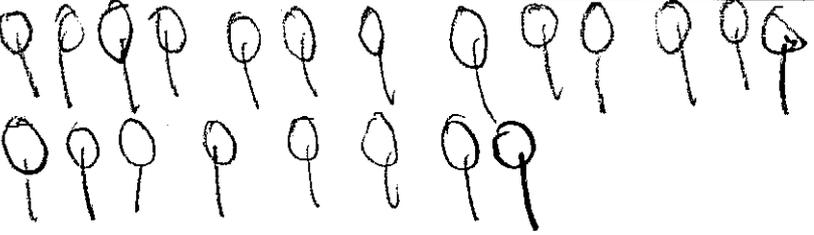
... ..

<p>8 </p>	
--	--

... ..

<p>10 </p>	
---	--

... ..

<p>20 </p>	
---	--

Explicación *señala la columna del 1.1.1.2.3 4 5*
 6 7 8 9 10 11

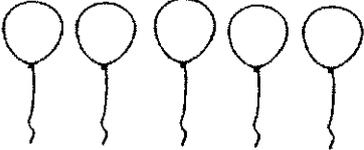


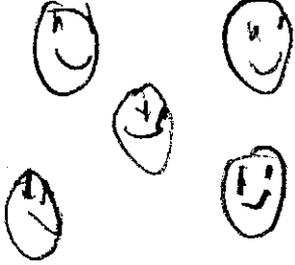
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 2

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
3 	1 2 3 4 5 6 7 8 9
4 	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

<p>5</p> 	<p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25</p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8</p>	<p>1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18</p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10</p>	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20</p>	
<p>Explicación</p>	

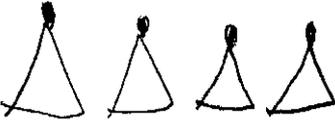


El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 3**

1.- Los gorros.



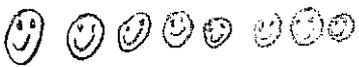
niños	gorros
1 	1  
2 	
3 	
4 	

5



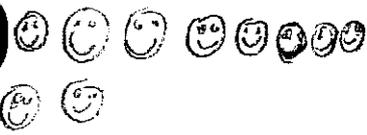
...

8



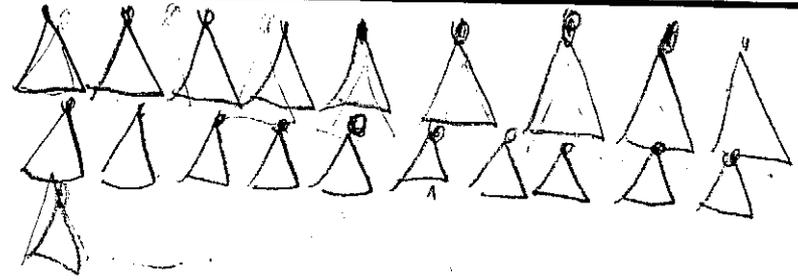
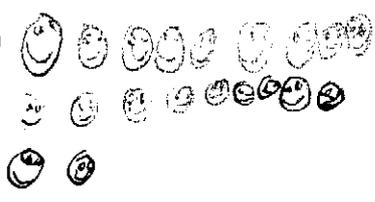
...

10



...

20



Explicación

la mamá de lo tiene que comprar veinte gorro

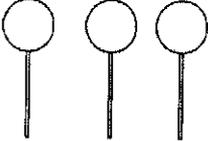
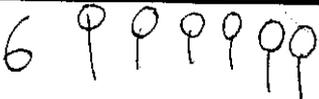


El cumpleaños de Lola

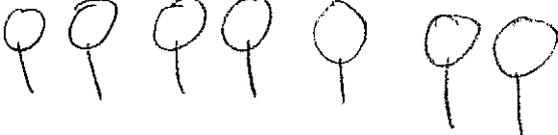
Nombre: ALUMNO 3

2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	6 
3 	8 
4 	10 

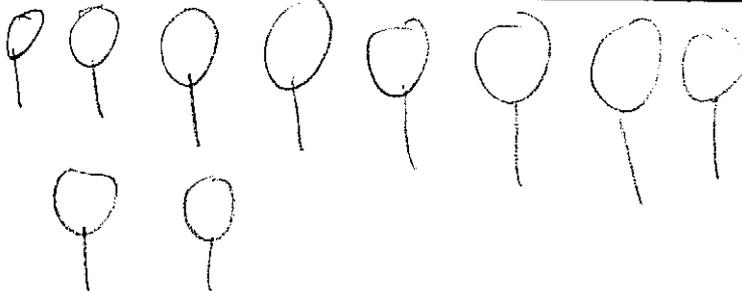
5 



...

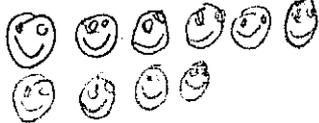
...

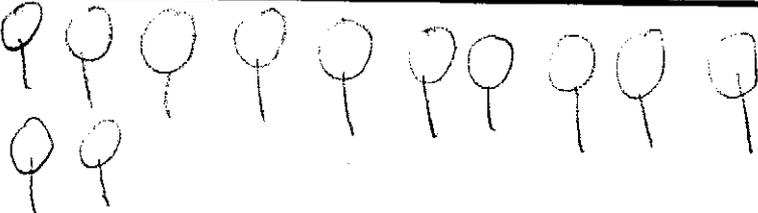
8 



...

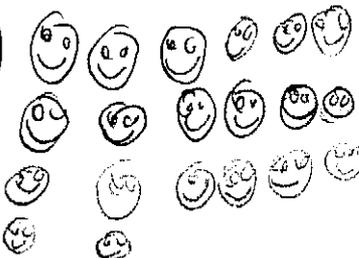
...

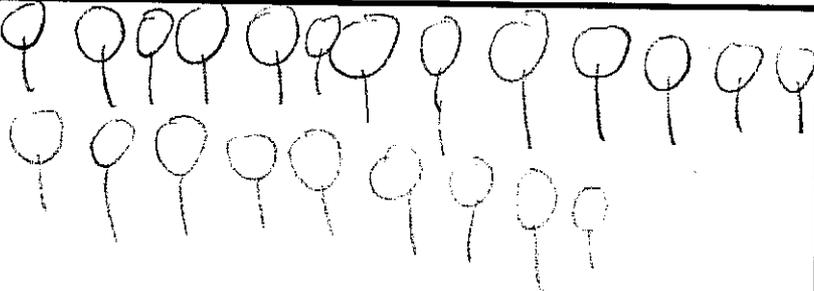
10 



...

...

20 



Explicación la mamá de lolo tiene que comprar veintidos niñas

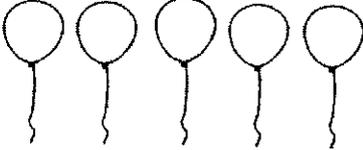
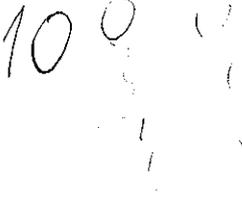


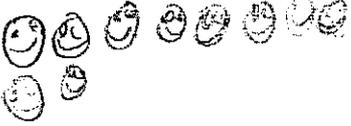
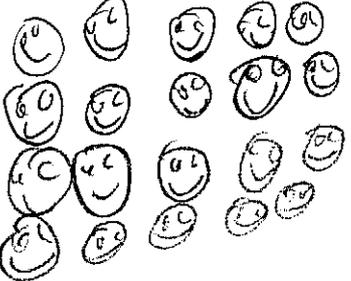
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 3

3.- Los globos

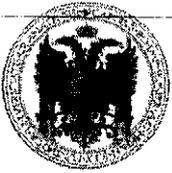


niños	globos
1 	5 
2 	10 
3 	12 
4 	15 

5 	4
...	...
8 	16
...	...
10 	20
...	...
20 	22

Explicación

la mamá de Lola
tiene que comprar
veintidos niña



El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 4

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1  
2 	2 
3 	la señora necesita tres gorros.
4 	

5 	
---	--

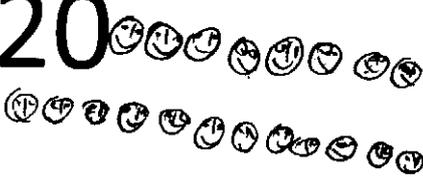
...

8 	8
---	---

...

10 	10
--	----

...

20 	20
---	----

Explicación

Se fura ~~como~~ de lola 100

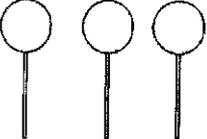


El cumpleaños de Lola

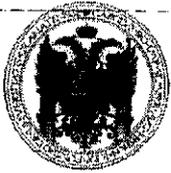
Nombre: ALUMNO 4

2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5 	5 los que se le tres que 3
...	...
8 	8
...	...
10	30
...	...
20	30
<p>Explicación</p> <p>Si son 100 rúbita son 100</p>	

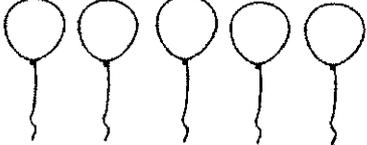


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 4

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	5 5
3 	5 5 5
4 	5 5 5 5

5 0 0 0 0 0 0	5 10
...	...
8	100
...	...
10	30
...	...
20	40

Explicación

A isien número 5 5 5 5 5 5 5 5 100

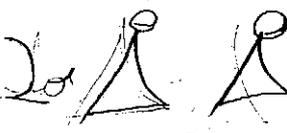


El cumpleaños de Lola

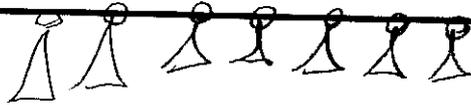
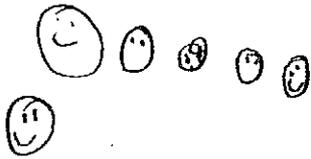
Nombre: **ALUMNO 5**

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

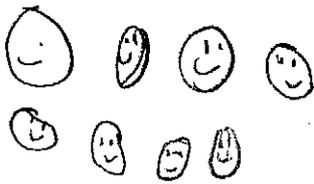
5



...

...

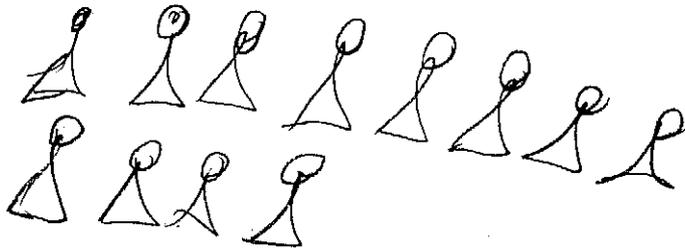
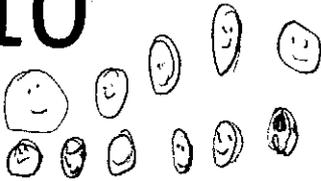
8



...

...

10



...

...

20



Explicación

cuantos niños han traído.

Ustedes cuantos gorros son 20.

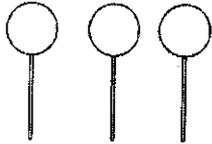


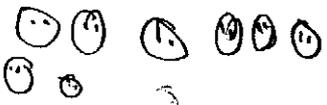
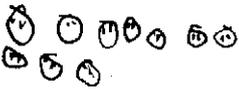
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 5

2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	6 
3 	9 
4 	12 

<p>5</p> 	<p>9 9 9 9 9 9 9 9 9</p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8</p> 	<p>10 9 9 9 9 9 9 9 9 9</p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10</p> 	<p>13 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9</p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20</p> 	<p>23 9</p>
<p>Explicación Diez diez niños y piruleta son 40, cuarenta niños son 20.</p>	

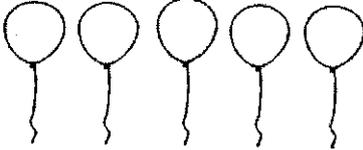


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 5

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	<i>10 globos</i>
3 	<i>8 globos</i>
4 	<i>9 globos</i>

5 niños	10 globos
...	...
8 niños	13 globos
...	...
10 niños	15 globos
...	...
20 niños	25 globos

Explicación
Cuántos globos son 40.

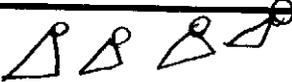


El cumpleaños de Lola

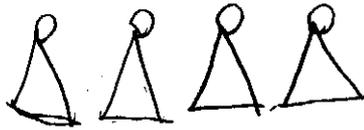
Nombre: ALUMNO 6

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

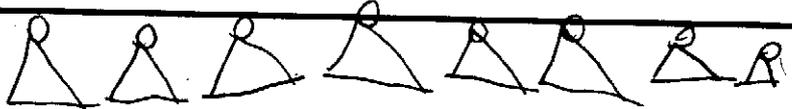
5 



mirar

...

8 



...

...

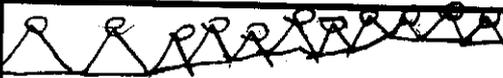
10 



...

...

20 



Explicación

bien ^{mirar} porque si bien miras

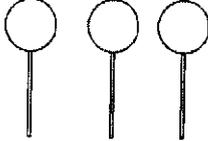


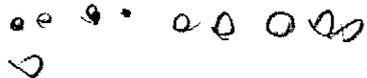
El cumpleaños de Lola

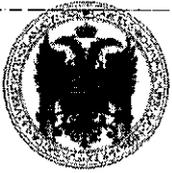
Nombre: ALUMNO 6



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	6
3 	8
4 	12

5 	72
...	...
8 	18
...	...
10 	20
...	...
20 	24
<p>Explicación <i>diez</i> dieces que componen <i>diez</i> piruletas</p>	

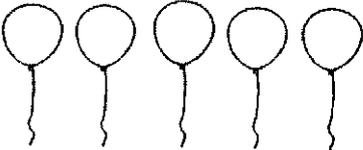


El cumpleaños de Lola

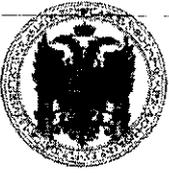
Nombre: ALUMNO 6

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	5
3 	8
4 	10

5	12
...	...
8 0 1 0 0 0 0 0 0	18
...	...
10 0 0 0 0 0 0 0 0 0	20
...	...
20 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	42
Explicación <i>en términos que comprarían globos</i>	

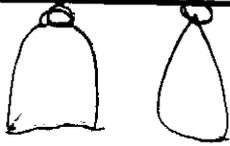


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 7

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	2 
3 	3 
4 	4 

5 	5 gorros
...	...
8 	8 gorros
...	...
10 	10 gorros
...	...
20 	20 gorros
<p>Explicación</p> <p>usted la mamá de Lola tiene que comprar 50 gorros porque usted su hija a invitado a 50 niños</p>	

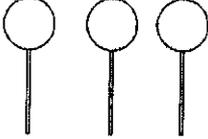


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 7

2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	6 piruletas
3 	8 piruletas
4 	17 piruletas

7

5 😊	75 piruletas
...	...
8 😊	18 piruletas
...	...
10 😊	13 piruletas
...	...
20 😊	23 piruletas

Explicación

usted la mamá de lola tiene que comprar
 23 piruletas porque lola a invitado 23
 Si son 100 niños son 103 piruletas

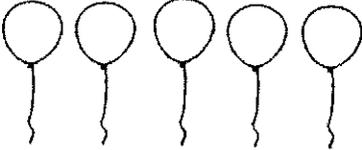


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 7

3.- Los globos

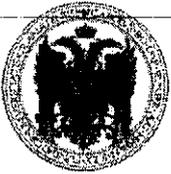


niños	globos
1 	5 
2 	10 globos
3 	15 globos
4 	20 globos

5 🍷	25 globos
...	...
8 😊	15 globos
...	...
10 😊	20 globos
...	...
20 😊	25 globos

Explicación

máma de lola tienes que comprar
25 globos y si fueran 100 niños tenerias que
comprar 105 globos



El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 8

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

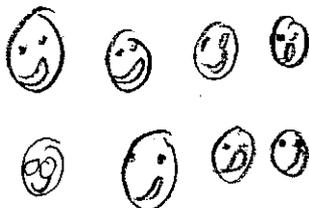
5



...

...

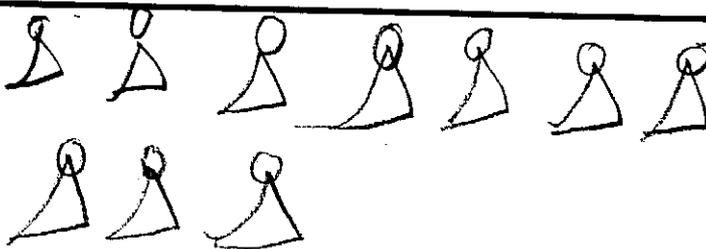
8



...

...

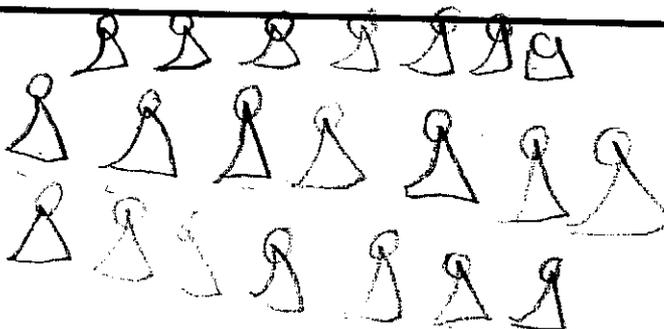
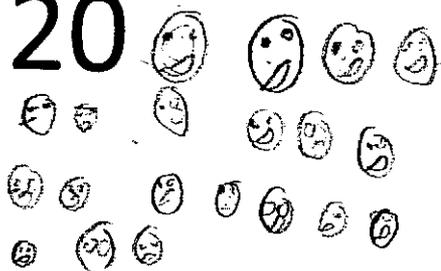
10



...

...

20



Explicación

→ usted necesita 100 cien 1 gorros

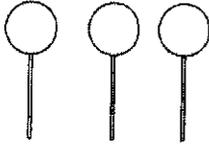
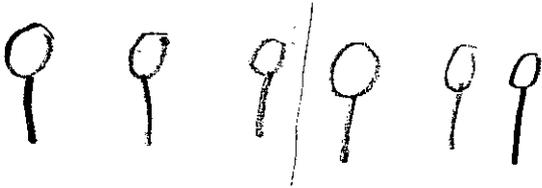
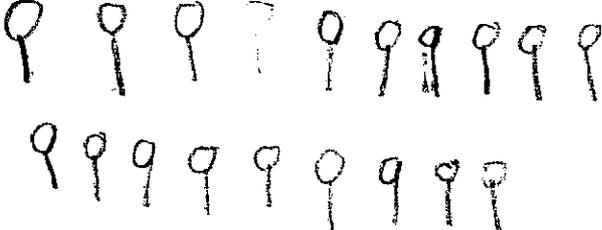


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 8



2.- Las piruletas

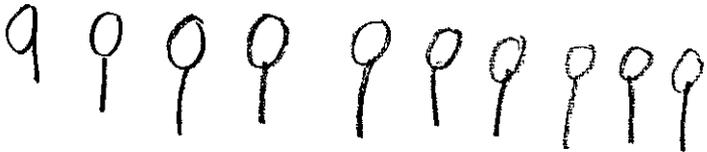
niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	
---	--

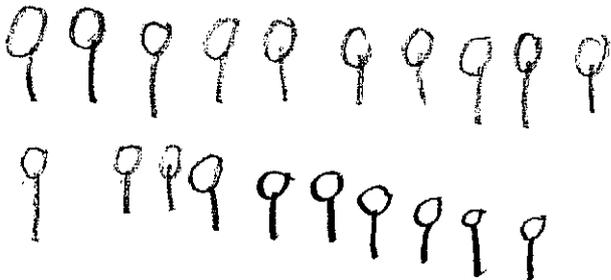
...

8	
---	--

...

10	
----	--

...

20	
----	--

Explicación

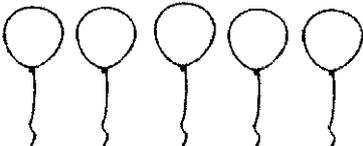
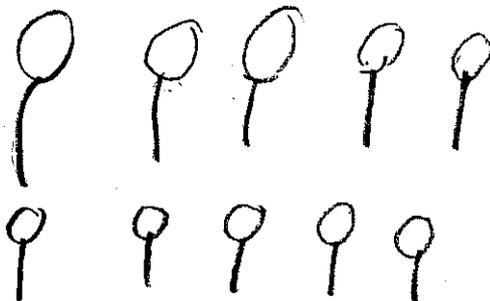


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 8

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

5	9 9 999
...	...
8	9 9 9 9 9 9 9 9
...	...
10	9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
...	...
20	9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
Explicación	

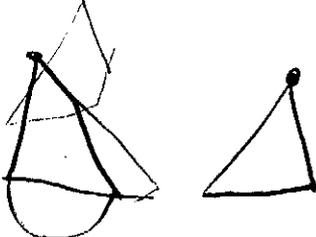
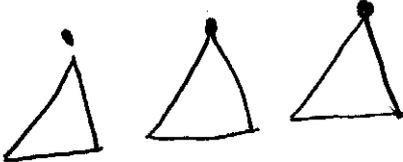
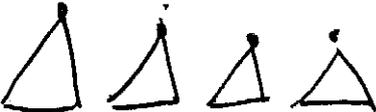


El cumpleaños de Lola

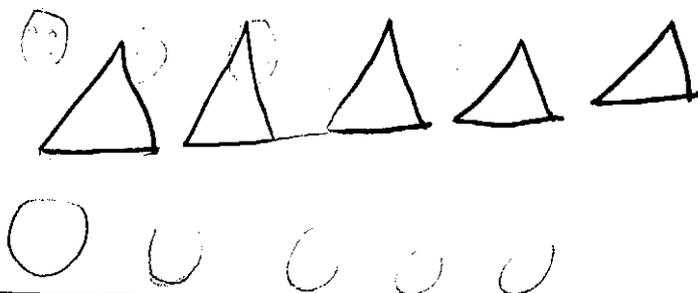
Nombre: ALUMNO 9

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1  
2 	
3 	
4 	

5



...

...

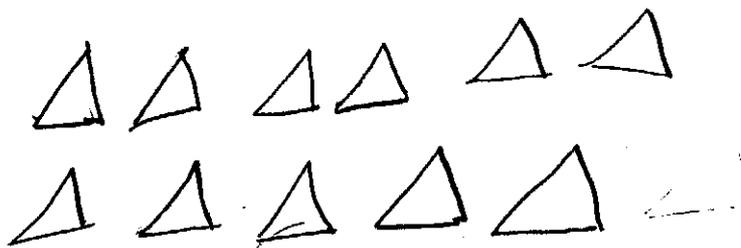
8



...

...

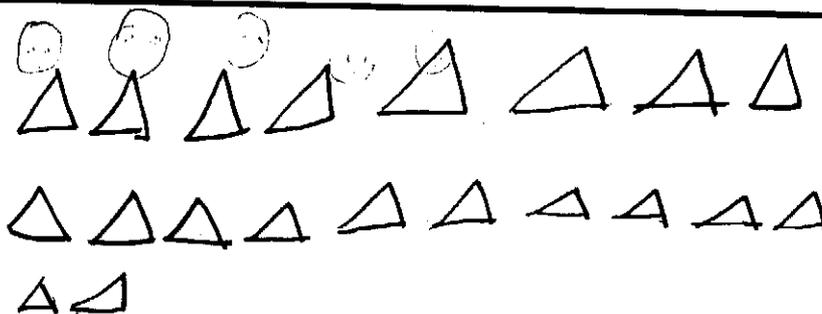
10



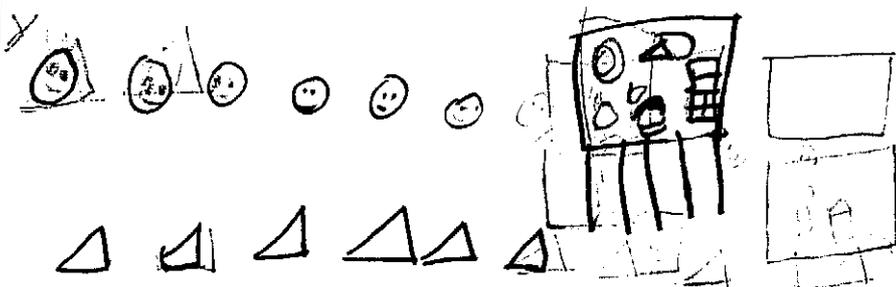
...

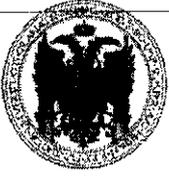
...

20



Explicación



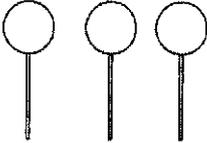
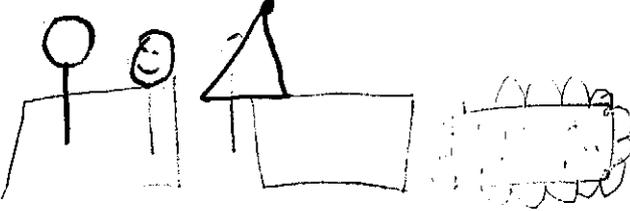
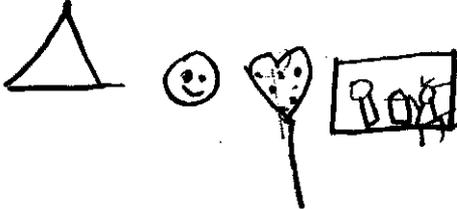


El cumpleaños de Lola

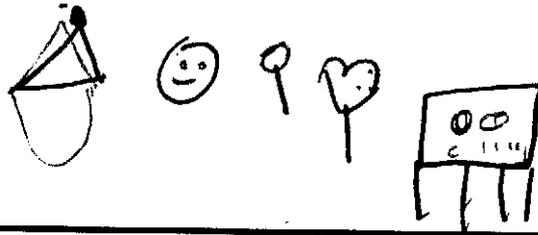
Nombre: **ALUMNO 9**



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5



...

...

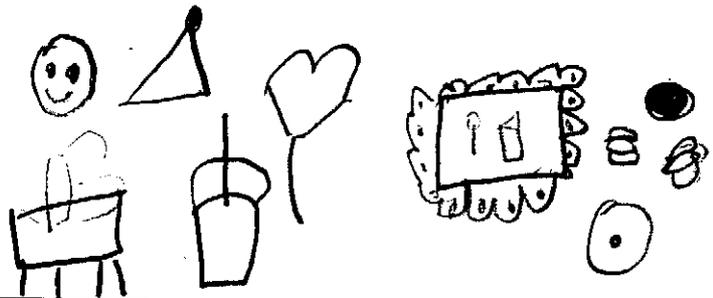
8

laura tienes que comprar
 un tren de piluletas
 de los
 de gorros piñatas

...

...

10



...

...

20

marisa tienes que comprar
 veinte piluletas
 de los piñatas

Explicación

laura tienes que comprar
 un tren de piluletas
 de los piñatas
 de

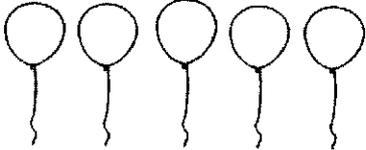
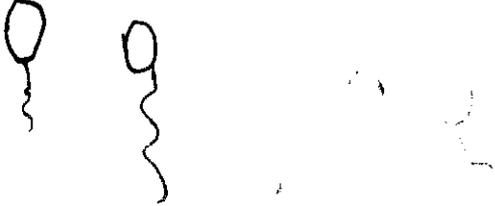
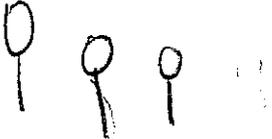


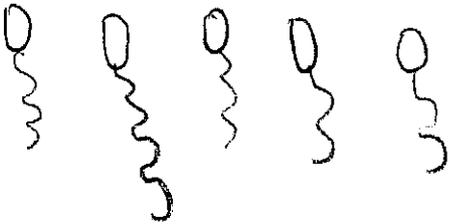
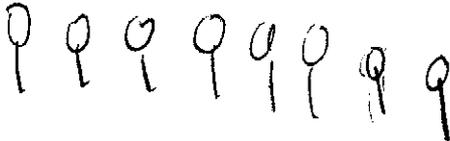
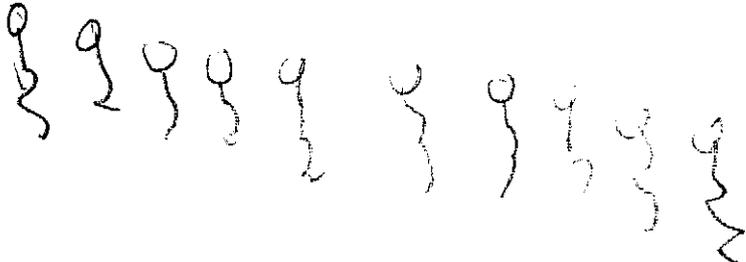
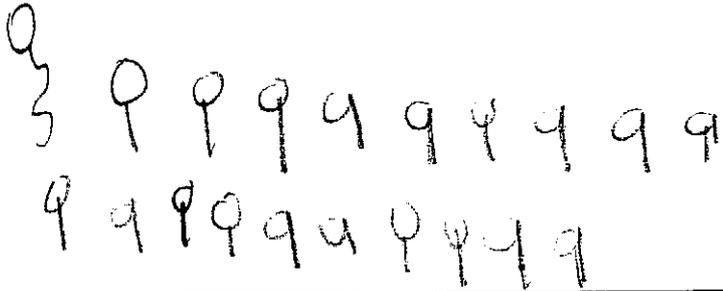
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 9

3.- Los globos

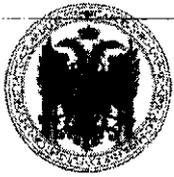


niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	

Explicación

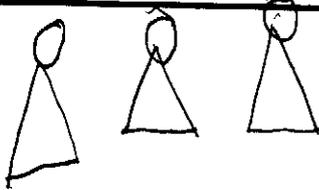
maliso tiene que copla die
glorios



El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 10

1.- Los gorros. 

niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

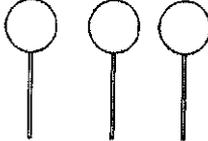
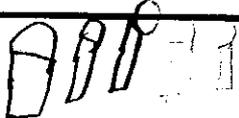


El cumpleaños de Lola

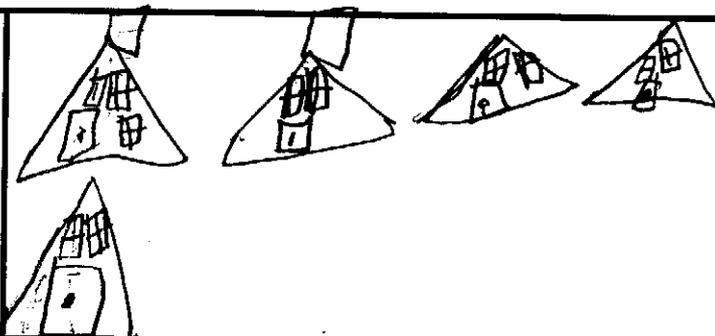
Nombre: ALUMNO 10

2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5



...

...

8



...

...

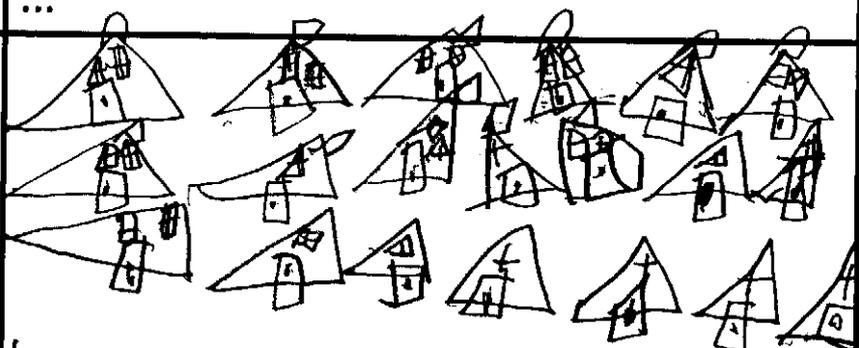
10



...

...

20



Explicación

betas

cermitas y tetraplacas

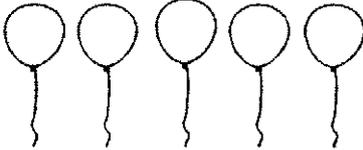


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 10

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	dieciséis globos
3 	trece globos
4 	cuatro globos

5	cinco piruletas
...	...
8	ocho piruletas
...	...
10	diez piruletas
...	...
20	veinte piruletas
Explicación	Lo que he hecho es una cuenta piruletas

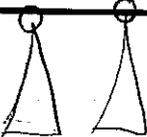
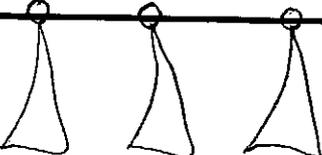
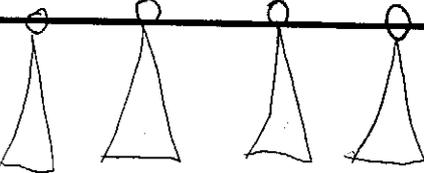


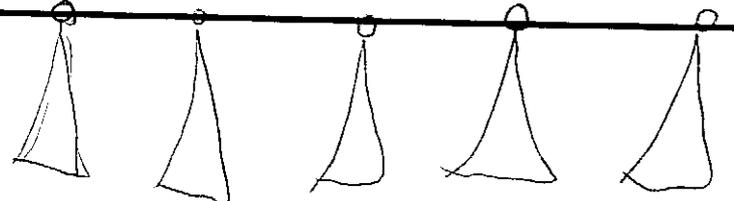
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 11**

1.- Los gorros.



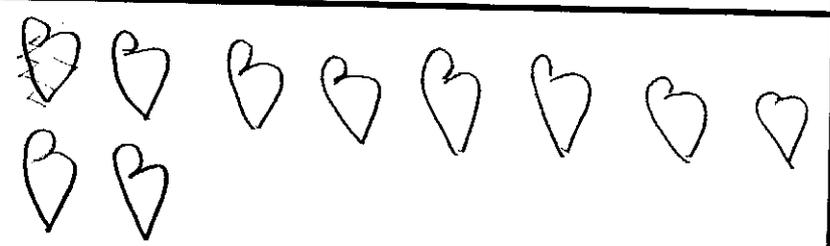
niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

5	
---	--

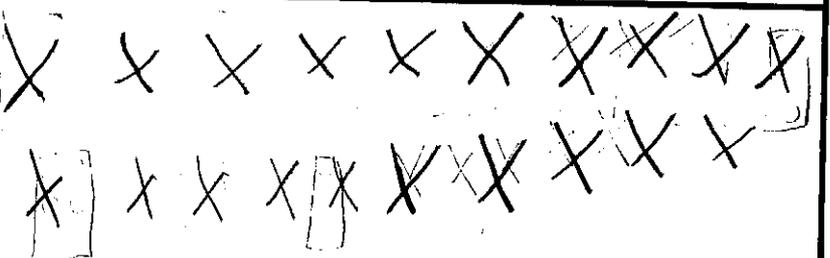
...

8	
---	--

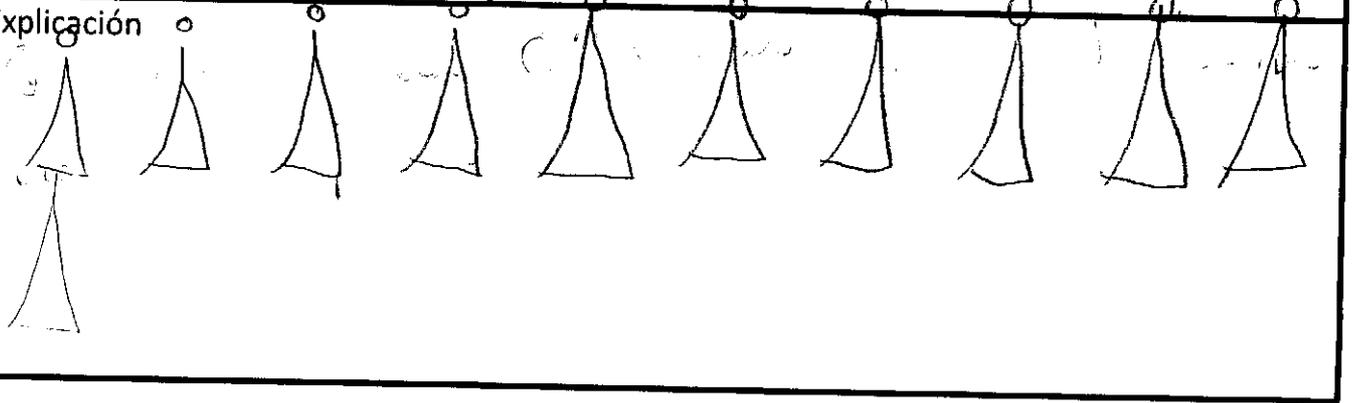
...

10	
----	--

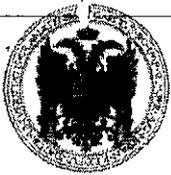
...

20	
----	--

Explicación



The diagram illustrates the construction of a triangle. It shows a horizontal line with a small circle at its left end. A vertical line segment is drawn from the circle down to a point. A diagonal line segment is drawn from the circle to the right, meeting the horizontal line. A second diagonal line segment is drawn from the point on the horizontal line to the top of the vertical line, completing the triangle. This process is repeated for several more triangles along the line.

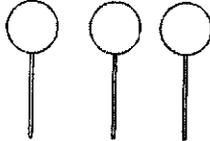
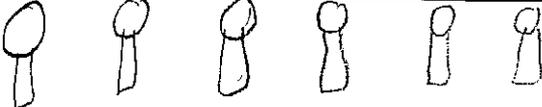
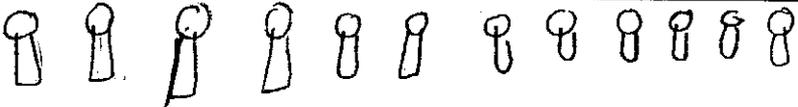


El cumpleaños de Lola

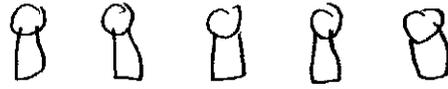
Nombre: ALUMNO 11



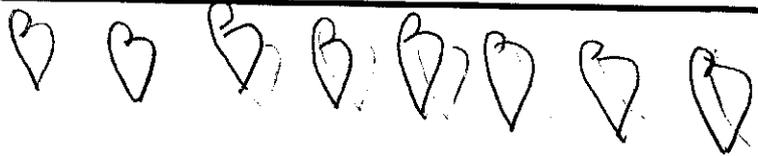
2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

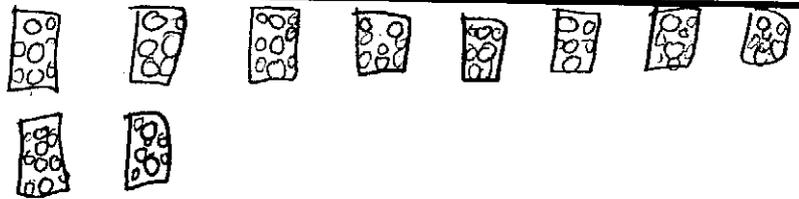
5



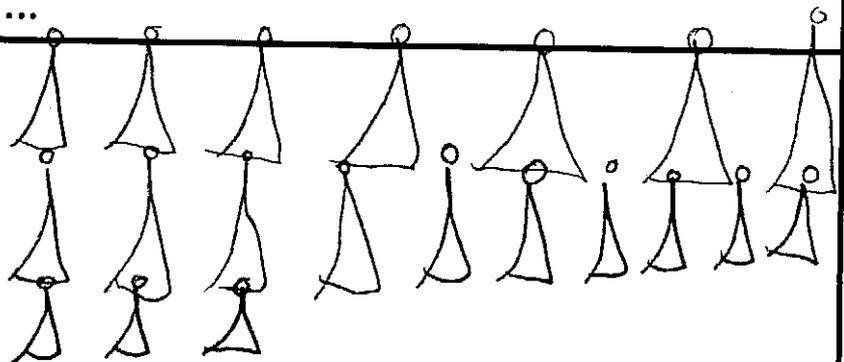
8



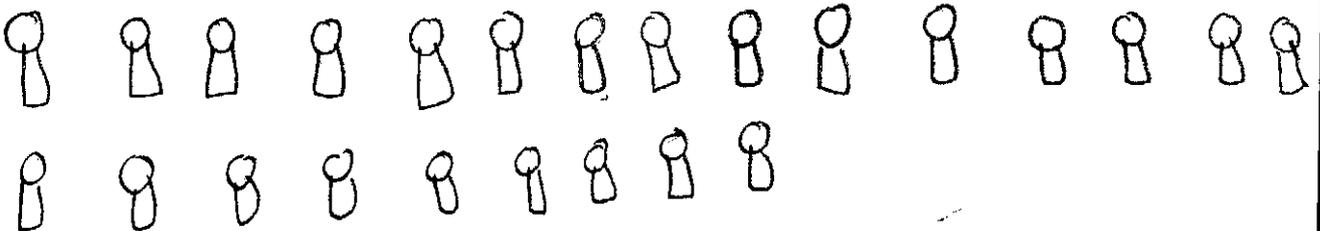
10

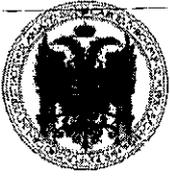


20



Explicación



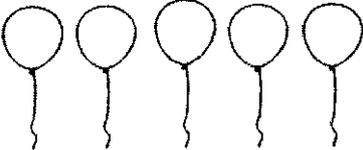


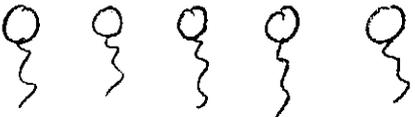
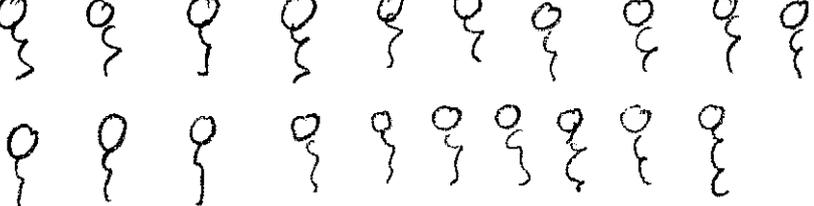
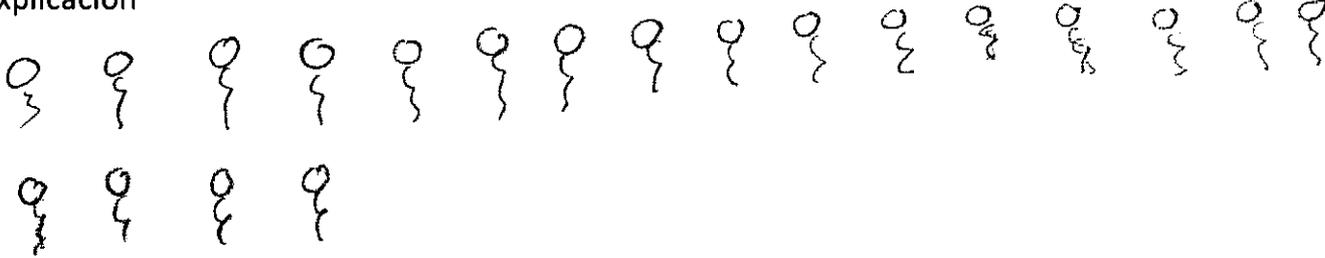
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 11

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
<p>Explicación</p> 	



El cumpleaños de Lola

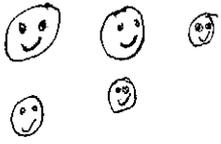
Nombre: ALUMNO 12

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	2 
3 	3 
4 	4 

5

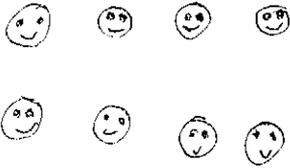


5

...

...

8



8

...

...

10

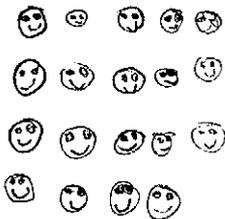


10

...

...

20



20

Explicación

Señora tiene que comprar cien
galletas. Porque Lola le invitado a esos
niños.

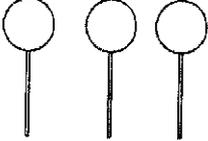
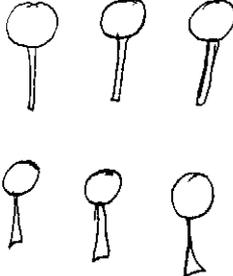
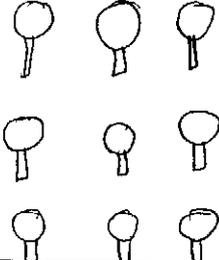
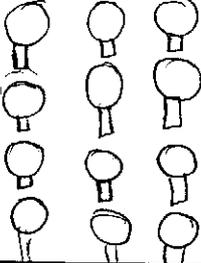


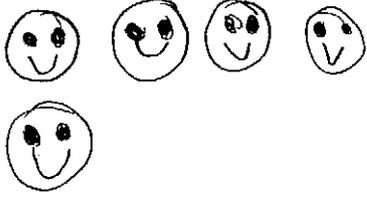
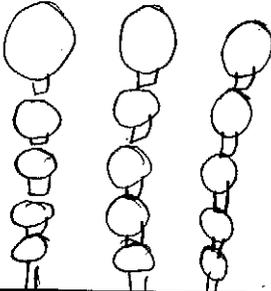
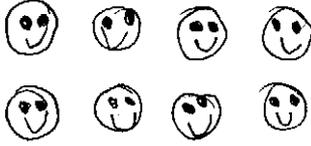
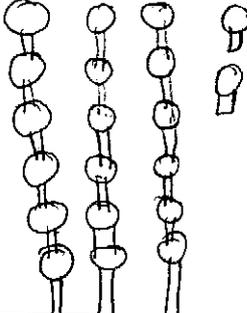
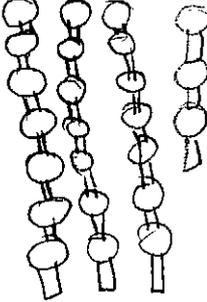
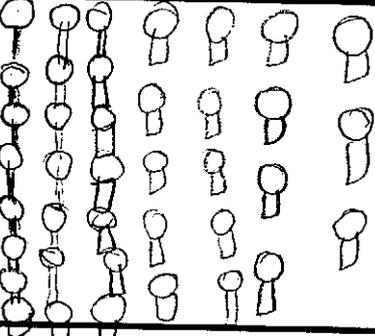
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 12



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

<p>5</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20</p> 	

Explicación

Señorco tiene que comprar cien
 piruletas. Porque Lola se invitado
 a esos niños.



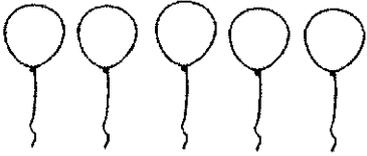
El cumpleaños de Lola

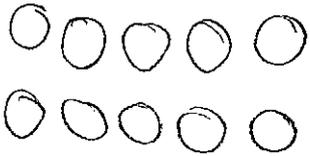
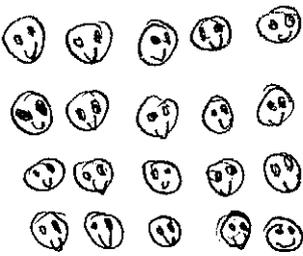
Nombre: _____

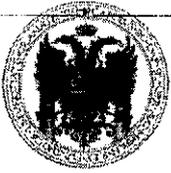
ALUMNO 12

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	$5 + 5 = 10$
3 	$5 + 5 + 5 = 15$
4 	$5 + 5 + 5 + 5 = 20$

5 	$5+5+5+5+5=25$
...	...
8 	$5+5+5+5+5+5=45$
...	...
10 	$5+5+5+5+5+5+5=55$
...	...
20 	$5+5+5+5+5+5+5+5=40$
Explicación Señora tiene que comprar cien globos. Porque Lola a invitado a esos niños.	



El cumpleaños de Lola

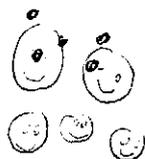
Nombre: **ALUMNO 13**

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

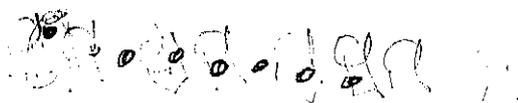
5



...

...

8



...

...

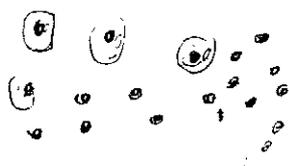
10



...

...

20



Explicación

gentosa calma 20

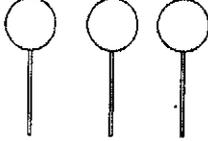


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 13



2.- Las piruletas

niños	piruletas
<p>1 </p>	<p>3 </p>
<p>2 </p>	
<p>3 </p>	
<p>4 </p>	

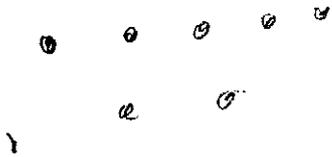
5



...

...

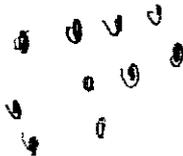
8



...

...

10



...

...

20

Explicación

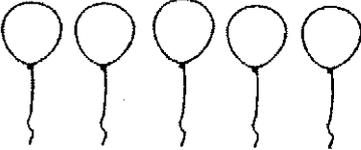


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 13

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
Explicación	



El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 14

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2  	 
3   	  
4    	   

5 

5 gorros

...

...

8 

8 gorros

...

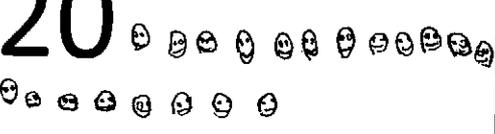
...

10 

10 gorros

...

...

20 

20 gorros

Explicación

100 20 gorros

Francisco quiere ir a su fiesta con 100 niños y 100 gorros. Porque quiere ir con muchos niños a su fiesta.

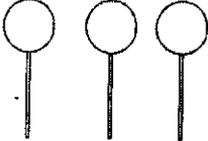
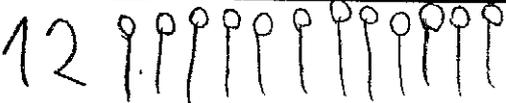


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 14



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	6 
3 	9 
4 	12 

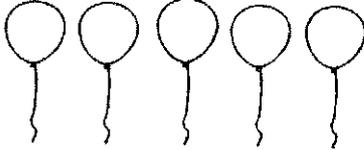
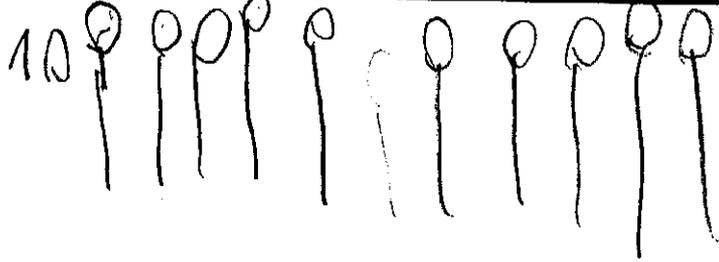
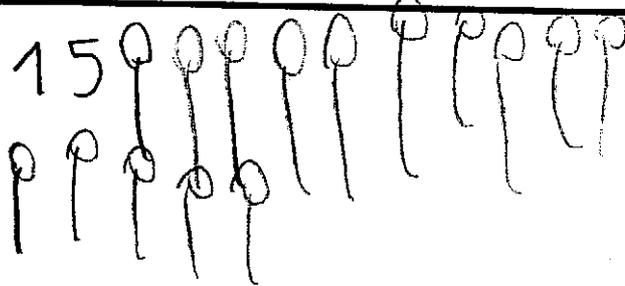
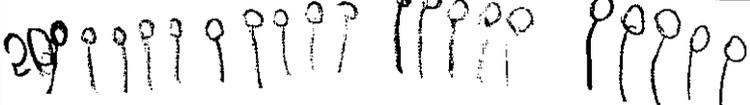


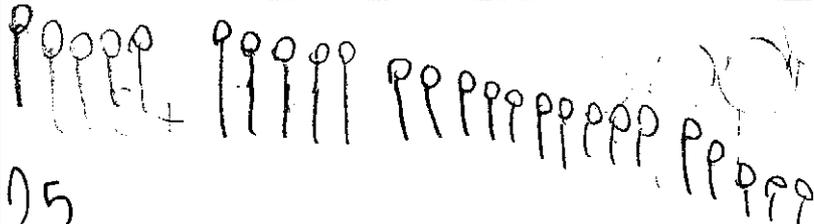
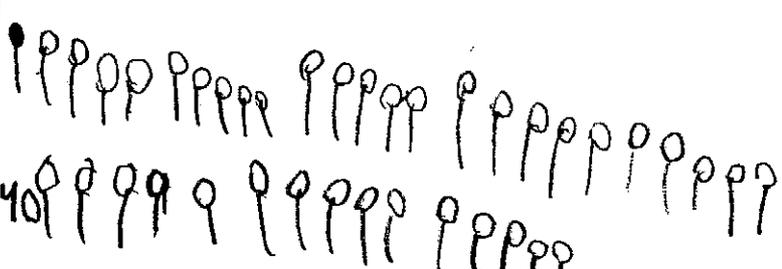
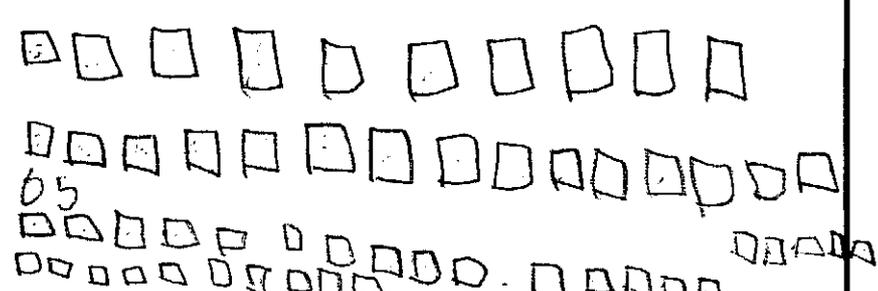
El cumpleaños de Lola

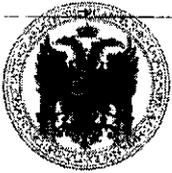
Nombre: ALUMNO 14

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	10 
3 	15 
4 	20 

<p>5 ○○○○○○</p>	<p>  25 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8 ○○○○○○○○</p>	<p>  40 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10 ○○○○○○○○ ○○○○○</p>	<p>  50 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20 ○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○</p>	
<p>Explicación</p>	

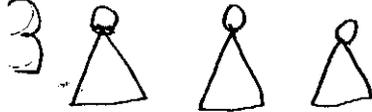


El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 15**

1.- Los gorros.

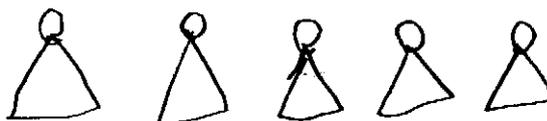


niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	3 
4 	4 

5



5



...

...

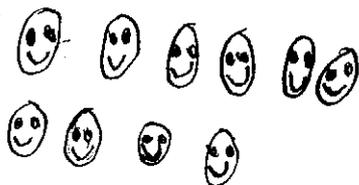
8



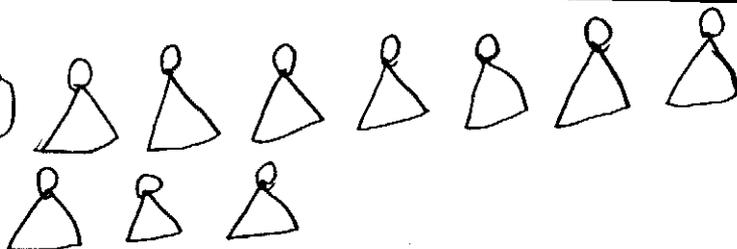
...

...

10



10



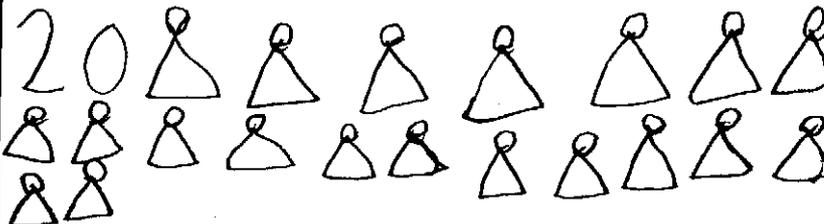
...

...

20

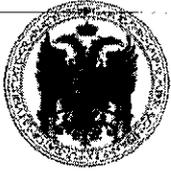


20



Explicación

Es el cumpleaños de Juan y vamos a venir 20 niños entonces necesitamos 20 gorros

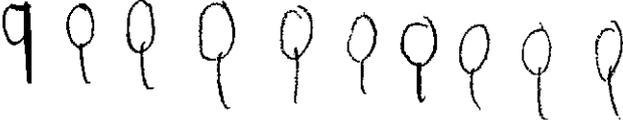
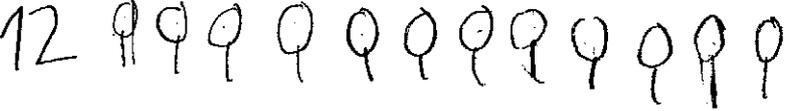


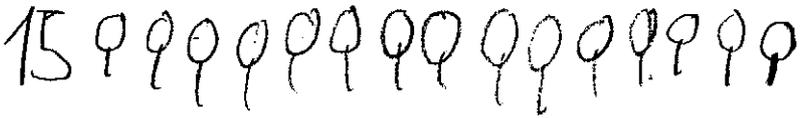
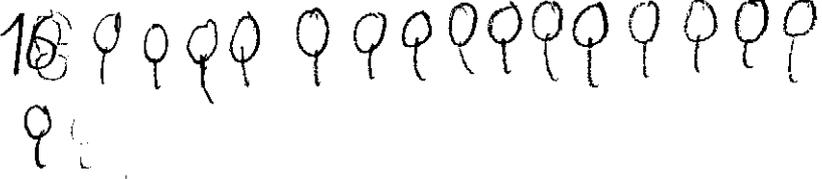
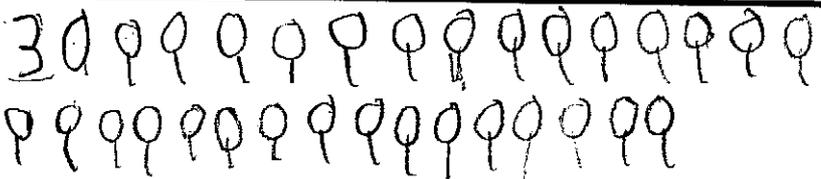
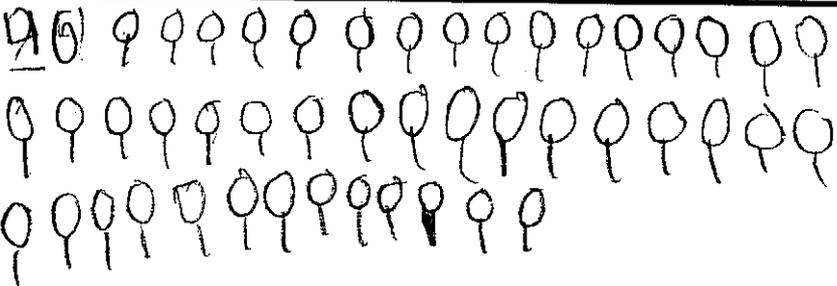
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 15

2.- Las piruletas

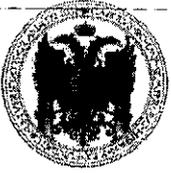


niños	piruletas
1 	3 
2 	6 
3 	9 
4 	12 

<p>5 </p>	<p>15 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8 </p>	<p>16 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10 </p>	<p>30 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20 </p>	<p>60 </p>

Explicación

Es el cumpleaños de David y hay 100 niños necesita 103

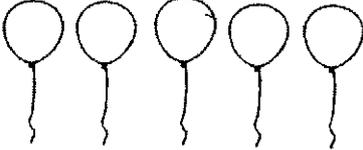
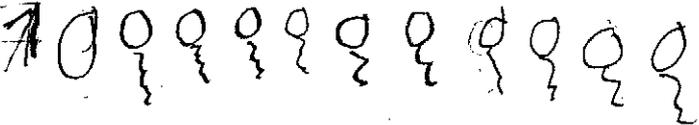
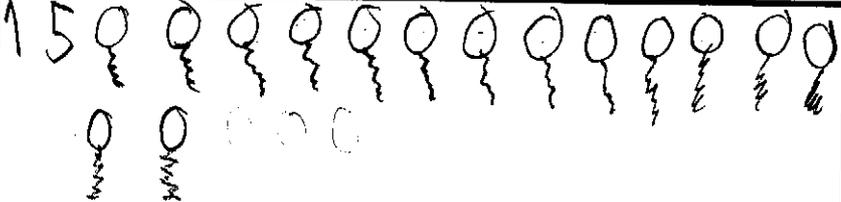
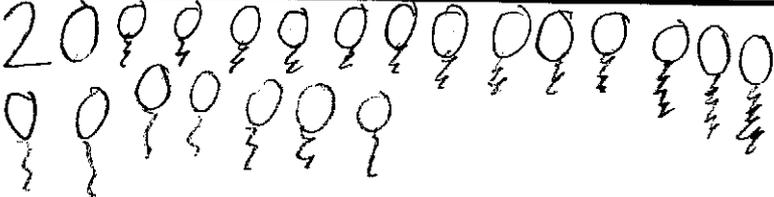


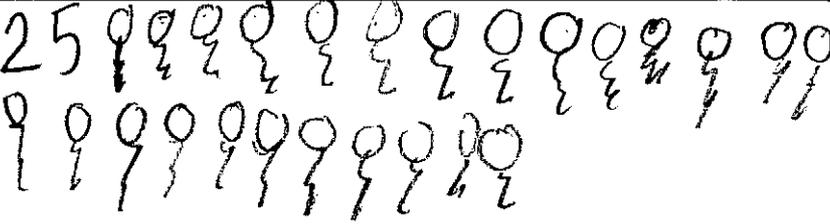
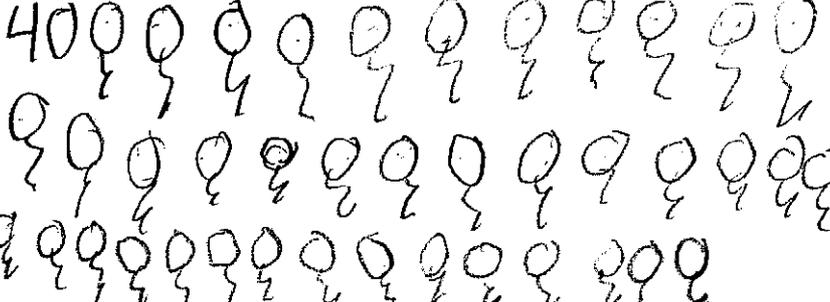
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 15

3.- Los globos



niños	globos
<p>1 </p>	<p>5 </p>
<p>2 </p>	<p>10 </p>
<p>3 </p>	<p>15 </p>
<p>4 </p>	<p>20 </p>

<p>5 </p>	<p>25 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8 </p>	<p>40 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10 </p>	<p>50 </p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20 </p>	<p>60 </p>

Explicación Es el cumpleaños de Julia y van 100 niños y tiene que comprar 105 globos.

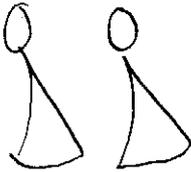


El cumpleaños de Lola

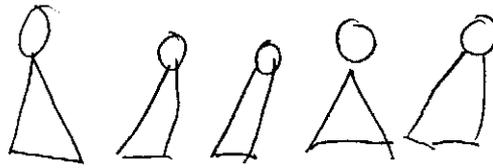
Nombre: ALUMNO 16

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

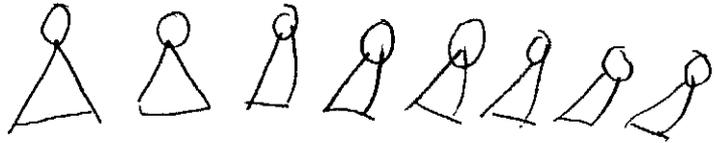
5



...

...

8



...

...

10



...

...

20



Explicación

vez necesita 100 garros.

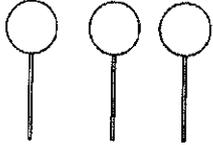


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 16



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	9
...	...
8	10
...	...
10	11
...	...
20	19

Explicación

ntoz tiene que con plax 100
poculetas

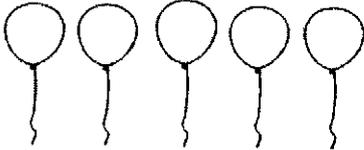


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 16

3.- Los globos

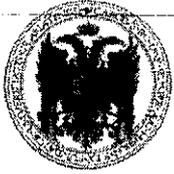


niños	globos
1 	5 
2 	10
3 	8
4 	20

5	6
...	...
8	7
...	...
10	14
...	...
20	21

Explicación

Utae tiene que comprar 100 globos

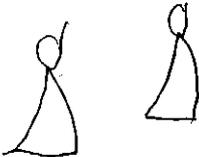
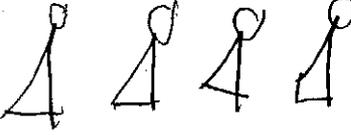


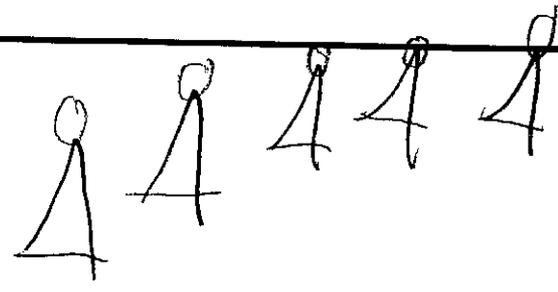
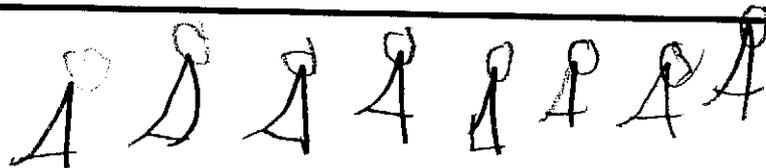
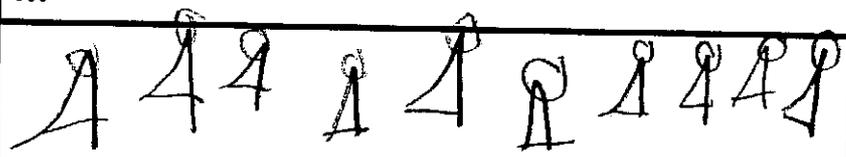
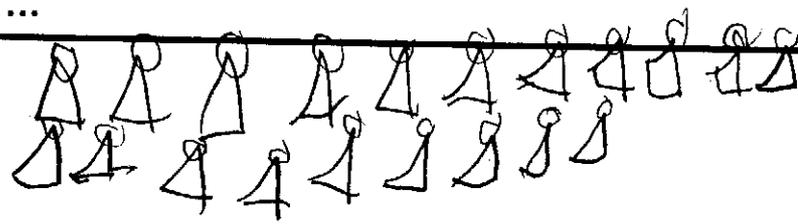
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 17

1.- Los gorros.

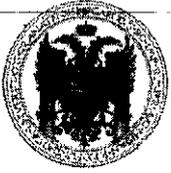


niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	

Explicación

100

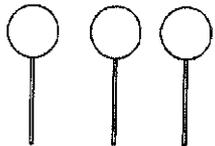
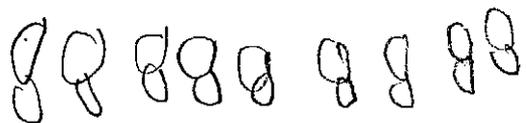
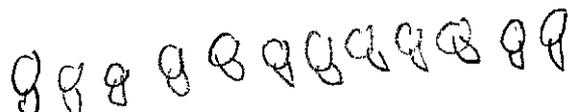


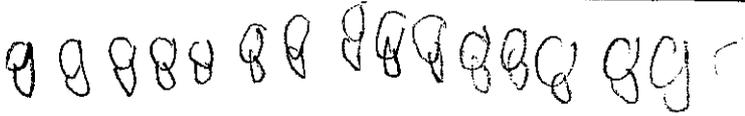
El cumpleaños de Lola

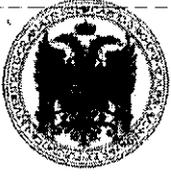
Nombre: AUNNO 17



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
<p>Explicación</p> <p>100</p>	

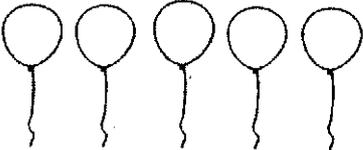


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 17

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	10
3 	15
4 	20

5	60
...	...
8	70
...	...
10	80
...	...
20	90
Explicación	
100	

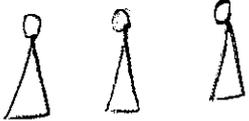


El cumpleaños de Lola

Nombre: **AWANO 18**

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

5



...

...

8



...

...

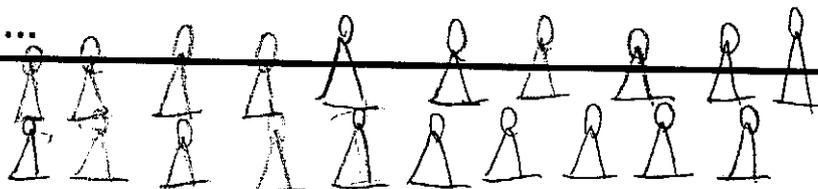
10



...

...

20



Explicación

mamá
gustos

usted tiene que comprar cien

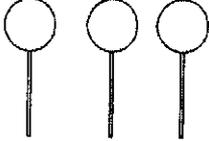
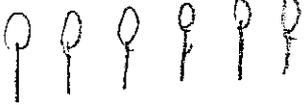


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 18



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

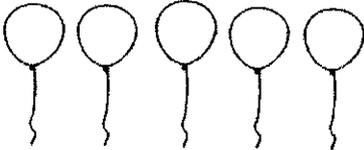


El cumpleaños de Lola

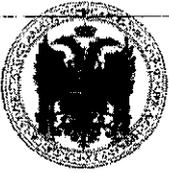
Nombre: ALUMNO 18

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	10
3 	20
4 	30

5	60
...	...
8	70
...	...
10	20
...	...
20	10
Explicación	



El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 19

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	2
3 	3
4 	4

5	5
...	...
8	8
...	...
10	10
...	...
20	20
Explicación Mama ested tien que comprar cien gorros.	

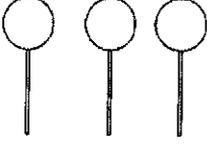
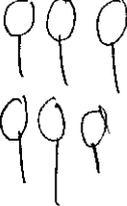
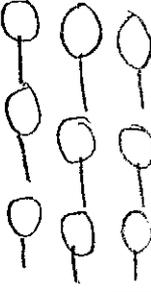
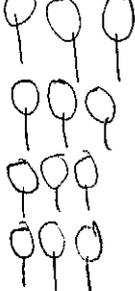


El cumpleaños de Lola

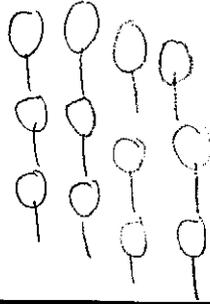
Nombre: ALUMNO 19



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

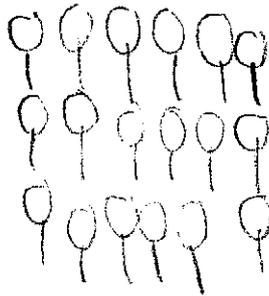
5



...

...

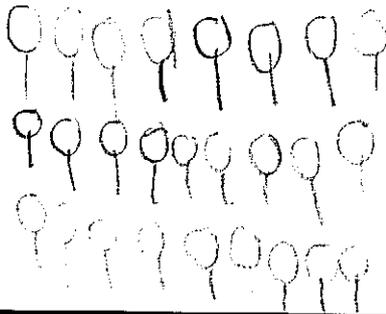
8



...

...

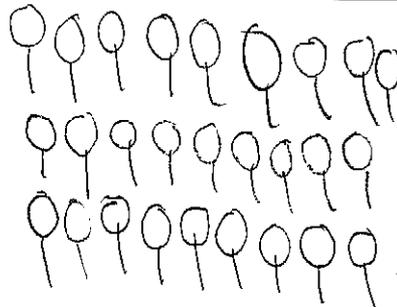
10



...

...

20



Explicación

Mama usted tiene que comprar
cien piruletas.

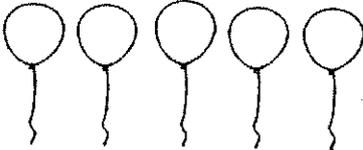


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 19

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	10
3 	20
4 	30

5	40
...	...
8	60
...	...
10	70
...	...
20	80

Explicación

Mama usted tiene que comprar
cien globos



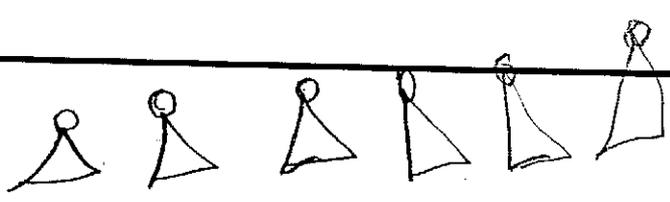
El cumpleaños de Lola

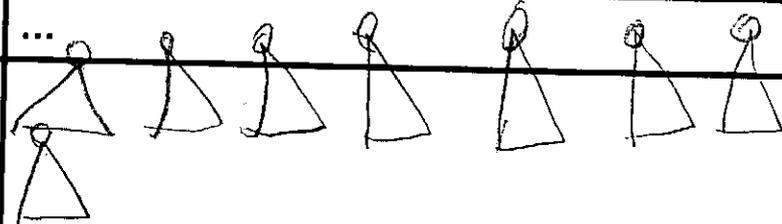
Nombre: ALUMNO 20

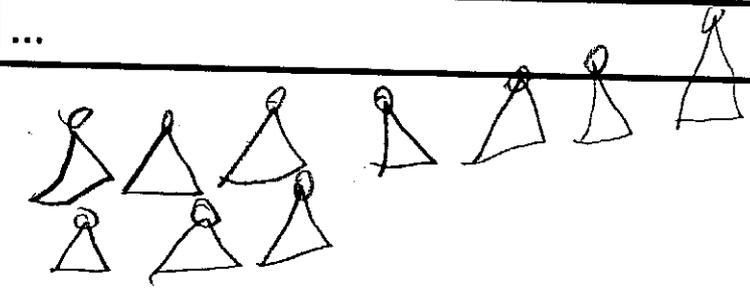
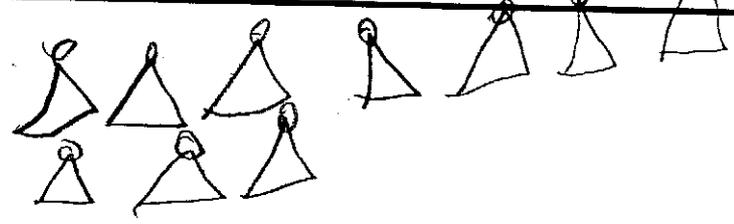
1.- Los gorros.

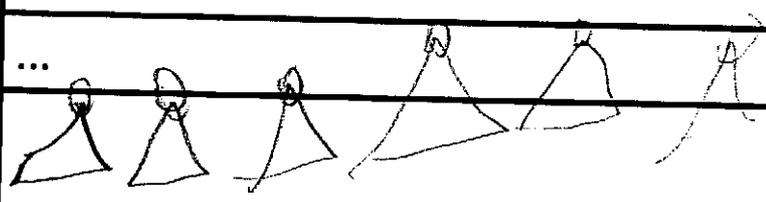
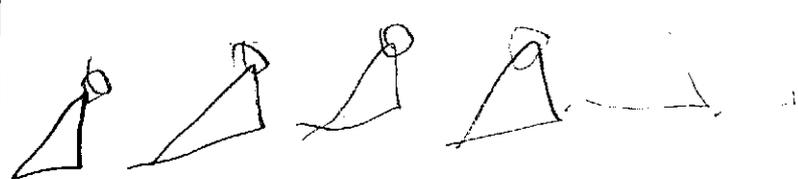


niños	gorros
1 	1 
2  	2  
3   	3   
4    	4    

5	
---	--

...	
8	

...	
10	

...	
20	

Explicación *que en cada una 10 de 2*

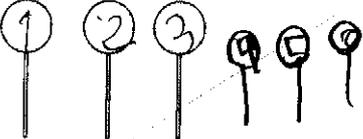


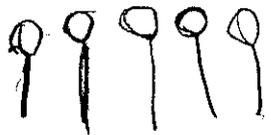
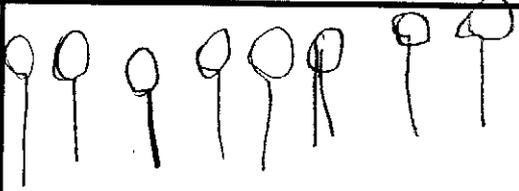
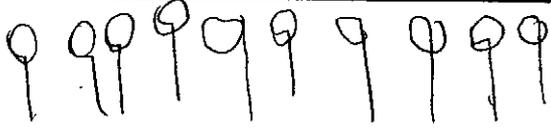
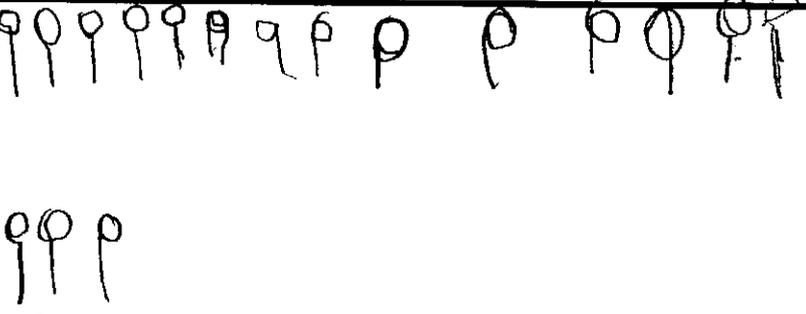
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 20**



2.- Las piruletas

niños	piruletas
<p>1 </p>	<p>3 </p>
<p>2 </p>	<p></p>
<p>3 </p>	<p></p>
<p>4 </p>	<p></p>

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	

Explicación

Quince y diez *10009*

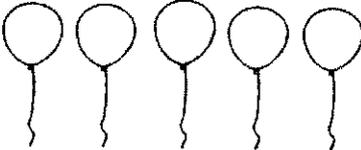


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 20

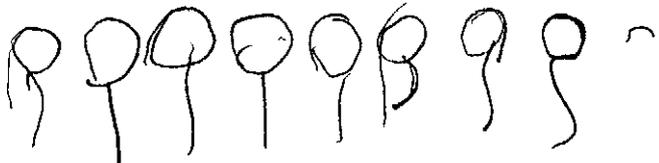
3.- Los globos



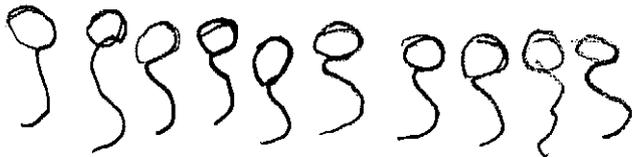
niños	globos
1 	5 
2 	10
3 	10
4 	10

5	
---	--

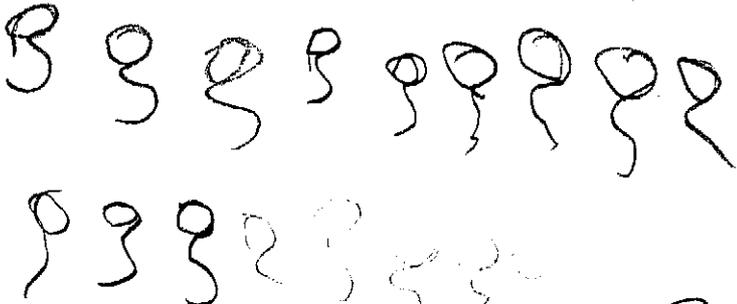
... ..

8	
---	--

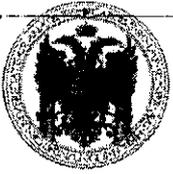
... ..

10	
----	--

... ..

20	
----	--

Explicación que repete el número 100009

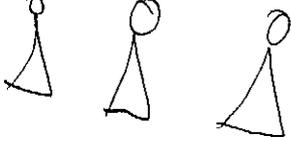
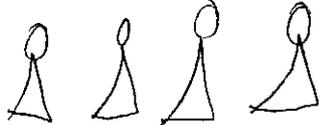


El cumpleaños de Lola

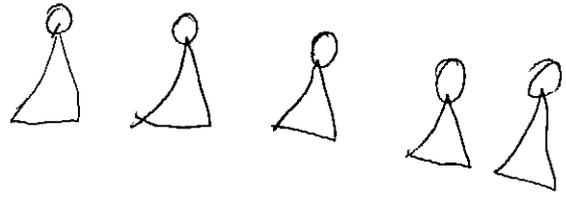
Nombre: ALUMNO 21

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

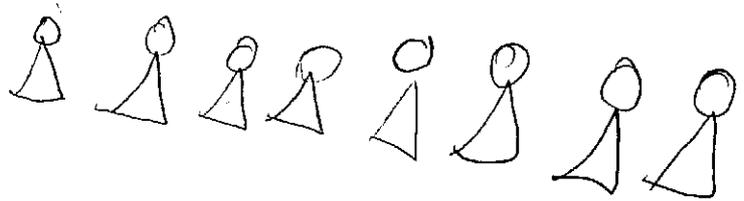
5



...

...

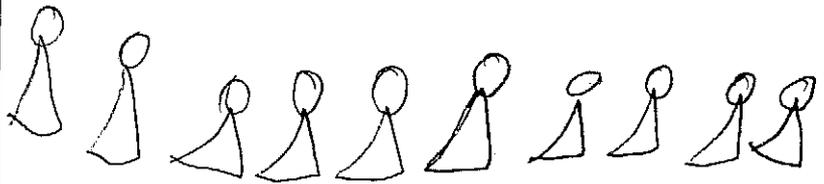
8



...

...

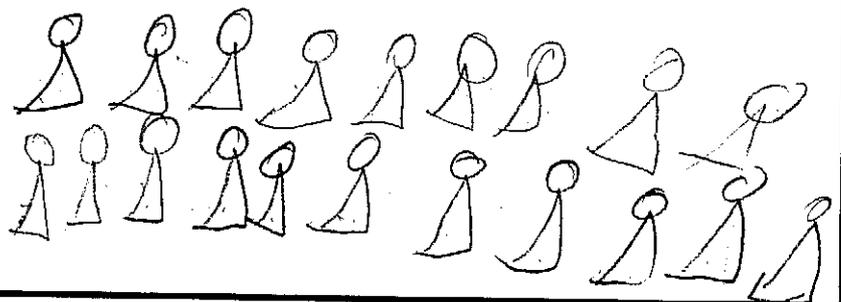
10



...

...

20



Explicación



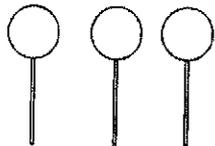
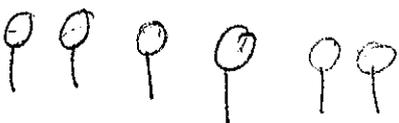
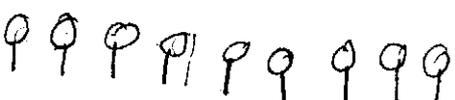


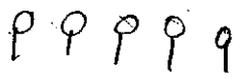
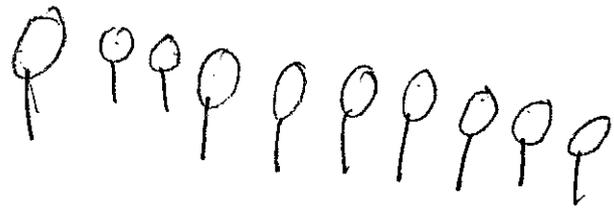
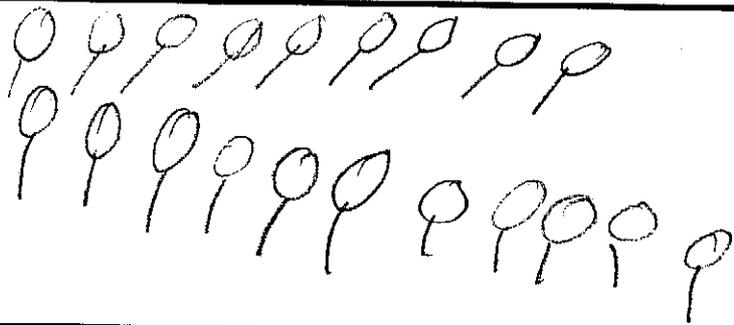
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 21



2.- Las piruletas

niños	piruletas
<p>1 </p>	<p>3 </p>
<p>2 </p>	<p></p>
<p>3 </p>	<p></p>
<p>4 </p>	<p></p>

<p>5</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20</p> 	
<p>Explicación</p>	

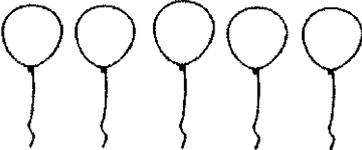


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 21

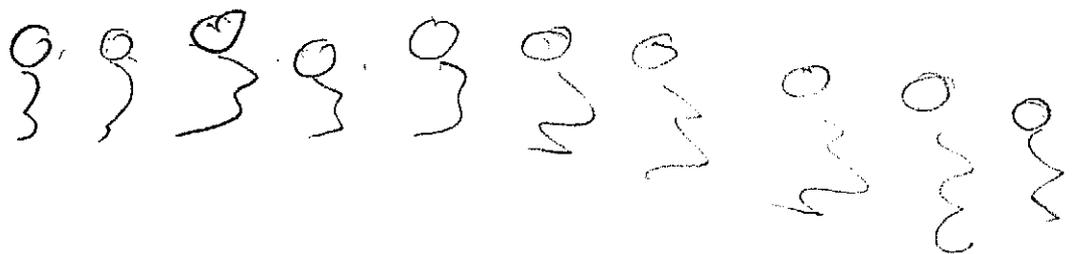
3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	10
3 	15
4 	15

5	40
...	...
8	30
...	...
10	100
...	...
20	40

Explicación





El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 22**

1.- Los gorros. 

niños	gorros
1 	1 
2  	 
3   	  
4    	   

5
...	...
8
...	...
10
...	...
20
<p>Explicación</p> <p>mama us tetinequecon por 100</p>	

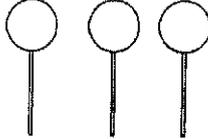


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNA 22



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

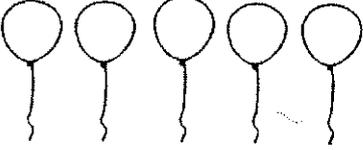
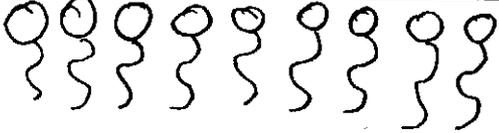
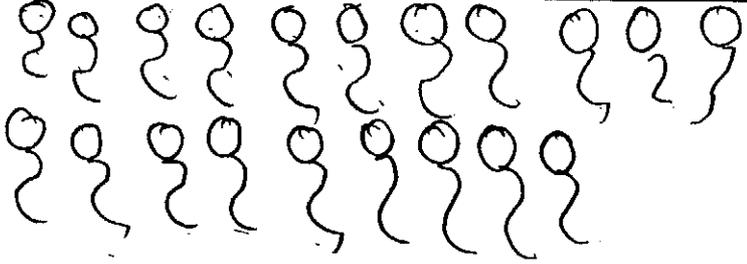
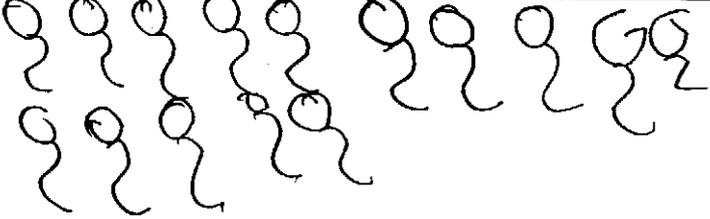


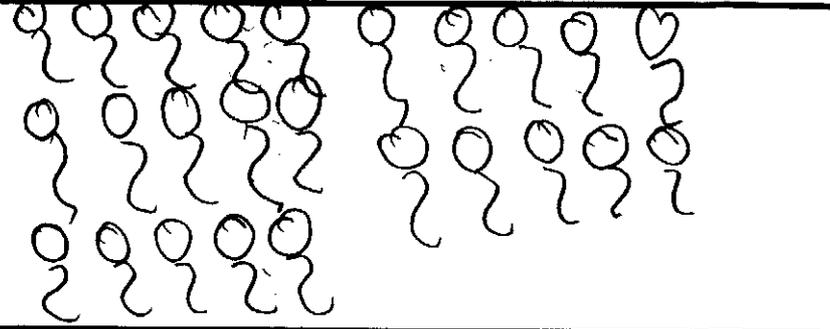
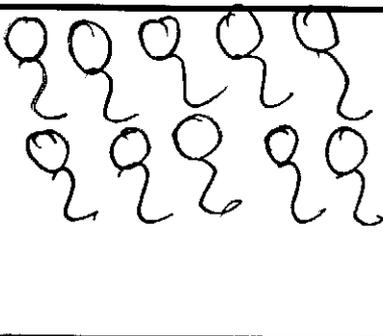
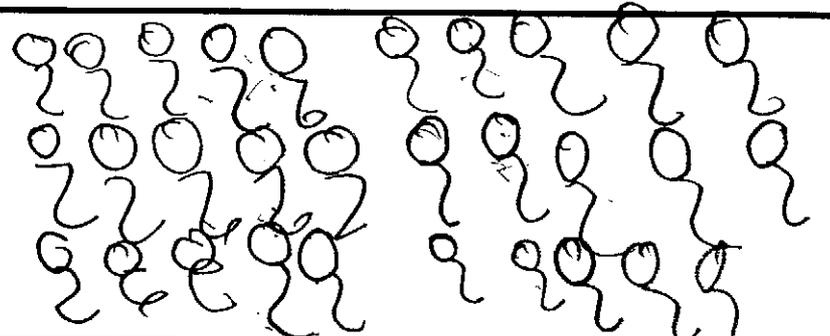
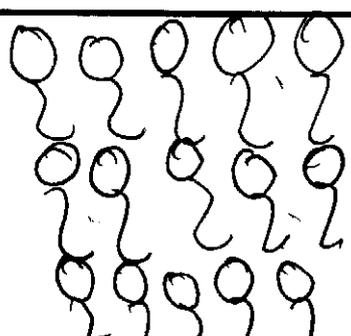
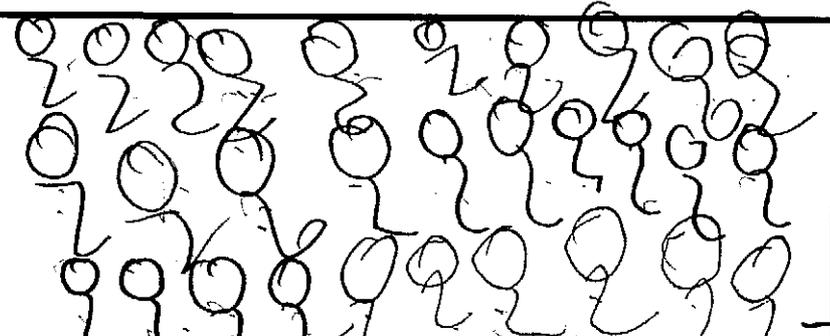
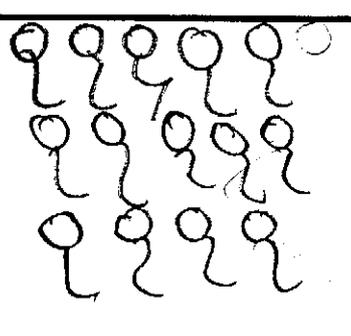
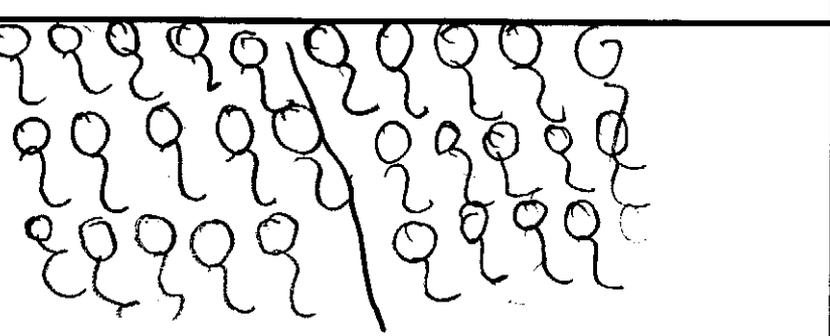
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 22**

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

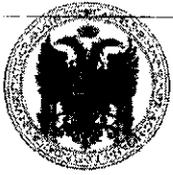
<p>5</p>	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20</p> 	

Explicación

Handwritten cursive letters 'i', 'i', 'i', 'i', 'i'.

20

Handwritten cursive letters 'i', 'i', 'i', 'i', 'i' repeated in a grid pattern.



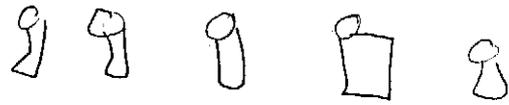
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 23**

1.- Los gorros. 

niños	gorros
1 	1 
2 	2 
3 	3 
4 	4 

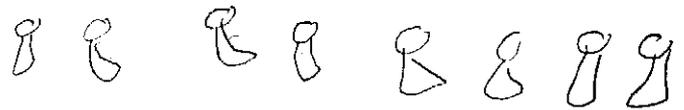
5



...

...

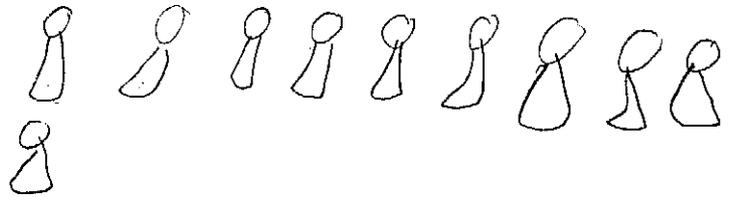
8



...

...

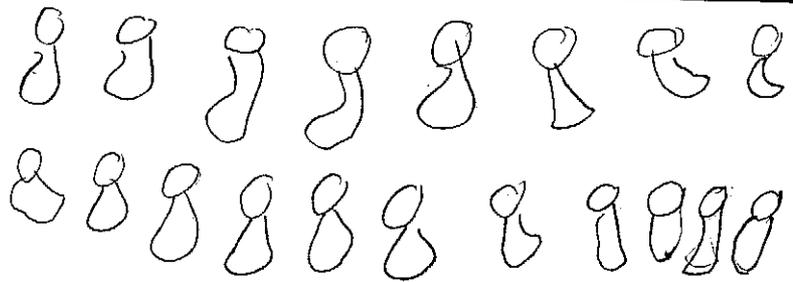
10



...

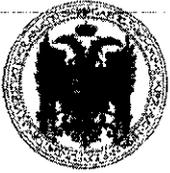
...

20



Explicación

cien gusanos

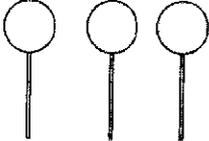
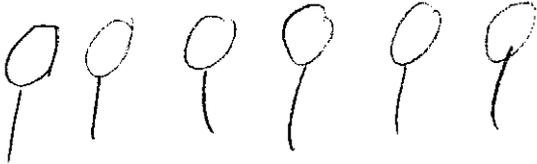
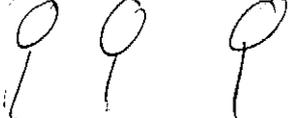


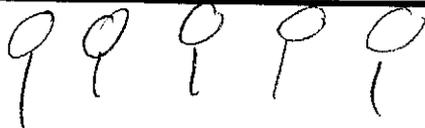
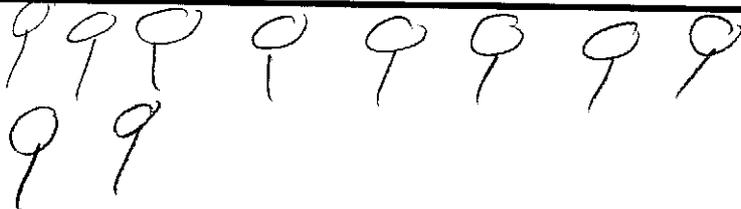
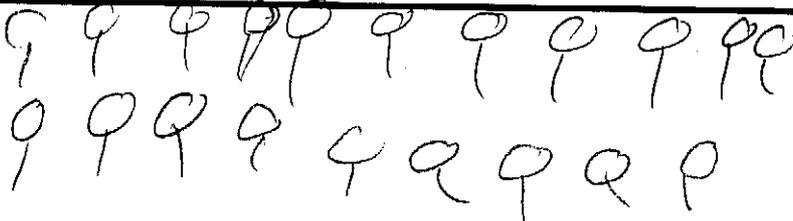
El cumpleaños de Lola

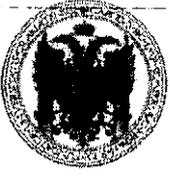
Nombre: ALUMNO 23



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
<p>Explicación</p>	

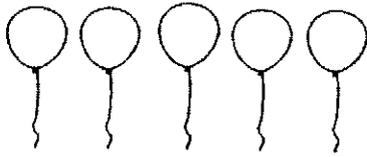
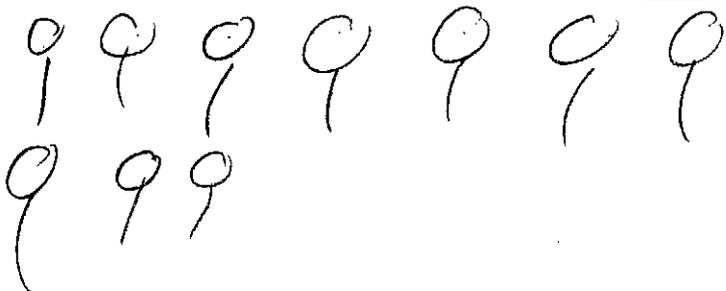
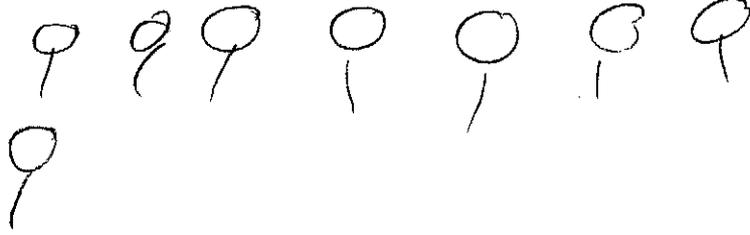


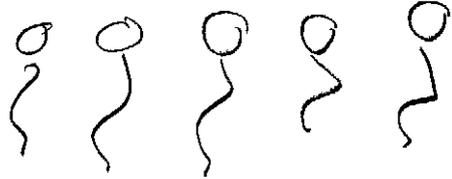
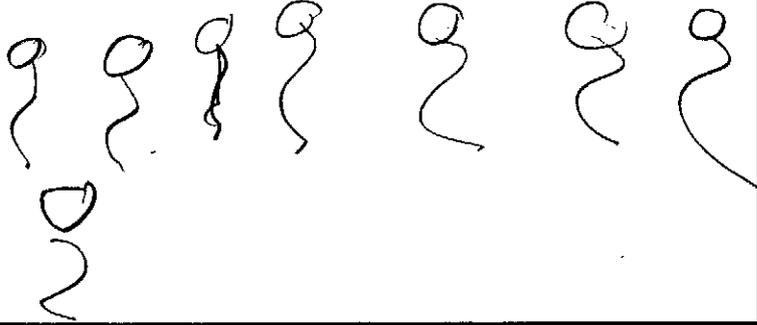
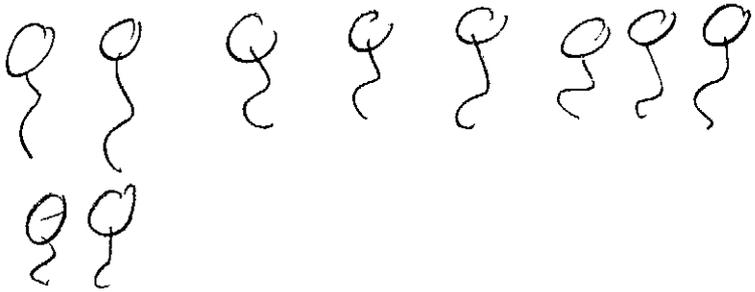
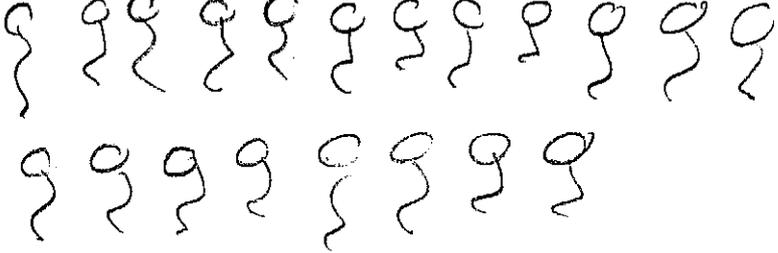
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALVARO 23

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	

Explicación

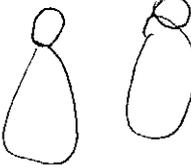
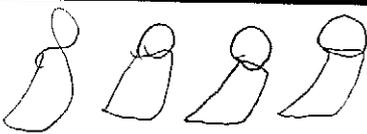


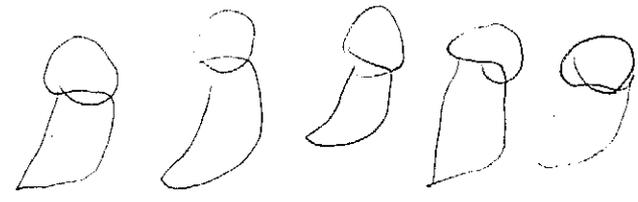
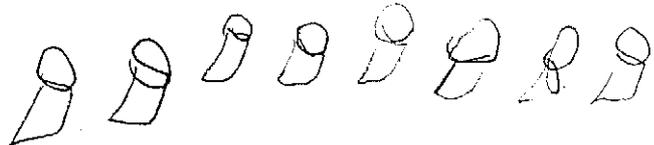
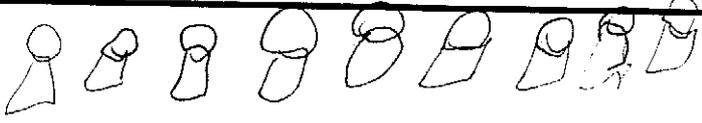
El cumpleaños de Lola

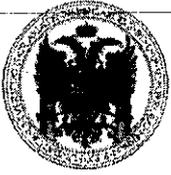
Nombre: ALUMNO 24

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
<p>Explicación</p> 	

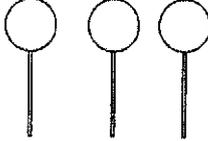
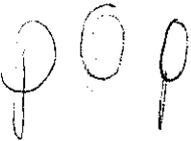


El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 24**



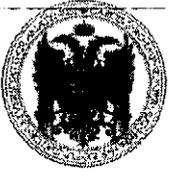
2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	qqqqq?
...	...
8	pppppppppp
...	...
10	pppppppppp
...	...
20	pppppppppp pppppppp

Explicación

100 PIRULETAS

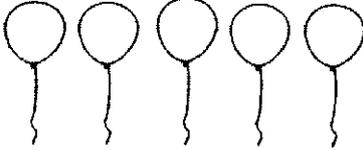
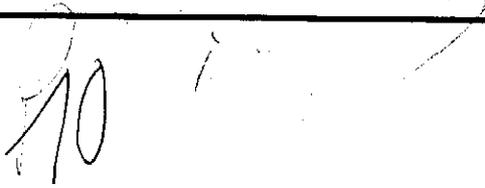


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 24

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

5	ggggg
...	...
8	gggggggg
...	...
10	gggggggggg
...	...
20	gggggggggggggggg gg
<p>Explicación</p> <p>MAMÁ compra ciencias</p> <p>2000</p>	



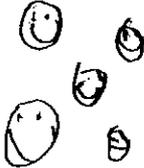
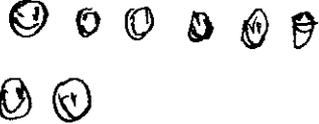
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 25**

1.- Los gorros.

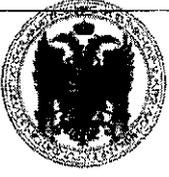


niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

<p>5</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20</p> 	

Explicación

señalatiendo ~~señalatiendo~~ fulcra y giro

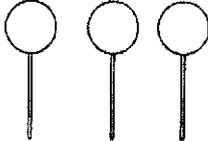
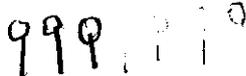
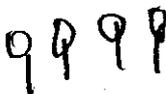


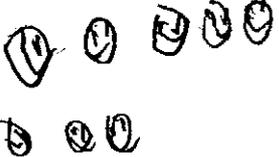
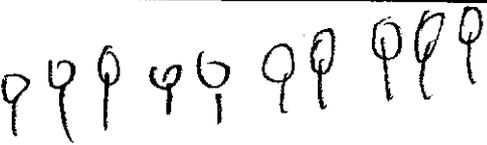
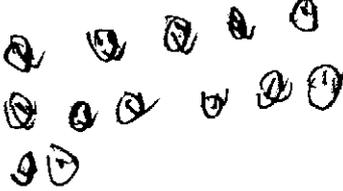
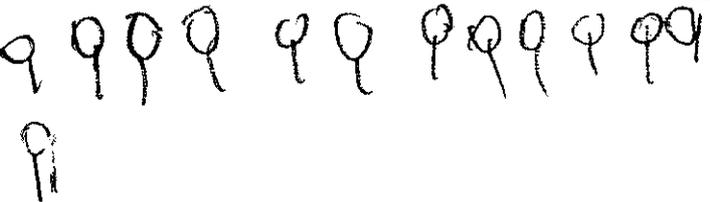
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 25



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

<p>5 </p>	<p></p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8 </p>	<p></p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10 </p>	<p></p>
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20 </p>	<p></p>

Explicación

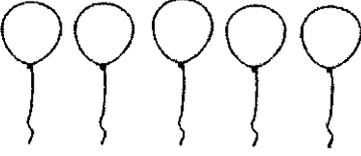
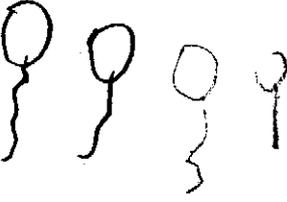
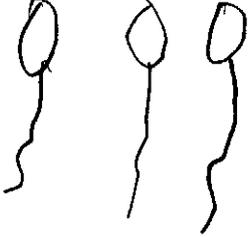
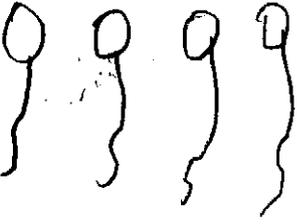


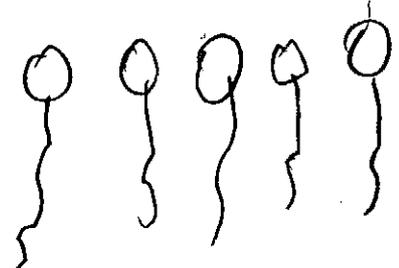
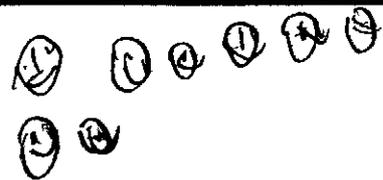
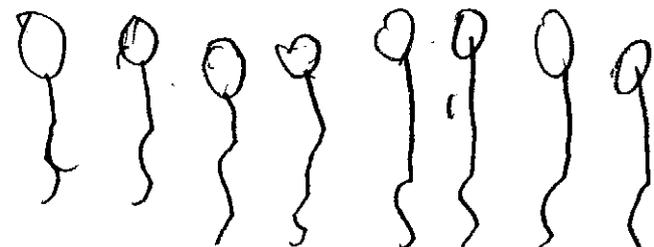
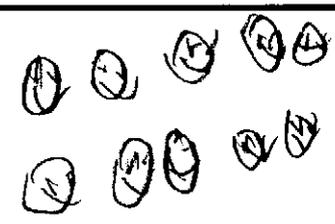
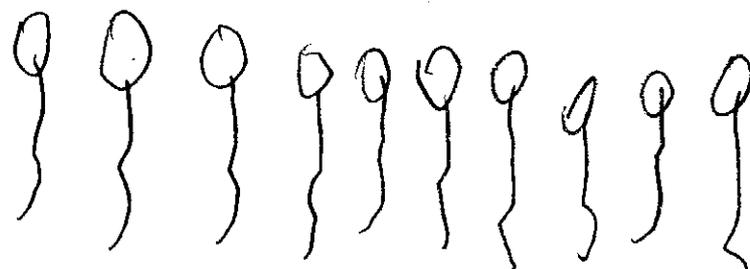
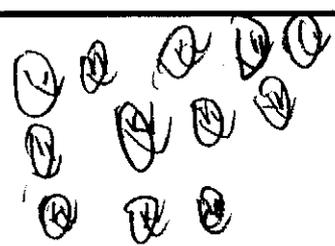
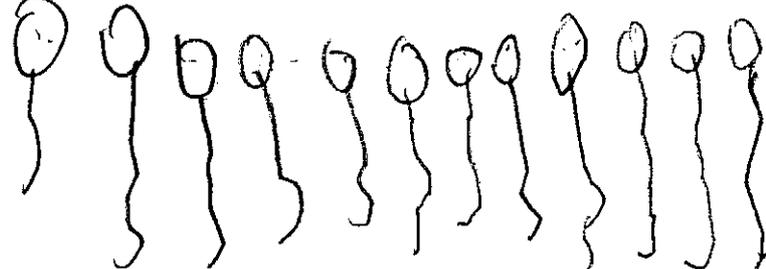
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 25**

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

<p>5</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10</p> 	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20</p> 	

Explicación

senora tiene que comprar 100 quovos



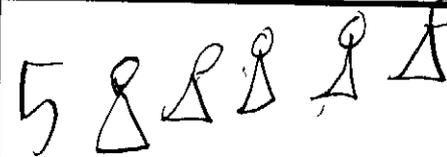
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 26**

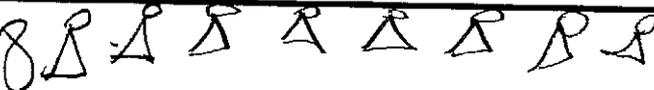
1.- Los gorros.



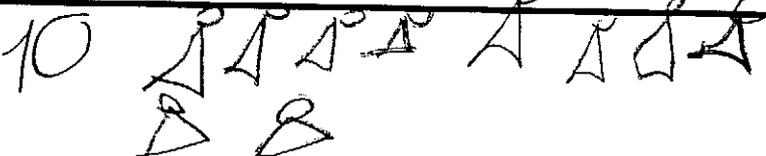
niños	gorros
1 	1 
2  	2  
3   	3   
4    	4    

5	
---	--

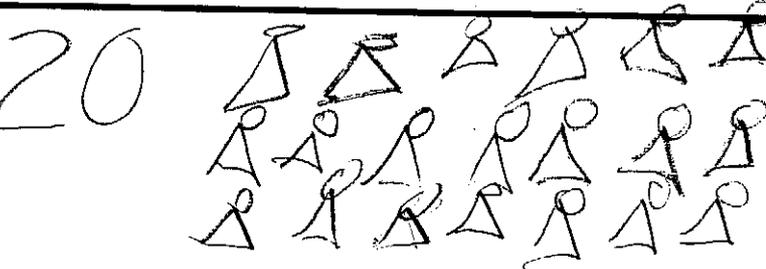
...

8	
---	--

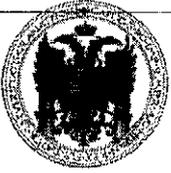
...

10	
----	--

...

20	
----	--

Explicación
 Toda tienen que formar
 un grupo

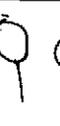


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 26



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3     
2  	  
3   	  
4    	   

5	○○○○○
---	-------

... ..

8	○○○○○○○○
---	----------

... ..

10	○○○○○○○○○○
----	------------

... ..

20	○○○○○○ ○○○○○○ ○○○○○○ ○○○○
----	------------------------------

Explicación
 cien puntos - tres que componen
 cien puleta

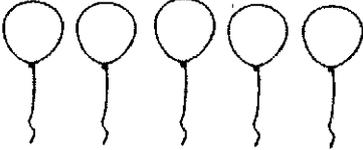
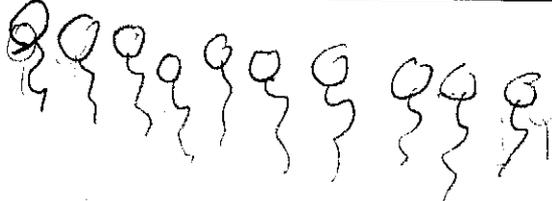
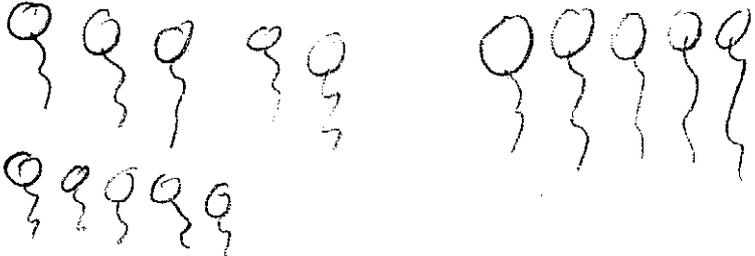
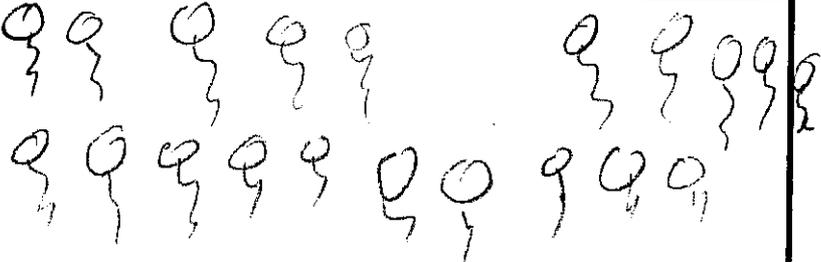


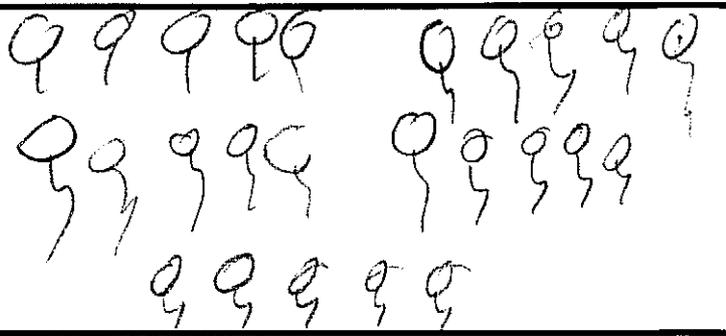
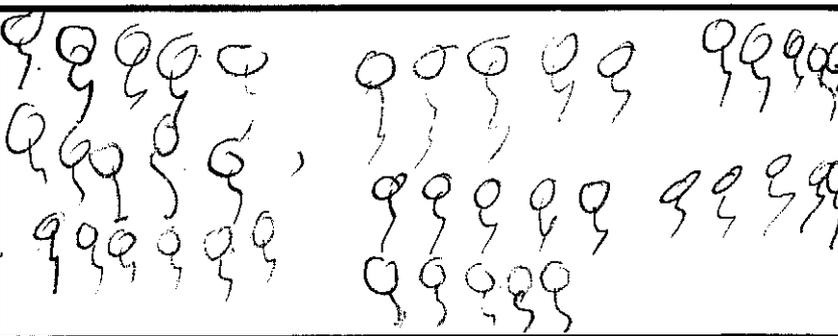
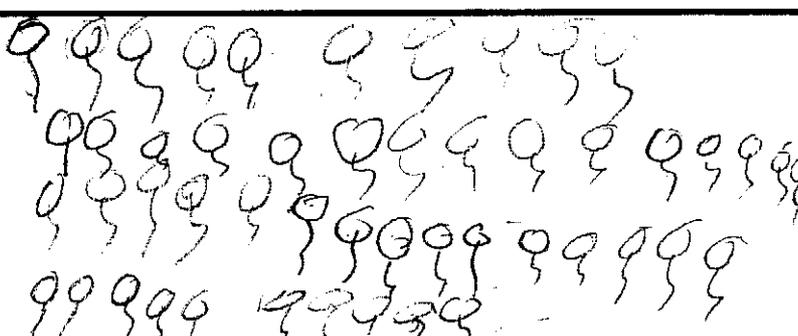
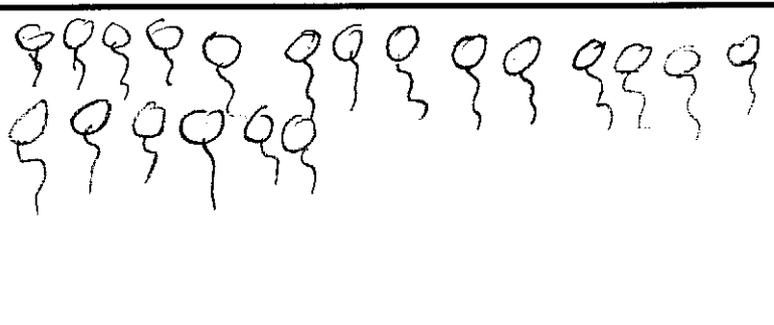
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 26

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

<p>5</p>	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>8</p>	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>10</p>	
<p>...</p>	<p>...</p>
<p>20</p>	

Explicación
 cien puntos tienen que componer
 cien pautetas

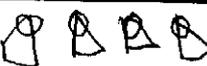


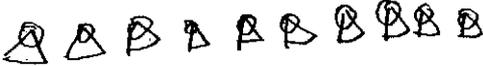
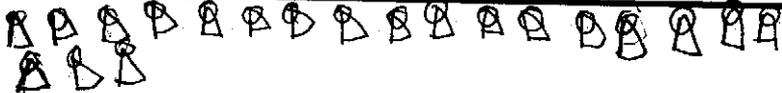
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 27**

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	

Explicación

mama ute tita que conplacien gours



El cumpleaños de Lola

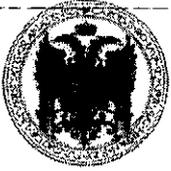
Nombre: ALUMNO 27



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3   
2  	9999999
3   	999
4    	999

5	○○○○○
...	...
8	○○○○○○○○
...	...
10	○○○○○○○○○○
...	...
20	○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
<p>Explicación</p> <p>mamá puedes con para cien piruletas</p>	

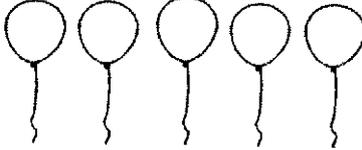


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 27

3.- Los globos

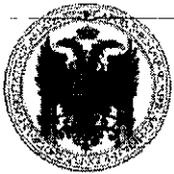


niños	globos
1 	5  mas
2 	10
3 	 mas
4 	 mas

5	9 9 9 9 9 mas
...	...
8	9 9 9 9 9 mas
...	...
10	9 9 9 9 9 mas
...	...
20	9 9 9 9 9 mas 9 9 9 9 9

Explicación

mamá me puedes comprar cien globos



El cumpleaños de Lola

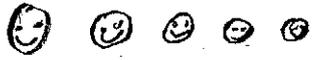
Nombre: **ALUMNO 28**

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1   
2  	 
3   	  
4    	 

5



...

8



...

10

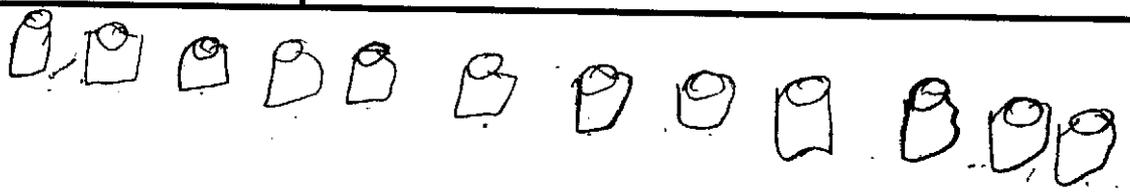


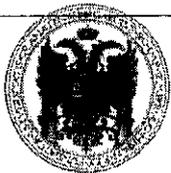
...

20



Explicación



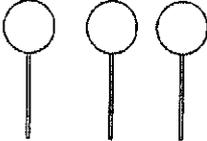
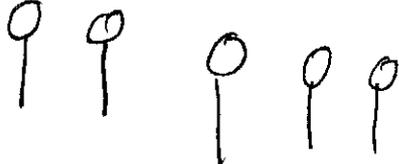
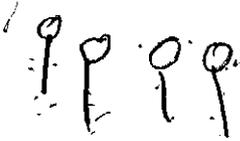
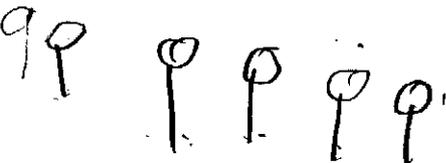


El cumpleaños de Lola

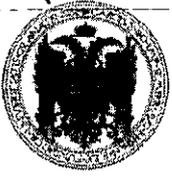
Nombre: Alumno 28

2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
Explicación	

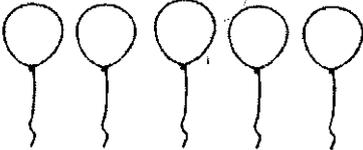
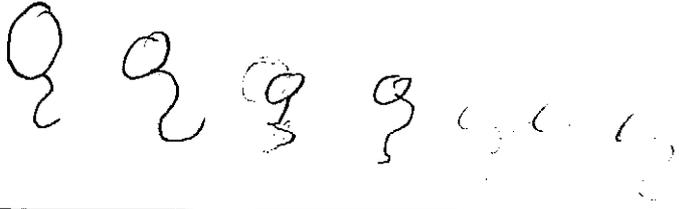
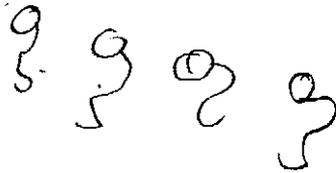


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 28

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	<i>400 10 días</i>
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
Explicación	



El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 29**

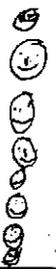
1.- Los gorros.



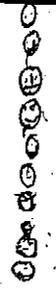
niños	gorros
1 	1 
2 	
3 	
4 	

5 	
---	---

...

8 	
---	--

...

10 	
---	--

...

20 	
--	--

Explicación *Indicando lo que se cuenta por*

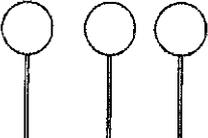
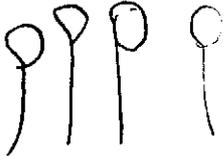
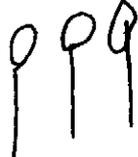
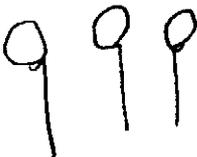


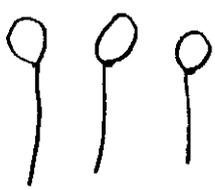
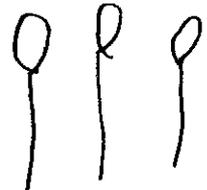
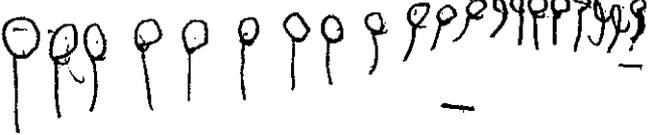
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 29**

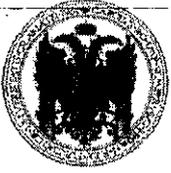
2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	

Explicación *lamana tiene q̄ con bca*



El cumpleaños de Lola

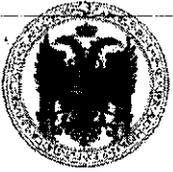
Nombre: ALUNNO 29

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	10
3 	10
4 	10

5	no
...	...
8	no
...	...
10	no
...	...
20	no
Explicación	



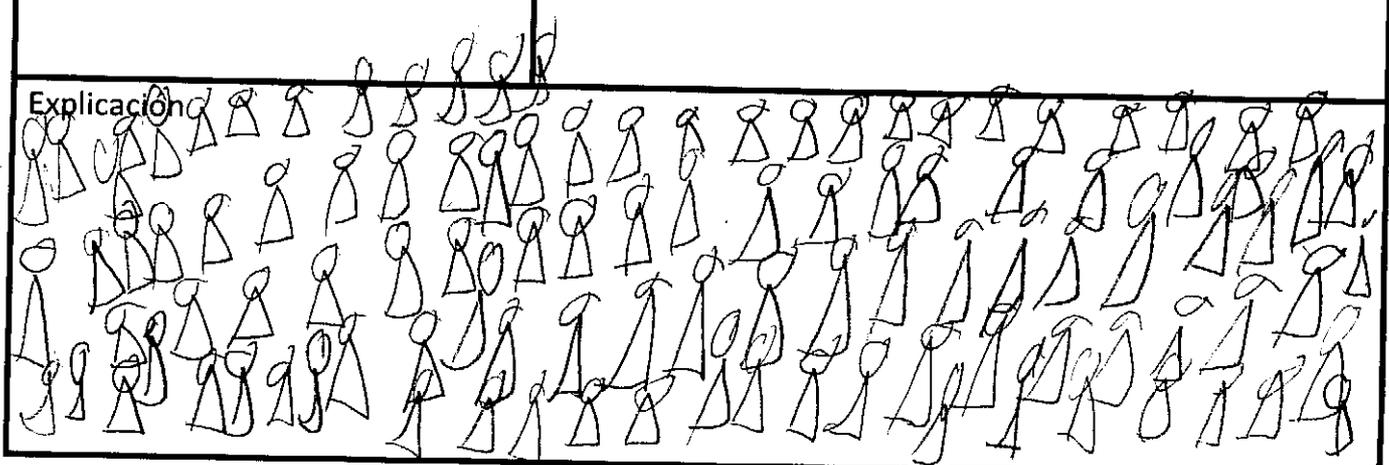
El cumpleaños de Lola

Nombre: **ALUMNO 30**

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	2
3 	3
4 	4

5	5
...	...
8	8
...	...
10	10
...	...
20	20
<p>Explicación</p> 	

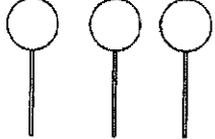


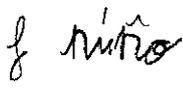
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 30

2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5	<p>  si tuere un niño le doy tre pirvetas. </p>
...	... A tu llebar los cinco.
8	<p>  f niño </p>
...	...
10	
...	...
20	
Explicación	

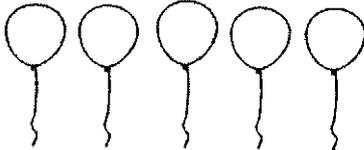
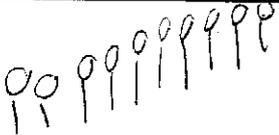


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 30

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	15
4 	20

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	
Explicación	



El cumpleaños de Lola

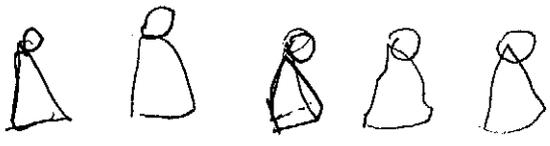
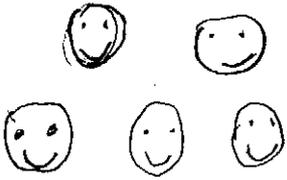
Nombre: ALUMNO 31

1.- Los gorros.



niños	gorros
1 	1 
2 	2 
3 	3 
4 	4 

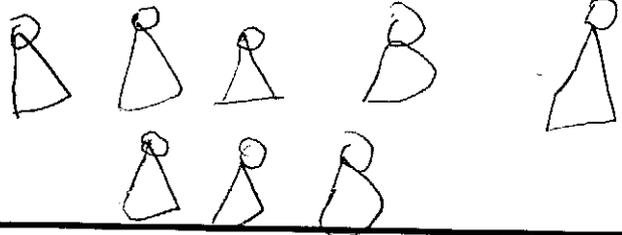
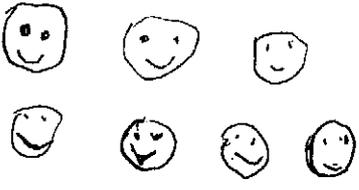
5



...

...

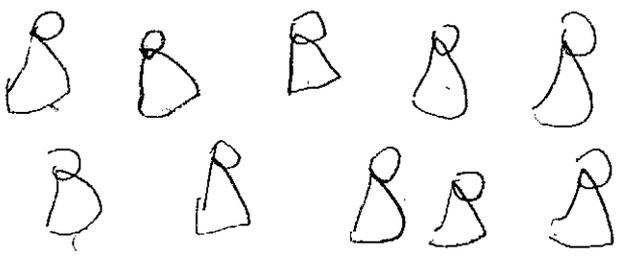
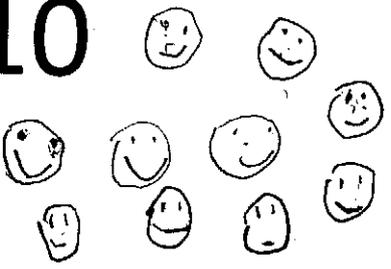
8



...

...

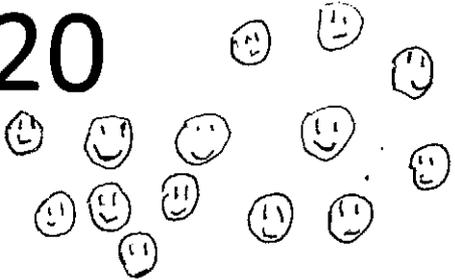
10



...

...

20



20

Explicación

usted tiene que comprar 100
galletas



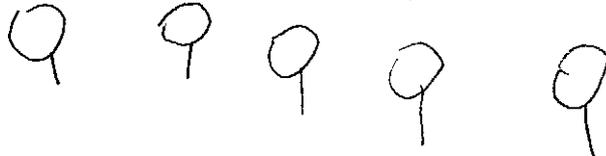
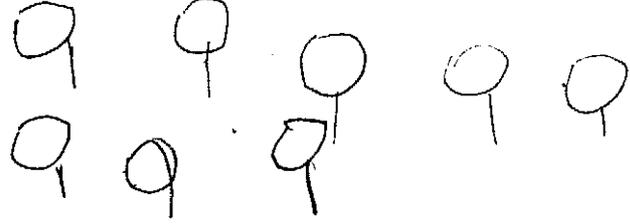
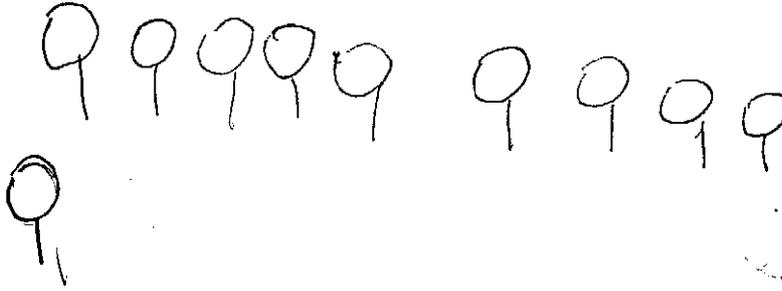
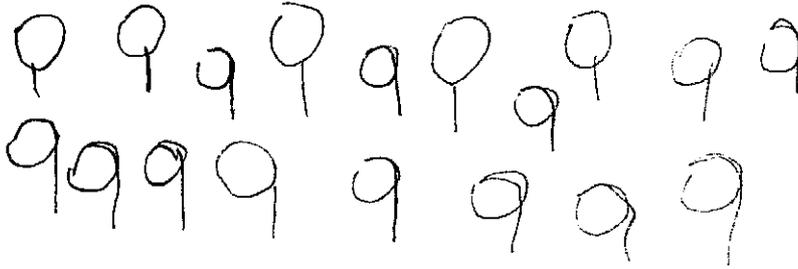
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 31

2.- Las piruletas



niños	piruletas
1 	3   
2  	   
3   	   
4    	   

<p>5</p> 	
...	...
<p>8</p>	
...	...
<p>10</p>	
...	...
<p>20</p>	

Explicación

Si me da que copiar 1000
pizuletas

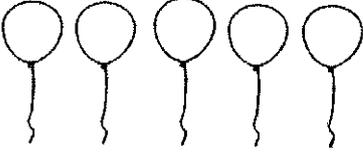
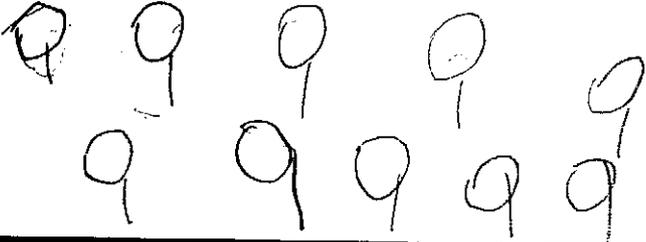
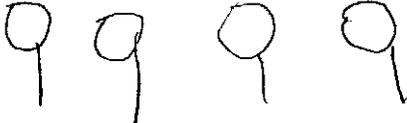


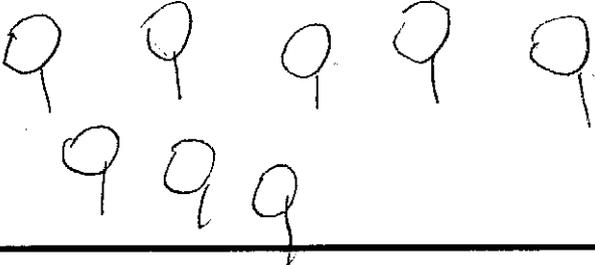
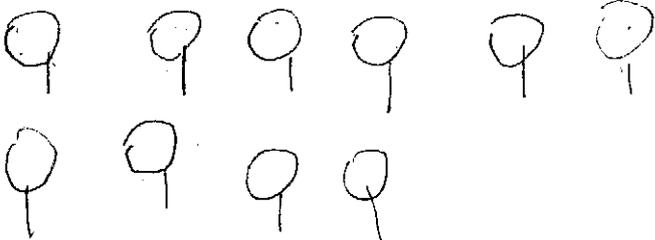
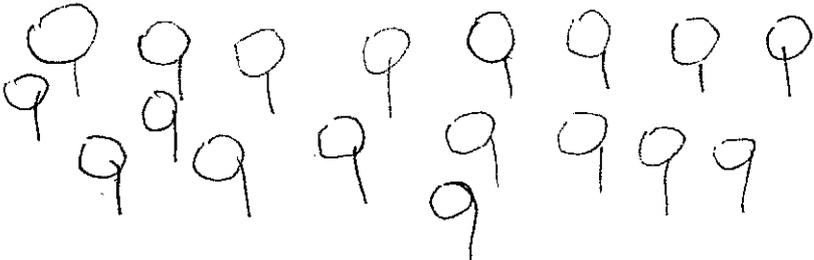
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 31

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	
3 	
4 	

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	

Explicación

Si son cien niños a los que compra
100 globos



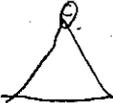
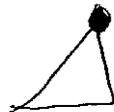
El cumpleaños de Lola

Nombre:

ALUMNO 32

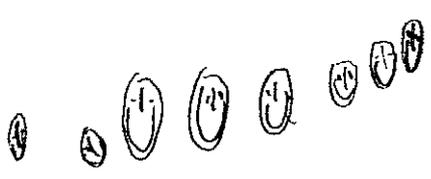
1.- Los gorros.



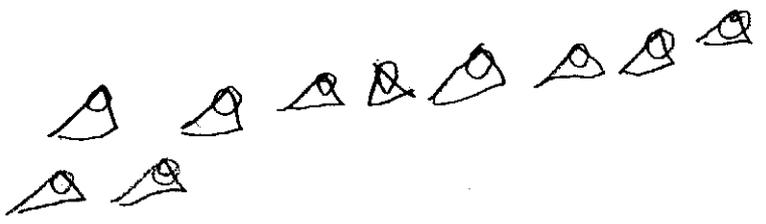
niños	gorros
1 	1 
2  	 
3   	  
4    	   

<p>5</p> 	
--	--

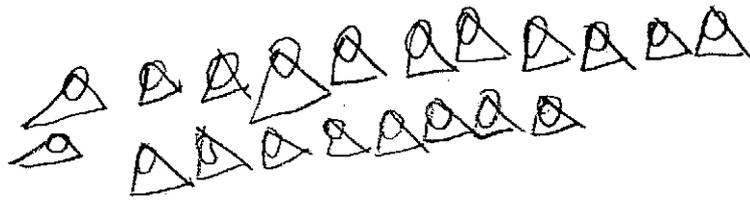
...

<p>8</p> 	
--	--

...

<p>10</p> 	
---	--

...

<p>20</p> 	
---	--

Explicación

ma matie nece con par veintegoror

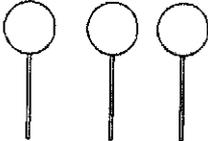
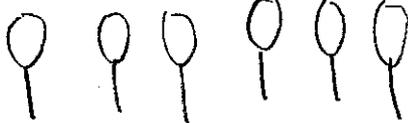
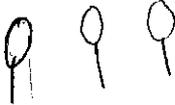


El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 32



2.- Las piruletas

niños	piruletas
1 	3 
2 	
3 	
4 	

5



...

...

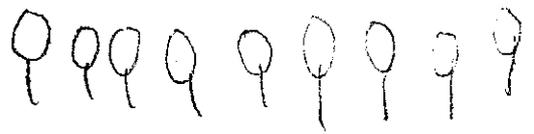
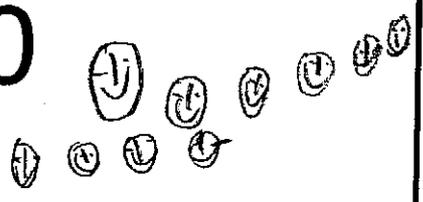
8



...

...

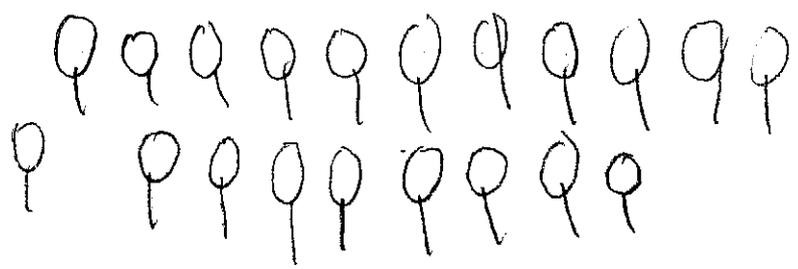
10



...

...

20



Explicación

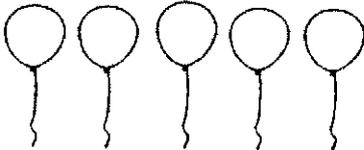


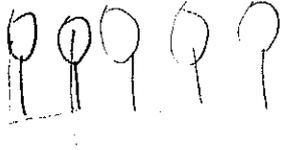
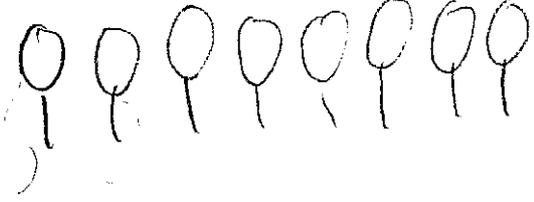
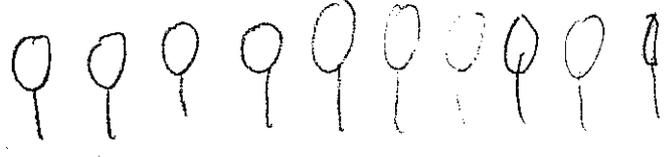
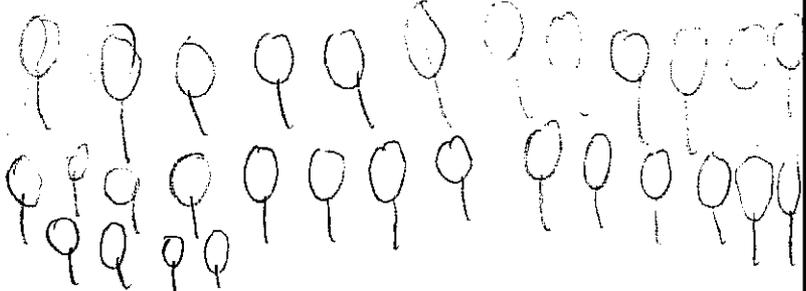
El cumpleaños de Lola

Nombre: ALUMNO 32

3.- Los globos



niños	globos
1 	5 
2 	10
3 	20
4 	30

5	
...	...
8	
...	...
10	
...	...
20	

Explicación

cien niño

Anexo F

Transcripciones de las entrevistas

Alumno 7 (00:38:44)

- Inv: Ayer me decías que te gusto la actividad
Alum: Si
Inv: Porque te gustan los números y tu prueba, tus folios están muy buenos, ¿Cómo descubriste rápidamente?
Alum: Porque con ver el principio que un niño tenía un gorro pus ya, dos, dos gorros, tres gorros, cuatro, cuatro gorros
Inv: Así de sencillo, oye y si... aquí tu me pones la mama de Lola tienen que comprar 50 gorros, porque usted y su hija han invitado a 50 niños y si queremos invitar a 80
Alum: Pues, tendría que comprar 80 gorros
Inv: 80 gorros
Alum: Si
Inv: Y estamos listos,
Ok, esa parte estaba... ¿te pareció fácil la parte de los gorros?
Alum: Si
Inv: Veamos la piruletas, en las piruletas tuviste algunos problemas,
Alum: Si
Inv: Porque te saltaste unos números, ahí hubo algunos problemas, porque estaba más difícil
Que sabemos de las piruletas
Alum: Pues que un niño se lleva tres piruletas
Inv: Entonces, aquí tenemos un niño y aquí tenemos piruletas, podemos ir haciendo las...
Alum: Un niño se lleva tres piruletas, luego otro niño se lleva otras 3 piruletas
Inv: Hasta ahí ibas bien, cierto
Alum: Si
Inv: Después te empezaste a liar, 3 niños... haber piensa, no lo que escribiste aquí, piénsalo de nuevo porque... dijiste 1 niño se lleva..
Alum: 3 piruletas
Inv: 2 niños
Alum: 6 piruletas
Inv: 3 niños... haber ahí tienes piruletas, póngale piruletas
Que hiciste?
Alum: Son nueve
Inv: Son 9, colocaste otro niño, pero que más hiciste
Alum: He puesto otras tres piruletas y en total son 9
Inv: Y ahí te liaste porque le pusiste 6, y otro niño, a ver... ocupe material ahí están las piruletas
Alum: 1, 2 y 3 piruletas
Inv: Entonces, ¿qué hiciste?
Alum: Que son 12 en total
Inv: Ya, que te pasó acá
Alum: Que puse 7
Inv: Pusiste 7, y porque pusiste 12
Alum: Son 12 porque, aquí tenemos 3 y 3, 6 y otras 3 son 9 y otras 3 son 12
Y si sumamos 4 veces 3 son 12
Inv: Y descubriste algo ahí, descubriste como tiene que pensar la mama de Lola
Alum: Si

Inv: Y ayer cuando estábamos haciendo la actividad, te liaste con los números, viste
Alum: Si
Inv: Pero fíjate que aquí te liaste, pero aquí... a ver pensemos, 4, pongamos otro niño y pongamos más piruletas
Alum: 1,2 y 3
Inv: Y cuéntame
Alum: 15
Inv: Y ahí no te liaste, ahí estabas bien, pero con números más pequeños, con el 3 y con el 4
Alum: Me lié
Inv: Como te devolviste un poco y ahí te liaste, te acuerdas lo que yo te dije aquí
Alum: Que aquí me saltaba el 6 y aquí el 7
Inv: Cierto, te saltabas el 6, aquí también hubo un problema, donde te saltaste al 8, podríamos saber, cuanto son 8 niños, ahí hay 8 niños, a ver, si quieres pones las piruletas
Alum: Hay 5
Inv: Ya no te alcanza más mesa, ahí hay 3 niños
Alum: 8... 1,2,3,
Inv: Ordenate mejor, parece que estas medio... ordenate... levántate, toma las piruletas, ocupa la mesa para allá, como tú quieras, porque mientras más juntas están las piruletas, se arma un...
Alum: Son 10
Inv: Aquí pusiste 18
Alum: 20
Inv: Cuanto le diste a este niños
Alum: 3 y 3, 6 y 3, 9 y 3, 12... 15
Inv: Porque a este le diste 4
Alum: Es que son...
Inv: Por eso te digo que te ordenes, ordenate y estos dos niños, los ponemos acá
Alum: 1...2....3...
Inv: Cuéntame que hiciste
Alum: Pues si salen 18, a 19, 20, 21... 22, 23, 24... 24
Inv: Que pasó acá
Alum: Que puse 18
Inv: Porque pusiste el 18, porque te quedaste con el número...
Alum: Porque me lié mucho
Inv: Porque eran muy grandes los números y te quedaste con el 6, porque tu dijiste acá tengo 18 y aquí tengo cuántos niños
Alum: 8
Inv: Mira cuántos niños
Alum: 2,3,4,5,6
Inv: Hay 6, y esto lo pusiste en la respuesta, entonces, mira todo lo que tú tienes en la mesa, le podemos decir a la mama de Lola, como tiene que pensar, como le vamos a decir a la mama de Lola. Usted piense, porque la mamá de Lola va a ir a comprar las piruletas, entonces le vamos a decir, señora usted que tiene que hacer, le vamos a explicar
Alum: Pues tiene que buscar las piruletas y comprar todas las que hay
Inv: Ya, todas las que hay aquí, y en este caso hay 24
Alum: Si
Inv: Pero, suponte que hubiesen muchos niños, 100 niños

Alum: 100 piruletas
Inv: Pongamos un número más pequeño, 10 niños
Alum: 10 niños, 10 piruletas
Inv: Pero mira, aquí tenemos 24 y hay 8 niños, que pasa si ponemos un niño 9, que va a pasar con el número de piruletas
Alum: Que van a haber más
Inv: Van haber más y si pongo un niño 10
Alum: Más todavía
Inv: Más todavía, cuantas más, mira, pensemos en el niño 9, cuantas más de las que teníamos
Alum: 27 con el de 9, y ahora con el de 10, 30
Inv: Y que estás haciendo con los dedos
Alum: Pues contando
Inv: Contando que
Alum: Como lo tiene que hacer el problema
Inv: Ya, si te entiendo, acuérdate que ahí después yo no voy a mirar y se me va a olvidar que estabas haciendo con los dedos, que estas contando con los dedos... dijimos que aquí teníamos 24 y tenemos 8 niños y después le pusimos un niño 9, que hiciste
Alum: Pues contar con los dedos cuantas le dan si aquí tenemos 24, pues cuento con los dedos y me da el resultado
Inv: Pero, cuántas contaste con los dedos
Alum: 3
Inv: Y porque 3
Alum: Porque son las piruletas que le da a cada niño
Inv: A, ok, ahora entiendo, veía que estabas haciendo algo con los dedos pero no sabía lo que era. Entonces dijimos que con 10 tenemos 30 y fíjate... 13 dijiste, de 13 a 30, le van a faltar muchas piruletas a la mama
Muy bien, recojamos las piruletas y vamos por los globos, juntémoslas y acá tenemos globos y acá tenemos niños, eso ahí hay globos, que me decían los globos, fíjate en los globos
Alum: Un niño son 5, 2 niños...
Inv: Encontraste más fácil el de las piruletas o el de los globos
Alum: El de las piruletas, en el de los globos tuve que llamar a tu compañera un poquito porque me lié, en que todas las...
Inv: Pero, después que mi compañera te dijo que había que hacer, ya lo pudiste hacer solo
Alum: Sí, me lo explicó y ya lo pude hacer
Inv: A ya, estaba más complicado
Alum: 2 niños, 3, 4 y 5
Inv: A un niño le diste
Alum: 5... 6, 7, 8, 9 y 10 y son las 10, 3 niños, 11, 12, 13, 14, 15
Inv: 3 niños
Alum: 15
Inv: Sin poner globos, a ver, 4 niños cuantos serían, sin sacar fichas, a ver pensemos
Alum: 20 globos
Inv: 20 globos y coincide con lo que habías puesto, y que hiciste con los dedos
Alum: Pos contar otra vez cuántos... hice con los dedos para saber cuántos le dieron de resultados
Inv: Y cuántos estas contando con los dedos

Alum: 5
Inv: Y porque 5
Alum: Porque son los globos que tengo que contar
Inv: Ya, después dijiste que para 5 niños son 25 globos, pero después dijiste que para 8 niños
Alum: Son 15 globos, ahí me he liado
Inv: Porque te liaste... cuántos deberían ser, mas de 15 o menos de 15
Alum: Más de 15, porque si aquí tenemos...
Inv: Mucho más de 15 o poquito más de 15
Alum: Poquito más de 15, porque aquí hay un número pequeño y he puesto más y aquí hay un número mayor y he puesto menos globos
Inv: Y eso... ayer no te diste cuenta de ese detalle
Alum: No
Inv: El 8 es más grande que 5
Alum: Y aquí he puesto un número pequeño y aquí un número grande
Inv: El 15 es más pequeño que 25 y cómo podríamos solucionarlo, ahora pensando, porque esta no la podemos corregir, pensemos, que debemos pensar o que debe pensar una persona para decirme cuantos globos necesito para 8, pensemos en los 8 niños, sin globos, ahí tengo 4 y ahí hay 8, pensemos... que tendríamos que pensar...
Alum: 1, 2, 3, 4, 5, ...
Inv: No, pero no cuentes, dime, que tendría que pensar la persona, acuérdate que la mama de Lola no le gusta hacer cuentas, entonces que le vamos a decir nosotros, aquí tiene 8 niños señora, que debería pensar la señora, como le vamos a explicar, tú te has encontrado con alguien que no le guste hacer cuentas, hay un montón de niños que no le gustan hacer cuentas y que no le gustan los números
Alum: A mí me encantan
Inv: A ti te encantan, pero hay niños que no le gustan, entonces a esos niños que no le gustan los números, como le vamos a decir, a ver piensa, siéntate un ratito y piensa... dijimos si hay 1 niño le corresponden 5, si hay 2, 10, si hay 3, 15, a cuatro 20 a 5, 25, pero el 6 no estaba y el 7 tampoco estaba, eso te lió
Alum: Si
Inv: El 6 y el 7 no estaban y llegamos al 8
Alum: Si
Inv: Que estamos haciendo aquí cuando estamos contando
Alum: 8
Inv: Hay 8 niños, pero que estábamos haciendo con los globos, que hacías tu con los dedos
Alum: Yo contando a ver cuanto te daban
Inv: Entonces qué le vamos a decir a la mamá, para esos niños, acuérdate que le estamos dando una indicación, le estamos diciendo... mamá usted debe... que debe hacer ella
Alum: Aquí son 33 globos
Inv: Ya, son más de 25
Alum: Si
Inv: Cuanto más que 25, suponte aquí, 2, 4, 6, aquí teníamos 25 le agregamos un niño, cuanto más que 25
Alum: 5 más
Inv: Y cuántos niños le estamos agregando entonces a esto, mira... y ahí va a estar

tu problema, cuántos niños le estamos agregando a 5 para llegar a 8, le estamos agregando 3 niños y esos 3 niños, cuántos globos tienen

Alum: 15

Inv: y que pusiste ahí

Alum: Entonces el 15, y ahí va el 33

Inv: Corresponde

Alum: El 15 corresponde al 5 y...

Inv: No, el 15 corresponde al 3... el 15 a que corresponde... si tengo 5 niños y ahora quiero tener 8 niños... esta difícil, ya no te preocupes... que le vamos a decir entonces a la mamá, que tiene que hacer, que cuenta tiene que hacer

Alum: Po buscar todos los globos y encontrar todos los globos que hay en total, todos los niños y encontrar para cada niño 5 globos

Inv: Ok, y con eso la mamá debería estar clarísima

Vamos a cambiar de actividad, colócale el nombre, mientras más grandes los números se van liando más... ya, mira lo que hay acá, vamos a devolver los globos...

Alum: 3, 4, 7

Inv: Y como sabes eso, si yo no te he dado ninguna instrucción

Alum: Porque aquí son 3, son uno para cada uno y si son 7 son 7 gorros para cada uno

Inv: Pero si yo pensaba darte la instrucción y tu lo haces al tiro

Vamos a leer la instrucción porque esto es distinto, están poniendo otra figura, léela

Alum: Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños, ella quiere un gorro de princesa

Inv: Mira, está bien el niño de cumpleaños siempre tiene un gorro de vaquero, de astronauta, y las niñas siempre tienen un gorro de princesa y al resto de los invitados ¿Qué gorro le dan?

Alum: Un gorro de fiesta

Inv: Un gorro de fiesta, fijate, dos invitados

Alum: Si... 3 gorros

Inv: ¿Por qué?

Alum: Porque este es para Lola y estos son para los invitados

Inv: Ya, a ver, puedes ocupar los invitados, puedes ocupar los gorros de fiesta y los gorros de princesa, dime para 4 invitados... aquí hay gorros de princesa, para 4 invitados

Alum: 3 niños

Inv: Y anda mirando el anterior, aquí dijiste para dos invitados

Alum: Son 3 gorros y 4, si son 3 invitados

Inv: Pero aquí dice invitados, aquí eran dos invitados

Alum: Y 3 gorros

Inv: ¿Por qué?

Alum: Porque uno era para Lola

Inv: Uno era para Lola

Alum: y estos dos son para los invitados

Inv: Y aquí cuántos invitados tienes

Alum: 4

Inv: 4 invitados, por lo tanto, que gorros le vas a dar a sus invitados

Alum: Le voy a dar 1, 2...

Inv: Aquí tenemos a los 4 invitados, ahí están los 4 invitados

Alum: Le ponemos 1, 2, 3 y 4

Inv: Entonces cuantos tienes, aquí hay más gorros y que más necesito
Alum: Y otra de esa y el gorro ...
Inv: El gorro de...
Alum: El gorro de Lola
Inv: Entonces dibújame eso, dibújame lo que pusiste. Con fichas es más fácil
Alum: Si
Inv: Que pensarlo
Alum: Si
Inv: Pero están muy encima, no se ven, borremos esos últimos, tienes todo el espacio así que no te preocupes, así cuando yo vea los monitos, no me voy a dar cuenta, yo sé que estas contando estos cuatro, pero parece que fueran 3. 2 niños
Alum: 3
Inv: 3 gorros, 4 niños
Alum: 5 gorros
Inv: 9 niños
Alum: 10 gorros
Inv: Si, quieres los dibujas, si quieres... acuérdate puedo dibujar, puedo escribir, puedo escribir el número o puedo hacer una cuenta... y para 12 niños... como descubriste eso... porque te gustan mucho las matemáticas
Alum: Son 12, pero como también está el gorro de Lola son 13 gorros
Inv: Y si fueran 100 niños
Alum: 101
Inv: Y 1000
Alum: 1001
Inv: Mira, te acuerdas de éste, lo vimos recién, son las piruletas
Alum: 1 niño son 3 piruletas, pos 6
Inv: Pero aquí hay piruletas, saquemos las piruletas, devolvamos los gorros de princesa... si estas cansado me avisas para que yo te vaya a dejar a la sala, no te preocupes... aquí hay niños y aquí hay piruletas, ya...
Alum: 2, 3, 4...
Inv: Y porque supiste eso, a ver cuéntame
Alum: Porque para uno son 3 y si ahora son 6, son 2 niños
Inv: ¿Por qué?
Alum: Son dos invitados porque 3 piruletas para un niño y 3 para 2, son 6
Inv: Ya, a ver, para 15 piruletas, ahí tienes material, porque 15 piruletas son muchas, acuérdate más o menos, porque uno se lía con tantas piruletas
Alum: 1, 2, 3
Inv: Aquí tenemos 3 piruletas
Alum: 5, 6, 7, 8
Inv: ¿Por qué estas haciendo montoncitos de 3?
Alum: ¿Qué?
Inv: ¿Por qué haces montoncitos de 3?
Alum: Porque son 3 las que tengo que contar
Inv: Ok... puedes ocupar la mesa de acá, puedes ocupar todo el espacio que tú quieras
Alum: Tienen que ser 15?
Inv: Tienen que ser 15... veo como 25, a ver, cuenta las piruletas
Alum: Son 20
Inv: Tienes que contar 15 piruletas, acuérdate que compraste 15 piruletas... ahí sí,

ahí hay 15
Alum: Son 5 invitados
Inv: Ya, y por qué
Alum: Porque para 15 hay 5 niños
Inv: Cuéntame lo que hiciste ahí en la mesa, que separación hiciste en la mesa
Alum: Pues que he hecho que he puesto las 15 piruletas, que me he pasado que he puesto 20
Inv: Y las sacamos, no hay problema
Alum: Hemos puesto las 15 y he contado los montones que hay, que hay 5 montones
Inv: 5 montones de
Alum: De piruletas
Inv: Si, 5 montones de cuantas piruletas
Alum: De 3
Inv: Y eso te dio
Alum: 5
Inv: 5 montones, esos montones corresponden a
Alum: 15
Inv: A 15 piruletas, pero a 5 niños
Alum: Si...
Inv: Los globos, recogemos las piruletas y ahí tienes globos... ya, y porque tan fácil, cuéntame lo que hiciste
Alum: Si uno tiene 5 globos, entonces para dos serán 10
Inv: Ya, muy fácil parece, ahí tienes material si necesitas material, cuéntame que estrategia estas ocupando, la misma que ocupaste con las piruletas, que estás haciendo entonces
Alum: Pues yo aquí tengo un montón de 5 piruletas no de 5 globos y aquí voy a hacer 1, 2, 3, 4, 5
Inv: ¿Otro montón de 5 globos?
Alum: Si, son 10
Inv: Ah y aquí están los dos niños que corresponden
Alum: A 10
Inv: A 10, ya...
Alum: (alumno trabaja en hacer montoncitos)
Inv: había un montón que te había quedado más pequeño
Alum: Son 5 niños
Inv: Son 5 niños, y cuéntame que hiciste... no importa después lo recogemos... cuéntame lo hiciste
Alum: Pues he hecho, he puesto los 25 globos y hay 1, 2, 3, 4, y 5 montones de globos
Inv: Ya, ok. Mira la última, dime si entiendes lo que hay que hacer. Dice completa la lista de compras para que no falte ni sobre ninguno, ¿Qué hay en lista de compras?
Alum: Po...
Inv: Estaban los niños invitados ¿sí?, tenemos piruletas
Alum: Y globos y gorros
Inv: Y gorros. Y que dato me están dando, que dibujo me dieron
Alum: Pues tengo que hacerlo...
Inv: Pero mira que dibujo nos están dando, me están diciendo que hay
Alum: 9 piruletas
Inv: ¿Podemos completar el resto?, ¿se ve difícil?... veamos piruletas, aquí hay piruletas, te paso un montoncito porque necesitas, ¿Cuántas piruletas necesitas?

Alum: 9
Inv: 9 piruletas, a ver
Alum: 1, 2, 3, ...
Inv: Ya, que podríamos hacer con esas 9 piruletas
Alum: 9 piruletas, pues darle una a cada niño
Inv: ¿Le podemos regalar una a cada niño?, tenemos que seguir las reglas que nos dijeron. ¿Qué nos habían dicho? ¿Te acuerdas?
Alum: No me acuerdo
Inv: Entonces devolvámonos a las piruletas
Alum: 3, 3, 15 piruletas
Inv: Pero un niño le tengo que dar
Alum: 3
Inv: A ver si eso nos sirve, tengo 9 piruletas
Alum: Donde las ordeno
Inv: Como tú quieras
Alum: A un niño 3 piruletas, a otro niño otras 3 piruletas y a otro 3 piruletas
Inv: Cuéntame que hiciste
Alum: Pues para un niño, son 3 piruletas
Inv: Y las encerraste, encerraste 3 piruletas en un círculo
Alum: Si, ahora 2 niños otras 3 piruletas y las encerré en un círculo y otros 3 niños, otras 3 piruletas y las he encerrado en un círculo
Inv: Entonces cuéntame, cuántos niños
Alum: Van a ir 3
Inv: Van a ir 3 y puedo completar el resto, podría saber cuántos gorros
Alum: Si
Inv: ¿Cuántos?
Alum: No me acuerdo
Inv: Pero piensa aquí, dijiste 9 piruletas y las encerraste en 3 y te dieron 3 niños, me falta saber todavía, la mamá tiene que comprar los gorros
Alum: Y los globos
Inv: Y los globos, cuántos gorros va a comprar
Alum: Un niño serían 3 gorros
Inv: Ya 3 gorros y como supiste que eran 3 gorros
Alum: Porque me acuerdo del ejercicio del otro
Inv: Ah ya, me acuerdo del otro ejercicio
Alum: Pues lo encierro en un circulito y los dos niños son otras 3 piruletas
Inv: Piruletas, acuérdate estas metiendo piruletas y estas metiendo gorros
Alum: Y ahora para el 3 son ... y lo encierro
Inv: Tenemos que ir colocando el numerito arriba, cuántos niños eran
Alum: 3
Inv: Colócame el numerito arriba, cuántos gorros necesita comprar la mamá
Alum: 9
Inv: 9 gorros, si, coloque los 9 gorros
Alum: ¿Donde aquí?
Inv: Si
Alum: 9 gorros ya que un niño son.... 3, 4, 5, ... 5 globos...
Inv: Que hiciste en los globos
Alum: He contado 10, son 10 y si a ella le pones 5 son 15, 15 globos
Inv: Entonces ahora le vamos a decir por teléfono a la mamá, porque está en el supermercado, le vamos a decir, ya mamá de Lola, vienen 3 niños a la fiesta,

necesito

Alum: 9 gorros, 15 globos y 9 piruletas

Inv: Está bien la lista

Alum: Si

Inv: Le vamos a decir, mamá vienen 3 niños a la fiesta, invité a mis 3 amigos a Juanito a Cristian y a Ramón, invité a mis tres mejores amigos, necesito que me compres

Alum: 9 gorros, 15 globos y 9 piruletas

Inv: Para la fiesta y una tarta, estas conforme

Alum: si

Alumno 12 (00:37:09)

- Inv: Tu descubriste muy rápidamente lo que había que hacer
Alum: Si a ver, hay ahí
Inv: Estaba muy fácil, veamos la primera, te acuerdas que eran los gorros
Alum: Si
Inv: Y tú me pusiste al tiro el número
Alum: Si
Inv: ¿Por qué?
Alum: Porque los gorros no me salen muy bien
Inv: Ah porque no eres muy buena para el dibujo, pero como sabías que eran 2
Alum: Porque aquí venían 2 niños y aquí 3 niños y aquí 4 niños
Inv: Ya, entonces... los niños te salen bien porque los dibujaste
Alum: Algunos me salieron un poquito
Inv: No, pero si no era importante que salieran perfectos
Alum: Bien, bien, bien
Inv: Bien, bien, bien, rapidito vamos a ir a merendar así que no te preocupes. Pero como descubriste que eran 5
Alum: Porque aquí me ponían el 5, el 8, el 10 y el 20
Inv: Y tú qué hiciste
Alum: Pues dibujaba los niños y ponía los números
Inv: Y como sabes... a ver pensemos en otro número, pensemos en ... tu aquí pusiste 100 y le dijiste señora usted tiene que comprar 100 gorros porque Lola ha invitado a esos niños y si Lola invita a 80 niños
Alum: Pues 80 gorros
Inv: Como lo sabes tan rápido
Alum: Porque son 80 niños
Inv: Pero la mamá va a pensar que es magia, como sabes tan rápidamente que son 80 gorros
Alum: Porque son 80 niños
Inv: Así de fácil... veamos la otra te costó un poquito más, las de las piruletas, ¿Por qué costó más?
Alum: Porque era un poquito... porque tenía que poner aquí una fila, dos filas, aquí ya estaba puesta, dos filas, 3 filas, 4 filas, 5 filas, 8 filas, 10 filas y 20 filas, porque claro tenía que ir poniendo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8
Inv: Y las filas que son, cuántas piruletas tiene cada fila
Alum: 3
Inv: 3, y por qué sabes que son 3 piruletas
Alum: Porque aquí van 3
Inv: Ah, porque en el que me están dando me dicen que un niño tiene
Alum: 3 piruletas
Inv: Y tu después dibujaste 2 niños y dibujaste 2 filas con 3 piruletas
Alum: Claro porque para 1 son 3, para otro otras 3 y aquí para éste
Inv: Para ese y para ese 3 más
Alum: Y luego aquí pues lo mismo
Inv: Lo mismo, 1 niño
Alum: 3 piruletas
Inv: Ya, pero mira, aquí te anduviste liando
Alum: Si
Inv: Por qué te liaste, cuéntame que te

Alum: Es que ya me hice un lío con las piruletas
Inv: Ya tenías un lío en tú cabeza con las piruletas, pero aquí empezaste a juntarlas de 3 en 3 y aquí hiciste filas, pero qué pasó aquí, que te pasó con las filas
Alum: Que tuve que hacer 3 más aquí y 3 más y aquí, este y este
Inv: Y perdiste las filas
Alum: Si
Inv: Las filas ahí se perdieron
Alum: Si, y aquí puse las mismas
Inv: Las mismas de los gorros, pero mira, si la mamá de Lola tiene que comprar... 1 niño 3 piruletas, 2 niños, 3 y 3, cierto, ahí me estas mostrando con los dedos 6 piruletas, si son 100 niños, aquí hay 100 niños, esta carita va a representar a 100 niños
Alum: Y esa es la piruleta, de acuerdo
Inv: Si
Alum: Pues si, a ver...
Inv: Pensemos, pensemos. pensemos que es un niño y tú me dices
Alum: Una piruleta
Inv: No, cuántas le vamos a dar, cuántas me dicen que hay que darles
Alum: 3
Inv: 3 piruletas, 1 niño
Alum: 3 piruletas, otro niño, otras 3 piruletas, a ver...
Inv: Aquí tenemos más piruletas
Alum: Si lo estoy viendo perfectamente
Inv: Ok, imagínate sin tener que estar poniendo las piruletas, porque eso fue lo que hiciste tu, cierto, pusiste 3 piruletas, 3 piruletas, hiciste lo mismo, fuiste poniendo las filas con piruletas, 3 piruletas, 3 piruletas, 3 piruletas, pensemos en muchos niños, que hay que poner aquí, 1, 1, 1, 1, y aquí tenemos más niños, muchos niños, que vamos a tener que hacer
Alum: Aquí, aquí, pues darle 3 a cada uno
Inv: 3 a cada uno y si son 100 niños
Alum: Pues... a ver, a ver
Inv: Dime lo que vas pensando, no está bien ni está mal
Alum: Yo que sé cuántas piruletas
Inv: Cuántas crees tu
Alum: 3 para cada uno
Inv: ¿3 para cada uno?
Alum: Y luego van llegando más... bueno
Inv: ¿Más invitados?
Alum: Si, le tienes que ir dando 3 piruletas
Inv: A medida que van llegando
Alum: Si
Inv: Yo me pongo en la puerta
Alum: Si
Inv: Y le vamos dando cuando van llegando, esa es una buena estrategia
Alum: Si
Inv: Así no me pierdo
Alum: Claro
Inv: Y si un niño sale y vuelve a entrar
Alum: Pues le das otras 3 y ya tiene 6 piruletas, ahora la de los globitos
Inv: Hagamos la de los globitos, que pensaste en la de los globitos, devolvamos las

piruletas y nos vamos con los globitos, ¿es más fácil con las fichas?

Alum: Si

Inv: Cuéntame, tú en las piruletas dibujaste columnas, dibujaste filas y cada fila tenía 3 piruletas, pero aquí hiciste otra cosa, cuéntame que hiciste

Alum: Sumar para que el cuadro no estuviera lleno de globitos

Inv: Y que sumaste

Alum: Pues 5, aquí da 5 , 3 cincos, 4 cincos

Inv: A ver, aquí cuántos niños hay

Alum: 2

Inv: Y hay

Alum: 5 + 5

Inv: Dos cincos

Alum: Si

Inv: Y aquí hay 3 niños

Alum: Y hay 3 cincos, 4 niños, 4 cincos

Inv: Y como descubriste eso

Alum: Porque aquí 5, 8, 10, 20, pues tuve que poner aquí 5, 8, aquí 10, pero después todo se me hizo un lío

Inv: Ahí ya no, porque mira, tú me dices, aquí tuve que poner 8, ¿si cierto?, y aquí tuve que poner 10, pero cuenta cuántos cincos pusiste

Alum: 1, 2, 3, 4, 5, 6.... 6

Inv: 6 entonces ahí, ya te empezaste a hacer un lío

Alum: Si y sobre todo con éste

Inv: Cuando eran 20

Alum: Si

Inv: Por qué, porque eran muchos

Alum: Porque eran muchos cincos

Inv: Y no los alcanzaste a escribir todos, pero cuantos cincos iban en el 20

Alum: Pues 1, 2, 3, 4.... 8

Inv: Tu pusiste 8, pero cuántos iban

Alum: 8

Inv: Cuántos debimos haber colocado

Alum: 20

Inv: ¿20? Y aquí

Alum: 10

Inv: 10 y eso es mucho, y tu sabes sumar tanto

Alum: Si

Inv: ¿Sí? Ok, y tu cuando le dijiste a la mamá, pensemos, tu dijiste ahora voy a sumar y tú me dices que para 10 niños hay que sumar 10 cincos y que para 20 niños hay que sumar

Alum: 20 cincos

Inv: Y para 100 niños

Alum: Pues 100 cincos

Inv: Y eso, nos van a faltar

Alum: ...Hartos globitos

Inv: Nos va a faltar papel

Alum: Sí, nos va a faltar papel

Inv: Tendríamos que buscar uno de esos papeles muy largos, podríamos hacer la suma

Alum: Si

Inv: Nos vamos a demorar mucho
Alum: Muuuucho
Inv: Ya, muy bien, me encantó porque tú pensaste diferente. Mira yo te tengo aquí otra actividad
Alum: Coronas
Inv: Ponme tu nombre
Alum: Menos mal que a este lápiz ya no se le rompe la punta
Inv: No porque no traje sacapuntas tampoco, mira, 3 gorros
Alum: 3 invitados
Inv: Y está bien
Alum: Si, 7 gorros 7 invitados
Inv: Y como lo supiste
Alum: Porque para cada uno hay un gorro
Inv: Ya, y para 12
Alum: Pues 12 gorros
Inv: Ya anótame eso, puedes, acuérdate, puedes anotar el número, puedes anotar el dibujo, puedes escribir una palabra o hacer una cuenta
Alum: Voy a intentar hacer los gorritos
Inv: Si tu quieres, ves que te salen bonitos y tu dijiste que te salían feos
Alum: Es que me he salido... 1, 2, y es que me falta dibujar 5
Inv: Te faltan 5
Alum: Es que... 3, 4, 5, 6, pues mira me han cabido todos aquí
Inv: En una sola fila
Alum: Si, ahora tengo que dibujar aquí los invitados, tendré que poner aquí el 7
Inv: Ahí alcanzaron justo
Alum: Aquí no creo que me vayan a caber
Inv: Entonces no los dibujes, no te preocupes
Alum: Si los puedo dibujar... los gorros son más fácil, pero los invitados no
Inv: Pero dibújalos como pelotitas no más
Alum: O puntitos
Inv: O puntitos o sonrisas o...
Alum: Pues mira voy a poner uno aquí... ala, ya los he dibujado
Inv: Ya, veamos la otra actividad
Alum: Que son gorros y coronas
Inv: Gorros y coronas, dice, Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños, porque Lola es la que esta de cumpleaños
Alum: Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños, ella quiere un gorro de princesa
Inv: Mira, ahí está el gorro de princesa
Alum: Sí que es una corona
Inv: Es una coronita de princesa
Alum: Hombre, como es ...
Inv: La que esta de cumpleaños, si fuera hombre querría un gorro de vaquero, si cierto, o un casco de astronauta. Dice, si hay 2 invitados necesitamos
Alum: Pues estos dos
Inv: Ya, a ver
Alum: Eso creo
Inv: Si hay 2 invitados necesitamos dos gorros y
Alum: Una corona
Inv: Y por qué necesitamos una corona

Alum: Porque esa es para Lola
Inv: Porque esa es para Lola, si son 4 invitados
Alum: A ver esto lo vamos a...
Inv: 4 invitados, te paso gorros, los globos los vamos a dejar ahí y te voy a pasar gorros, aquí hay invitados, aquí hay niños, muchos niños
Alum: Aquí ya tenemos la corona
Inv: Quieres más coronas?, aquí hay más coronas
Alum: Vamos a ver, ahora si hay 4 invitados, aquí... aja...
Inv: Ya lo descubriste
Alum: Si
Inv: Eres muy rápida, no me dejas ni siquiera pensar, a ver qué descubriste cuéntame
Alum: Los 4 gorros para los 4 niños y otra vez la corona para Lola
Inv: Parece que fuera tan fácil, es muy fácil
Alum: Es muy fácil, pero, se va complicando
Inv: Y cuéntame para 9 invitados
Alum: Jijiji
Inv: No me digas que ya lo sabes
Alum: Si
Inv: Pero...
Alum: Alá
Inv: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ¿y?
Alum: Y la corona
Inv: A ver y para 12, en este te pillo, es muy difícil
Alum: En este no me pillas
Inv: ¿No te pillo?
Alum: Alá
Inv: Cuántos deberían haber
Alum: 12 gorritos y
Inv: Contemos los gorritos
Alum: 1, 2, 3, 4, ...11,
Inv: Se te había escapado un gorrito, 12 gorritos
Alum: Para los niños y la corona otra vez para Lola
Inv: Que niños más guatones. A ver si te pillo ahora, pero parece que no te estoy pillando
Alum: Y no me vas a pillar
Inv: Te cambio los gorros por piruletas
Alum: Piruletas, as, as
Inv: Ahí están las piruletas, ahí tenemos muchas piruletas y ahí tenemos niños acuérdate. Dice 1 niño
Alum: 3 piruletas, si este es el mismo, pero con el número 6 y el 15, luego aquí...
Inv: Son 6 piruletas, no 6 niños, acuérdate que acá están los niños, no te pille pero estás desconcentrada, pensemos de nuevo... pensemos, 3 piruletas
Alum: Un niño
Inv: 6 piruletas, ahí tienes piruletas, tienes niños
Alum: A ver que lo voy a poner así en una serie, ahora de revés, ahora de revés los niños y para... espérate...
Inv: Lo que tú quieras, ahí tienes toda la mesa para jugar, acuérdate, hay que pensar primero, respira y pensamos... dicen que son 6 piruletas y te preguntan ¿Cuántos niños hay en la fiesta?

Alum: Aquí tenemos que un niño son 3 piruletas, 3 piruletas para uno
Inv: Que hiciste, hiciste un montoncito con 3 piruletas
Alum: Si
Inv: Y le pusiste un niño, ahí hay un montoncito con 3 piruletas y le pusiste una carita con un niño
Alum: Un niño 3 piruletas
Inv: Ya, y que vamos a hacer después
Alum: Luego, los 6 niños, voy a coger otro montoncito de piruletas
Inv: Ya, cuántas piruletas tienes ahora
Alum: 1, 2, 3, he cogido ya 7
Inv: Y cuántas te dicen que tienes que coger
Alum: 6, le vamos a quitar una
Inv: Devolvemos una
Alum: Serán 3 para cada uno
Inv: Y son
Alum: Pues 3 para cada uno
Inv: Y cuántos niños son entonces
Alum: Pues 6... ay, aquí voy a hacer la serie otra vez, pero de a una
Inv: 3 piruletas, un niño, y aquí tú dices 3 piruletas
Alum: 3 niños... oh, madre mía
Inv: Esta muy difícil
Alum: Si el 6 ya si
Inv: El 6 esta difícil, lo tratamos de hacer
Alum: Vale
Inv: Mira, dijiste 3 piruletas
Alum: O cuatro
Inv: No le podemos poner 4
Alum: 8
Inv: Porque no
Alum: Porque son 3
Inv: Cada niño va a quedar con cuántas piruletas
Alum: Uno
Inv: Y cuántas piruletas dijo la mamá que iba a comprar
Alum: Pues 3
Inv: 3, entonces
Alum: Otra vez un niño no
Inv: Un niño
Alum: 3 piruletas
Inv: Otro niño
Alum: 3 piruletas
Inv: Para 6 piruletas, cuántos niños necesito
Alum: Pues 6
Inv: Mira, cuántas piruletas tengo ahí
Alum: 6
Inv: Y cuántos niños tengo
Alum: 6
Inv: Mira, cuántos niños son
Alum: 2... aquí ahora tenemos 2 pero, si a este le ponemos estas y estos 2
Inv: Cuántos niños vas a tener
Alum: 3 y 3

Inv: Ya
Alum: ¿Pongo eso?
Inv: Si coloque eso y lo que usted pensó
Alum: Una carita y otra carita, mira lo voy a hacer chinita
Inv: Pero...
Alum: O durmiendo
Inv: Durmiendo me suena mejor, y para 15 piruletas
Alum: A ver 3, 4... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, a ver... bueno aquí son 10 porque no han sobrado niños
Inv: Ya, es muy difícil, ¿te estoy haciendo pensar mucho?
Alum: A ver cómo podemos repartir 15
Inv: Ya, 15 qué, mira bien, 15 piruletas
Alum: A ver 1, 2, 3, 4, 5,
Inv: Te acuerdas cuando la semana pasada la seño trajo fresas, o no estuviste
Alum: Si estuve, a ver, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, a ver ahora cuántas sobran, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, por lo menos han sobrado un poquito más
Inv: Ahí tienes 15 piruletas, cuántos niños necesitas
Alum: Pues 15, vamos a colocarlo aquí ¿no?
Inv: Si vamos a colocarlo ahí
Alum: Alá, de la más pequeña a la más grande... no la de los globitos no
Inv: Los globos eran los mas difíciles, devolvemos las piruletas
Alum: Devolvemos las piruletas y traemos globos
Inv: Un niño
Alum: 5
Inv: 5 globos
Alum: 1 niño 5 globos, 3... a ver cuánto queda
Inv: Queda una sola página, pero si no quieres, no la hacemos no se preocupe
Alum: Bueno, si la quiero hacer
Inv: Un niño
Alum: 5 globitos
Inv: 10 globos, a cuántos niños le puedo repartir si tengo 10 globos
Alum: Pues 5 para cada uno
Inv: 5 para cada uno, cuántos niños son entonces
Alum: A ver... 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... nos quedamos en 10, ponemos 1, 2, 3, 4, y 5, 1, 2, 3, 4 y 5
Inv: Entonces cuántos niños necesito
Alum: Pues 10
Inv: 10 niños, para 10 globos
Alum: 10 niños para 5 globos, 10 globos creo
Inv: ¿Esta cansadita?
Alum: 1, 2, 3, 4, 5 y 1, 2, 3, 4, 5, cada uno tiene su globito
Inv: A cada uno le repartiste un globito y cuánto le tenías que repartir, para cada niño
Alum: Hay ahora como los separo yo, 10 globitos para cada niño
Inv: 5 globitos para cada niño
Alum: Pero estamos en éste
Inv: Tengo 10 globitos pero no sé cuántos niños van a la fiesta
Alum: En ese ya me he hecho un líto
Inv: Ya, no te preocupes pasemos a la otra, esa se te hizo un lío, mira la última

Alum: Uuuu, esa me está gustando
Inv: Dice, completa la lista de comprar, ésta es la lista de compras que le vamos a dar a la mamá de Lola, le vamos a decir, mamá de Lola, tienes que comprar 9 piruletas,
Alum: 9 piruletas
Inv: Cuántos niños, cuántas piruletas le correspondían
Alum: A ver
Inv: Revisa, podemos revisar las otras hojas
Alum: $3 + 3, 6... + 7, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, +$ otros 7, a ver ya me he hecho un lío, $3 + 3$
Inv: Pero que estás haciendo, a ver cuéntame
Alum: Sumando los niños
Inv: Vas a sumar todos los niños
Alum: Hombre, $3 + 7, 3, 4, 5, 6, 7, ...21, 22,$ esos son los niños por aquí
Inv: Ya
Alum: $23, 24, 25, ..., 31, 32, 33, ...46, 47, 48, ... 56, 57, 58, ..., 69, 70, ... 92, 93, 94, ... 100, 101,$ ya he sumado 5, 25
Inv: 101
Alum: Uhlala
Inv: Sabes escribir el 101
Alum: Si
Inv: Y cuántos gorros necesito, si hay 101 niños
Alum: Pues 101 gorros
Inv: Te paso confort, aquí tienes pañuelos... te cansaste
Alum: Si un poquito

Alumno 15 (00:31:28)

- Inv: Ya, vamos a revisar lo que hicimos ayer, ¿te acuerdas lo que hicimos ayer?
- Alum: Si
- Inv: Estuvimos trabajando en el cumpleaños de Lola
Cuéntame algo sobre la primera parte, ¿qué te pareció? La de los gorros
- Alum: Bien, me gustó mucho
- Inv: ¿Era difícil? ¿Era fácil?
- Alum: Fácil
- Inv: ¿Qué descubriste?, ¿descubriste algo?
- Alum: No, porque yo sé que si hay un niño y da un gorro pues en todos es lo mismo
- Inv: ¿Cómo es lo mismo? explícame que significa lo mismo
- Alum: Por ejemplo que vienen 6 niños pues entonces necesitamos 6 gorros
- Inv: Eso significa lo mismo 6 niños 6 gorros
- Alum: Si
- Inv: Ya, por eso tú hiciste 5 niños 5 gorros, 8 niños 8 gorros, 10 10 y 20 20
- Alum: Si
- Inv: Y que le podríamos decir a la mamá, porque acuérdate que la mamá no es muy buena para las cuentas, entonces que le podemos decir a la mamá
- Alum: Que coja 10 gorros para 10 niños
- Inv: Ya, pero la mamá te va a decir, uf tengo un problema, vinieron 13, que ya no sirven los 10 gorros, vienen 13 niños, me perdí ya
- Alum: Tiene que coger 13 gorros
- Inv: Y por qué te va a preguntar la mamá
- Alum: Porque ella no sabe si es que hay para 10 niños 10 gorros o hay más o hay menos
- Inv: Entonces primero necesitamos saber cuántos niños son. Esa estaba fácil, la encontraste fácil. ¿Qué te pasó con las piruletas? ¿La encontraste fácil?
- Alum: Un poco
- Inv: Un poco fácil y cuéntame que hiciste en las piruletas
- Alum: Que si un niño viene necesitamos 3 piruletas, si 2 vienen 6,
- Inv: ¿Por qué?
- Alum: Porque uno se lleva 3 y otro se lleva otros 3
- Inv: Entonces son
- Alum: 6
- Inv: 6, ya
- Alum: Y lo mismo con éste
- Inv: Y cuéntame, acuérdate que nuestro fin es explicarle a esa mamá que no le gustan las matemáticas y que se le hacen muy difíciles las cuentas, le vamos a explicar a esa mamá que tiene que hacer ella
- Alum: Que tiene por ejemplo 5 niños tiene que darle a cada uno 3 piruletas
- Inv: Eso le tenemos que explicar a la mamá. ¿Y le quedará claro cierto?
- Tu madre es buena para las cuentas
- Alum: Sí, mi madre si
- Inv: Entonces le vamos a explicar que... ¿qué dijiste recién?
- Alum: Que si vienen 10 niños a cada uno le tenemos que dar 3 piruletas
- Inv: Y si vienen 100 niños
- Alum: Uuu, a cada uno 3 piruletas
- Inv: Y eso es mucho
- Alum: Si y aquí pone el número

Inv: Ya... ok. ¿Cuéntame que te paso con los globos?

Alum: Ya esta es más difícil

Inv: Y por qué dices que es más difícil

Alum: Porque un niño se lleva 5 globos, entonces 2 niños se llevan 10 porque $5 + 5$ es 10 y si aquí son 10, $10 + 1$, $+ 5$ más son 15

Inv: Me dijiste $5 + 5$ más

Alum: Si

Inv: Son 15

Alum: Son 10 y para 3 niños, como 2 son 10 pues le ponemos 5 globos más y ya son 15

Inv: Pero sabes qué. Ese pensamiento está muy bien, porque tu estás diciendo, si ya tengo 10 le agrego 5, pero eso te jugo en contra porque cuando tu dijiste 10 niños son...

Alum: 50

Inv: Y 20 niños

Alum: Son 60

Inv: ¿Por qué?

Alum: Porque cada niño se lleva 5 globos

Inv: Ya, entonces 10 niños

Alum: 10 niños se llevan 5 cada uno

Inv: Ya, 10 niños se llevan 5 cada uno y da 50 globos

Alum: Si

Inv: Y 20 niños

Alum: Son 60

Inv: ¿Por qué?

Alum: Porque se lleva, este se lleva 5 este otros 5 y así

Inv: Y a la mamá que le vamos a decir

Alum: Pues que si tenemos 20 niños que ella tiene que comprar 60 globos y darle 5 a cada niño

Inv: Y la mamá quedará contenta con eso, podrá sacar las cuentas

Alum: Si

Inv: Ok, muy bien. Mira colócale nombre

Alum: Aquí

Inv: Sí, donde dice nombre. Te sacas buenas notas

Alum: Siempre

Inv: Miremos esa, dice 3 niños, 3 gorros, 7 gorros

Alum: 7 niños

Inv: Y como lo supiste tan rápido

Alum: Porque ésta es como la de los gorros

Inv: Por qué repasamos esta

Alum: Si

Inv: Y en esta ¿qué habías dicho de los gorros?

Alum: Que si tenemos 1 niño es 1 gorro

Inv: Entonces 7 niños, acuérdate que puedes dibujar escribir, escribir un número, lo que te salga más fácil... 12 gorros

Alum: 12 niños, espérate porque voy a dibujar

Inv: Te gustó la actividad de ayer

Alum: Si

Inv: Te gustan las matemáticas

Alum: Si

Inv: 12 gorros
Alum: 12 gorros 12 niños
Inv: Ok pasamos a la otra
Alum: Vale
Inv: No estás cansada
Alum: No
Inv: Mira siempre pasa esto, léeme
Alum: Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños ella quiere un gorro de princesa una corona
Inv: Pasa eso, la niña del cumpleaños quiere un gorro diferente
Alum: 2 niños, pues necesitamos una corona y dos gorros
4 niños, pues entonces necesitamos 4 gorros y una corona
Inv: Y para 9 niños
Alum: Para nueve, necesitamos 9 gorros y una corona
Y lo mismo con 12
Inv: Y como descubriste eso tan rápido
Alum: Porque he visto que 2 niños son 2 gorros y con la corona, pues son 3
Inv: Eres muy rápida, yo ni siquiera alcancé a decirte que había que hacer y ya estabas lista
Alum: Me he equivocado, este es 5 en vez de 4
Inv: No tiene que ser perfecto, no te preocupes
Ya para 9, acuérdate que podemos escribir, podíamos poner el número, podíamos hacer alguna cuenta o podíamos dibujar, o sea puedes ocupar cualquier cosa para trabajar
Alum: Ya he puesto el de 9
Inv: Pusiste el del 9 y el del 12
Alum: Es que tengo un cuadril
Inv: Es muy fácil. Yo pensé que te iba a pillar y que iba a poner algo muy difícil
Vamos a ver si la siguiente actividad te es más complicada, pero como tú eres muy listilla, no te voy a pillar nunca... veamos si la siguiente actividad es más difícil
Alum: Yo con el primer dibujo que ya está hecho estoy lista
Inv: ¿Con el primer dibujo estás lista? A ver
Alum: 1 niño 3 piruletas
Inv: ¿6 piruletas?
Alum: 6 piruletas, entonces son 2 niños, es como el otro de las piruletas
Inv: Y 15 piruletas, ese ya no es parecido al otro ¿quieres ocupar piruletas?
Alum: Ya
Inv: Ok saquemos piruletas... aquí hay piruletas... tienes 15 piruletas
Alum: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15 piruletas... 3 piruletas
Inv: Cuéntame lo que vas haciendo
Alum: Mira, 1 niño 3 piruletas, así y después cuento los grupos y así sé cuántos niños son
Inv: Pero así de sencillo, ya a ver hazlo, me parece muy sencillo
Alum: 1, 2, 3, 4 y 5
Inv: Y eso es todo
Alum: Si
Inv: Ya a ver... tampoco te pille con las piruletas. Listo, sacamos las piruletas.
Da vuelta la página
Alum: Voy a ordenar aquí las piruletas

Inv: No te pille con esa. Vamos a ver otra, los globos, ahí hay globos y hay niños también

Alum: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10

Inv: Cuéntame lo que vas a hacer

Alum: Lo mismo que con las piruletas

Inv: Ya y que hiciste en el de las piruletas

Alum: Coloque tres así

Inv: ¿Tres?

Alum: No 5

Inv: Como dijiste lo de las piruletas, te confundiste con el 3

Alum: Es verdad... 2

Inv: 2 ¿qué?

Alum: 2 niños

Inv: Ya pongamos 2 niños. Y ahora me dicen 25 niños

Alum: Eso es mucho

Inv: ¿Es mucho? Si quieres puedes ir armando montoncitos, corremos la prueba y puedes ir armando montoncitos

Alum: 1, 2, 3, 4 y 5

Inv: Que tienes ahí

Alum: Un montón
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20...

Inv: Te liaste

Alum: Si

Inv: Empieza a contar de nuevo, aquí tienes 5

Alum: ... 20, 21, 22, 23, 24 y 25.... 1, 2, 3, 4 y 5

Inv: 5, cuéntame qué hiciste

Alum: 5 niños

Inv: ¿Por qué?

Alum: Porque hay 25 y entonces muestro como dice 1 niño 5 , entonces, hago grupos de 5 hasta que llegue al 25

Inv: Y si tuviéramos 100 globos

Alum: Esos son muchos seño

Inv: Que tendríamos que hacer

Alum: Hacer montoncitos hasta llegar a 100... pero no tenemos tantos globos

Inv: Pero si los tuviéramos podríamos hacerlo

Alum: Si

Inv: Ok, nos queda la última actividad. Dejemos los globos todos juntitos por allá, los vamos a ocupar después, hasta ahí no te he pillado

Alum: No

Inv: Esta es más difícil porque le vamos a hacer a la mamá de Lola una lista de compra, le vamos a decir cuántos niños van a la fiesta, cuántos gorros debe comprar, cuántos globos, fijate, pero me dicen que son 9 piruletas

Alum: Entonces, aquí son 9 aquí son 9 y aquí son 9, ¿no?

Inv: No lo sé, a ver pensemos, lo único que sabemos es que

Alum: Tenemos 9 piruletas

Inv: Entonces empezamos con las 9 piruletas

Alum: 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Inv: Ya, vamos a correr los globos... ¿Qué hacemos con esas 9 piruletas?

Alum: 9 piruletas, entonces... a ver qué puedo hacer

Inv: Que sabíamos de antes... con las piruletas

Alum: Que si venía... no me acuerdo seño
Inv: Pero revísalo, lo tienes por ahí anotadito
Alum: Aquí, si viene 1 niño son 3 piruletas
Inv: ¿Eso lo sabíamos de antes?
Alum: Si
Inv: Entonces qué hacemos con las 9 piruletas
Alum: Entonces haciendo grupos de 3, así...
Inv: Que podemos descubrir ahí
Alum: Que aquí hay 3 niños
Inv: Ya, podemos saber cuántos niños son
Alum: 3
Inv: Los vas a dibujar o no, vas a escribir el número no más. Pero me falta saber cuántos gorros y cuántos globos
Alum: A ver de acuerdo... mmm 9
Inv: A ver pensemos, 9 piruletas hiciste montoncitos
Alum: Si
Inv: Y te dieron 3 niños
Alum: Si
Inv: Si tengo 3 niños, cuántos gorros necesito
Alum: 3
Inv: Y por qué son 3
Alum: Porque si hay 3 niños necesito 3 gorros
Inv: Hasta el momento qué tenemos
Alum: Tenemos 3 niños, 3 gorros y 9 piruletas, entonces 9 piruletas a ver con el de los globos
Inv: Ya me devuelvo, para ver qué pasó con el de los globos
Alum: Aquí, ¿donde está lo de los globos?, entonces 1 niño 5 globos
Inv: Devuelve las piruletas para que no se te confundan
Alum: Cuántos globos son, 5... 1, 2, 3, 4, 5
6, 7, 8, 9, 10... 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 uh, ya me he pasado
Inv: Entonces tienes que devolvete
Alum: Si, 5, 6, 7, 8, 9, 2
Inv: Cuantos niños eran
Alum: Eran 3 y eran 9 piruletas, entonces necesitamos 2 globos
Inv: ¿2 globos?
Alum: Era.... Necesitamos 9 globos... 9 globos seño
Inv: ¿9?, estamos bien.

Alumno 27 (00:20:27)

- Inv: Te acuerdas que el otro día estuvimos trabajando en esta actividad, ¿cómo te pareció, te pareció muy complicada, fácil? Ok, la primera actividad que hicimos, vamos a ver qué hiciste tu en tu prueba, la primera actividad que hicimos fue la de los globos, que descubriste tu en los gorros
- Alum: Esos gorros
- Inv: Pero dime el número, estas muy disfónica, te duele la garganta, dijiste, un niño
- Alum: Un niño, un gorro, dos niños, dos gorros, tres niños 3 gorros, 4 niños, 4 gorros
- Inv: Y porque escribiste eso, como lo descubriste, porque sabías que eran 4 gorros
- Alum: Porque mire los niños
- Inv: Porque veías los niños y que más hacías, porque aquí ya no hay niños y tu igual supiste cuantos gorros eran
- Alum: Porque he copiado 5 aquí, 8 aquí
- Inv: Te guiaste por los números, 5
- Alum: 5
- Inv: Como le podemos explicar a la mama de Lola cuantos gorros tienen que comprar, que le podemos decir a una mama, a esa mama. Piensa que tu están conversando con ella y le tienes que decir cuántos gorros tiene que comprar
- Alum: Mama tienes que comprar 100 gorros para el cumpleaños
- Inv: Porque?, ella va a preguntar porqué
- Alum: Porque vienen al cumpleaños 100 niños
- Inv: Y si hacemos un cumpleaños más pequeños y vienen 50 niños
- Alum: Po la mamá tiene que comprar 50 gorros
- Inv: ¿Por qué?
- Alum: Porque algunos van a tener gorros y otros no si no lleva 50
- Inv: Entonces con 50 estaríamos bien, estas bien malita de tu garganta..., te acuerdas que después pasamos a las piruletas y dijimos
- Alum: 1 niño, 3 piruletas, 2 niños, 6 piruletas, 3 niños, 3 piruletas y 4 niños 3 piruletas
- Inv: Esa parte yo no la entendí, me la puedes explicar, porque me pones 3 piruletas, esa es la parte que no entendí...
- Alum: Porque....
- Inv: Explicame más o menos lo que hiciste, te acuerdas lo que hiciste
- Alum: No
- Inv: No te acuerdas lo que hiciste el miércoles, lo podemos hacer con monitos, a ver, 1 niño
- Alum: 3 piruletas
- Inv: Otro niño, anda explicándome lo que vas haciendo
- Alum: Otro niño, 3 piruletas
- Inv: Cuéntame, que estás haciendo
- Alum: Que para cada niño, tengo que poner 3 piruletas
- Inv: Porque, te acuerdas lo que había dicho tu compañero
- Alum: Sí, 6
- Inv: 1 niño...
- Alum: 3 piruletas, 3 piruletas, 3 piruletas...
- Inv: Como le vamos a explicar a la mama de Lola, a ti te gusta hacer cuentas, te gustan los números, a la mama de Lola no le gustan, entonces le tenemos que explicar a la mama de Lola cuantas piruletas tiene que comprar
- Alum: 6
- Inv: Para cuántos niños

Alum: Para 6
Inv: Ya, ok, ahí le explicamos a la mamá de Lola. Veamos los globos, acá están los globos, recogemos las piruletas y mira allá están los globos. mira lo que tú me pusiste, 1 niño

Alum: 5 globos
Inv: 2 niños

Alum: 5 globos
Inv: 1 niños 5 globos, aquí, otro niño

Alum: 2 globos, 5 globos
Inv: Ok, y otro niño

Alum: 5 globos
Inv: Y otro niño

Alum: 5 globos
Inv: Y otro niño

Alum: 5 globos
Inv: Y así, si invitamos 100 a la fiesta que tenemos que hacer

Alum: Po comprar 100 globos
Inv: Ya, y si invitamos a 20

Alum: Pos 20 globos
Inv: Y si invitamos a 3

Alum: Po 3 globos
Inv: Pero si invitamos a 1 ya son 5

Alum: 1
Inv: Le vas a dar un globo

Alum: Si
Inv: Como le vamos a explicar entonces a la mamá de Lola, como le vas a explicar tu a la mamá de Lola

Alum: Que si fueran a la fiesta 100 niños que comprara 100 globos para cada niño
Inv: 100 globos para cada niño?

Alum: No, 5 globos para cada niño
Inv: Cuantos?

Alum: 5
Inv: 5, ok, yo creo que la mamá ahí va a entender, si o no
A ver, ¿quieres hacer esta? Recuerda que si estas cansadita me dices, se parece a la que estuvimos haciendo el otro día, aquí tienes goma y lápiz... 3 niños

Alum: 3 gorros
Inv: 7 gorros

Alum: 7 niños
Inv: Por qué... por qué lo descubriste tan rápido

Alum: 7 niños
Inv: Explícamelo que pensaste, que pensaste

Alum: Que 3 niños, 3 gorros, 7 niños, 7 gorros y 12 niños, 12 gorros
Inv: Por qué... ya, escríbelo y pon tu nombre... lee

Alum: Lola quiere un gorro diferente al de todos los niños, ella quiere un gorro de princesa
Inv: Ahí hay una corona, ella quiere que le compren ese gorro de corona, porque es la de la fiesta... vamos a tener estos gorros y vamos a tener niños, mira 2 invitados, dos niños invitados, mira cuantos gorros hay que comprar

Alum: 2, 3
Inv: Si, ya, 4 invitados, 2 invitados, dos gorros y la corona, 4 invitados... acá tienes

gorros y acá tienes coronas
Alum: 4 gorros y 1 corona
Inv: Y como lo descubriste... ya escribemelo... 4 gorros y una corona... ya, 9
invitados
Alum: 9 gorros y una corona
Inv: 12 invitados
Alum: 12 gorros y una corona
Inv: Las piruletas, un niño
Alum: 3 piruletas
Inv: 6 piruletas, cuántos niños
Alum: ¿Hay 6 piruletas?
Inv: Ahí dibujaste 6 piruletas, ¿Cuántos niños?
Alum: 6
Inv: 6 niños, 15 piruletas, cuántos niños serán
Alum: 15
Inv: los globos, un niño
Alum: 5 globos
Inv: 10 globos, ¿cuántos niños?
Alum: 10
Inv: Coloque los 10, ¿no quiere ocupar materia?... ¿no?, 25 globos
Alum: 25 niños
Inv: Puedes escribir el número, para que no hagas tantas caritas. Da vuelta la hoja a ver si la podemos hacer, 9 piruletas, acá vamos a completar la lista de compras para que no sobre ni falte ninguno, 9 piruletas, ¿Cuántos niños van a esa fiesta?
Alum: 9
Inv: Y cuantos gorros necesito
Alum: 9
Inv: Y cuantos globos necesito
Alum: 9
Inv: Que fácil, ¿sí?, ya
Alum: 4, 5, 6, 7, 8, 9
Inv: Listo, muchas gracias, estamos listos.

Anexo G

Material manipulativo

















