MULTIPLICACIONES CON CIFRAS DESCONOCIDAS: PROBLEMAS PARA PRACTICAR Y COMPRENDER EL ALGORITMO ESTÁNDAR DE LA MULTIPLICACIÓN[1]

Jesús Gallardo Romero
José Luis González Marí
Departamento de Didáctica de la Matemática,
de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales.
Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Málaga.

INTRODUCCIÓN

En las aulas de Primaria se dedica una cantidad de tiempo considerable a la enseñanza del algoritmo estándar escrito de la multiplicación, a pesar de lo cual una buena parte de los alumnos de este nivel, e incluso algunos de Secundaria, tienen dificultades y cometen errores cada vez que utilizan este método de cálculo (Dickson, Brown y Gibson, 1991; Kamii, 1995).

Bien es verdad que se suelen utilizar las tareas escolares más comunes y conocidas para la enseñanza del algoritmo, pero también es cierto que se prescinde de otras situaciones y tareas que pueden ser de enorme utilidad para completar la formación de los alumnos. Así, al quedar sin explorar una parte de los fenómenos asociados al conocimiento, se ofrece a los alumnos una información incompleta y deficiente (Rico, 1997) que conduce a un aprendizaje parcial y, consecuentemente, a una comprensión limitada que favorece la aparición de errores. Por este motivo, consideramos necesario que las tareas empleadas en el aula abarquen el mayor número posible de situaciones y fenómenos diferentes en los que aparezca o tenga sentido el conocimiento; en nuestro caso, el conocimiento sobre el algoritmo de multiplicar.

En este artículo se presenta una parte del estudio realizado sobre un tipo de tareas matemáticas, a las que denominamos "multiplicaciones con cifras desconocidas" (MCCD), en las que el algoritmo escrito de la multiplicación se muestra de una forma singular que nada tiene que ver con los tradicionales ejercicios de cálculo ni con los usuales problemas aritméticos de enunciado verbal[2].

A continuación, exponemos las principales características de estas tareas, destacamos su potencialidad didáctica para desarrollar determinadas capacidades cognitivas, analizamos

---

[1] **Gallardo, J. y González, J. L. (2002).** Multiplicaciones con cifras desconocidas: problemas para practicar y comprender el algoritmo estándar de la multiplicación. *Epsilon*, 54, 469-478.

[2] Actividades, en nuestra opinión, necesarias para complementar la formación, aunque insuficientes para alcanzar un nivel de comprensión aceptable. Téngase en cuenta que tales tareas, en nuestra opinión y en la de otros autores como Verschaffel y De Corte (1997), son breves fragmentos de texto estereotipados, semánticamente empobrecidos, que suelen plantearse en la escuela para que los alumnos practiquen y mejoren su destreza en el manejo del algoritmo.

su presencia en los libros de texto de matemáticas y proponemos un método de construcción a partir de sus elementos básicos.

MULTIPLICACIONES CON CIFRAS DESCONOCIDAS

La expresión *multiplicación con cifras desconocidas* (MCCD) hace referencia a aquellas multiplicaciones de números naturales resueltas con el algoritmo tradicional pero con algunas cifras ocultas que hay que localizar. En el proceso a seguir para su construcción, las cifras que interesa ocultar se sustituyen por un símbolo (casi siempre suele ser un cuadrado, un punto o un asterisco) que será el mismo para todas ellas, independientemente de que las cifras que han de ser colocadas en cada posición sean iguales o no. Es decir, cifras diferentes no llevan asociadas símbolos distintos. Un ejemplo de actividad en la que hay que resolver una MCCD es el siguiente:

<< *Encontrar las cifras que completan la multiplicación* >>

$$
\begin{array}{r}
2\ * \\
\times\ *\ 3 \\
\hline
6\ * \\
*\ 3\ \ \\
\hline
*\ *\ 3
\end{array}
$$

Resolver una MCCD es un problema de matemáticas

Las multiplicaciones con cifras desconocidas pueden ser consideradas como verdaderos problemas matemáticos, puesto que, como veremos, poseen todas las características necesarias para ello a pesar de no estar enunciados verbalmente. Esto es así si se toma como referencia la siguiente noción de problema de matemáticas que adopta Carrillo (1998) después de revisar otras definiciones y analizar las coincidencias detectadas:

> "*El concepto de problema* [matemático] *debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la consciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento*" (Carrillo, J., 1998, p. 87)

En efecto, salvo un caso especial que analizaremos en lo que sigue, las multiplicaciones con cifras desconocidas son tareas para las que no existe ningún procedimiento mecánico o algorítmico que permita resolverlas con certeza de manera inmediata. Por tanto, podemos decir que: a) son tareas que entrañan dificultad; b) la resolución de una de ellas no garantiza la de las demás. El alumno interesado en obtener la solución de una MCCD tendrá que aplicar conocimientos matemáticos previamente adquiridos/construidos a lo largo de un proceso de resolución que debe ir creando paulatinamente y con pleno sentido para él. En consecuencia, podemos afirmar que las MCCD se ajustan a la definición mencionada y se pueden identificar como auténticos problemas de matemáticas.

Mención especial merece el caso de aquellas tareas de este mismo tipo en las que las únicas cifras conocidas son las del multiplicando y el multiplicador. Son tareas que presentan, por tanto, el formato usual de las multiplicaciones escolares y se resuelven mediante el procedimiento mecánico propio del algoritmo estándar, por lo que, a diferencia de las demás, son simples ejercicios y no verdaderos problemas en el sentido ya mencionado. A pesar de ello, las vamos a considerar también dentro de la categoría de las MCCD en atención a que presentan un formato similar al de las demás (ver figura 1) y reúnen la mayoría de las condiciones establecidas.

```
      3 4 5                2 3
      x 2 3              x * *
   ---------            -------
   * * 3  5              1 * 5
   6 * *                 * 3
   ---------            -------
   * 9 3  5              3 * 5

 MCCD (Ejercicio)   MCCD (Problema)
```

Figura 1.- Distintas modalidades de MCCD

Por otra parte, ya hemos mencionado que las multiplicaciones con cifras desconocidas son problemas *no verbales* que poseen un formato común pero que pueden ser muy diferentes entre sí en cuanto al proceso requerido para su resolución. Al mismo tiempo, por el contexto matemático en el que se desarrollan, se pueden situar dentro de la categoría de problemas *aritméticos*, ya que no es necesario recurrir al álgebra para resolverlos. Asimismo, se trata de problemas *de hallar* y no de demostrar, *de búsqueda* y no de aplicación (Puig, 1996), *puros* por estar inmersos en un contexto matemático, *estructurados* por estar bien formulados y por tener que diseñar el resolutor el procedimiento de solución y *cerrados* por ser precisos en su planteamiento y en su solución, aunque admitan varias respuestas correctas (Carrillo, 1998).

MCCD, cognición y aprendizaje matemático

Es evidente que el éxito en la resolución de una MCCD requiere que el resolutor posea y manifieste competencia en tres dominios diferentes:

(a) Las MCCD son problemas que han sido diseñados tomando como base el algoritmo tradicional de la multiplicación. Por tanto, para poder abordar un problema de estas características, es un requisito indispensable tener cierta destreza en la utilización del algoritmo. Esto supone conocer los hechos numéricos básicos, controlar el mecanismo de "llevadas" y ser capaz de recorrer, exhaustivamente y en el sentido apropiado, la secuencia algorítmica establecida.

Interesa precisar que para resolver una MCCD el estudiante no necesita conocer la justificación del mecanismo interno del algoritmo, esto es, saber explicar hechos como la presentación de los cálculos en columnas o los desplazamientos hacia la izquierda de los productos parciales. En cambio, debe ser capaz de relacionar aspectos del funcionamiento y la estructura externa del algoritmo así como conocer las relaciones que existen entre las distintas partes que lo componen.

(b) Al ser verdaderos problemas matemáticos, el alumno que pretenda resolver una MCCD tendrá que hacer uso de su capacidad heurística. Nos referimos a un trabajo basado en el planteamiento, comprobación y posterior aceptación o refutación de conjeturas (Gavilán y Barroso, 1996).

Pero aquí, el uso de la capacidad heurística adquiere connotaciones especiales que tienen que ver con el papel que juega el algoritmo en la resolución de problemas. En efecto, dentro del procedimiento heurístico general seguido para resolver una buena parte de problemas de matemáticas hay una fase muy concreta, dentro de la denominada de *ejecución del plan* (Polya, 1965), que está reservada a las operaciones algorítmicas. Sin embargo, los procesos heurísticos y algorítmicos en las multiplicaciones con cifras desconocidas se relacionan entre sí de un modo particular, siendo tan estrechos los vínculos que se establecen entre ellos que resulta difícil identificar etapas de características puramente algorítmicas o puramente heurísticas. Ello se puede resumir diciendo que se trata de tareas que transcurren, o se encuentran inmersas, en un contexto algorítmico y que necesitan de procedimientos heurísticos para su resolución.

(c) Aunque las MCCD se pueden considerar como problemas aritméticos, el alumno se ve obligado a resolver mentalmente ecuaciones aritméticas en el transcurso del proceso de resolución. Por ejemplo, la primera MCCD de la figura 2 está diseñada de tal forma que obliga al estudiante a comenzar determinando la cifra oculta situada por encima del 2 y a la izquierda del 6. Para ello tiene que resolver la ecuación X + 2 = 3. De igual modo, la segunda multiplicación se resuelve hallando la solución de la ecuación 2X + 1= 13.

(i)
$$\begin{array}{r} * \, 2 \\ \times \, 1 \, 8 \\ \hline * * 6 \\ * \, 2 \\ \hline 9 \, 3 \, 6 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} * \, 7 \\ \times \, 2 \\ \hline 1 \, 3 \, 4 \end{array}$$

Figura 2

Parece ser, por tanto, que para resolver con éxito multiplicaciones con cifras desconocidas es necesario poseer y practicar competencias, capacidades y destrezas relacionadas con este tipo de cálculos mentales, propios de un pensamiento pre-algebraico. Alternativamente se puede decir, desde la consideración de la experiencia y el aprendizaje matemáticos, que las MCCD son problemas útiles para consolidar el pensamiento numérico y aritmético e iniciar la construcción de los pilares del futuro pensamiento algebraico.

Las MCCD en los libros de texto de matemáticas

Para hacernos una idea del tratamiento que se da a las MCCD en los libros de texto de matemáticas que actualmente se usan en la escuela, hemos revisado las series de libros correspondientes a las editoriales: Anaya, Bruño, Guadiel - Grupo Edebé, Santillana y SM desde 3º de Primaria hasta 2º de ESO y Vicens- Vives desde 3º hasta 6º de Primaria. En los 34 textos analizados se han localizado un total de 15 problemas donde aparecen MCCD que hay que resolver. La tabla 1 recoge la distribución de estos problemas por editorial y curso.

	CURSO					
EDITORIAL	**3º PRI**	**4º PRI**	**5º PRI**	**6º PRI**	**1º ESO**	**2º ESO**
Anaya	1 (G2)	1 (G2)	1 (G2)	0	2 (G2)	0
Bruño	0	2 (G2)	1 (G2)	0	0	0
Guadiel-Grupo Edebé	3 (G1)	0	1 (G2)	0	1 (G2)	0
Santillana	0	0	0	0	0	0
SM	0	1 (G2)	0	0	0	0
Vicens-Vives	0	0	0	1 (G2)	-	-

Tabla 1.- Número de problemas de MCCD por curso en cada libro de texto

Según la intención con la que se proponen podemos clasificar los problemas en dos grupos:

Grupo 1 (G1).- Problemas para ejercitarse con el algoritmo tradicional de la multiplicación. Por ejemplo:

<< *Copia las siguientes multiplicaciones y busca los números que faltan.*

```
  2 2 7          6 4 2          1 7 9
  x 2 4          x 1 5          x 4 6
  -----          -----          -----
   · 0 8        3 · · 0          · · 7 4
 · 5 ·          6 · 2           · 1 ·
 -------        -------         -------
 5 · · 8         · 6 3 0        · · · 4
```

>>

(Equipo Guadiel, 1993; 3º PRI; p.102)

Para resolver estas tareas sólo se necesita aplicar el algoritmo estándar del producto. En realidad son meros ejercicios mecánicos propuestos para que los alumnos practiquen con el algoritmo.

Grupo 2 (G2).- Problemas para incentivar el cálculo mental y el trabajo en Resolución de Problemas.

A diferencia del grupo 1, aquí las MCCD son auténticos problemas de matemáticas. Esta distinción queda reflejada claramente en el texto de 1º de ESO de Anaya (1996), en el que, con la indicación *"Vamos a ver ahora otros problemas de distintos tipos que los anteriores, cuya resolución, además de ser entretenida, te servirá para entrenar tu capacidad de razonamiento"* (p. 14), se plantea, entre otras, la siguiente actividad:

<< Completa las casillas que faltan, de todas las formas posibles, para que la multiplicación esté bien hecha.

```
   * * 8
     x *
  -------
  * 2 7 6
```

>>

(Colera et. al. 1996; 1º ESO; p. 16)

En cuanto al formato, las MCCD suelen presentarse acompañadas con la palabra "*Completa*". Por otra parte, algunas de las tareas encontradas son aisladas (sólo MCCD), mientras que otras proponen la resolución conjunta de varios algoritmos incompletos de las cuatro operaciones aritméticas básicas.

En resumen, concluimos que la presencia de las MCCD en los libros de texto es muy escasa, apareciendo la mayoría de las veces en las actividades de final de tema. Asimismo, da la impresión de que las pocas tareas encontradas han sido planteadas sin un patrón o guía de referencia que justifique la elección en cada caso. Además, se observa que no hay una intención de plantear un trabajo sistemático con ellas ni de utilizarlas abiertamente como medio para favorecer la comprensión del algoritmo y del sistema de numeración posicional o como instrumento para ejercitar el cálculo mental y adquirir destrezas de razonamiento. Ante el panorama descrito debemos concluir que, en nuestra opinión, se desaprovecha abiertamente la potencialidad didáctica de las MCCD como problemas de matemáticas que favorecen la construcción de relaciones, conceptos y propiedades en el campo numérico y aritmético y que facilitan el desarrollo, entre otros aspectos, de hábitos, pautas y esquemas de razonamiento así como de estrategias y capacidades cognitivas y heurísticas importantes para una adecuada y completa formación del pensamiento matemático.

Diseño de MCCD

Las multiplicaciones con cifras desconocidas de solución única se pueden generar a partir de unos pocos elementos básicos que nos permiten sistematizar el proceso de construcción y plasmar en él el recorrido heurístico que queramos que los alumnos sigan. Esto hace posible el control total del proceso de resolución, en el sentido de que si un alumno resuelve con éxito sabremos con toda seguridad cuál ha sido el tipo de razonamiento que ha realizado. Del mismo modo, es posible localizar con precisión el paso en el razonamiento o el momento del proceso en el que se ha cometido el fallo, en su caso, que ha impedido llegar a la solución. Estos elementos básicos son:

(a) *Cálculos*. En cualquier MCCD aparecen multiplicaciones y sumas de números de una cifra que hay que calcular para obtener la solución del problema.

(b) *Ecuaciones*. En el proceso de resolución de una MCCD localizamos dos tipos de ecuaciones diferentes. El primer tipo (EA) se presenta cuando se multiplica una de las cifras del multiplicador por otra del multiplicando, siendo alguna de ellas, o ambas, desconocidas. Existen catorce subtipos de EA de solución única que pueden aparecer en una MCCD. El segundo tipo de ecuación (EB) surge al sumar en columnas los resultados de los distintos productos parciales. Existen dos subtipos de EB de solución única. En la figura 3 se muestran dos ejemplos de MCCD donde hay que resolver una EA y EB, respectivamente.

€5
x 8
€40

EA: $8 \cdot Y_2 + 4 = D4$ $(=D \cdot 10 + 4)$

€€
x 14
€1€
€€
7 4€

EB: $1 + X = 4$ (primer paso en el proceso de resolución)

Figura 3.- MCCD que requieren resolver ecuaciones EA y EB

(c) Relaciones. Las distintas ecuaciones contenidas en las multiplicaciones con cifras desconocidas están conectadas entre sí por medio de tres relaciones diferentes:

- *Implicación* ($\longrightarrow$): La resolución de una ecuación en un paso argumental determinado provoca la aparición de otra en el paso siguiente. Sin embargo, esta última, una vez detectada, se resuelve sin necesidad de la primera (figura 4i).
- *Independencia* (+): Relación que representa ecuaciones sin conexión alguna que se resuelven de forma independiente y que aportan información necesaria para proseguir con la resolución de la MCCD (figura 4ii).
- *Simultaneidad* ($\left[\updownarrow\right]$): Relación que representa aquellas situaciones en las que hay que manejar varias ecuaciones a la vez para obtener la información requerida (figura 4iii).

€ €
x 8
21€

$\mathbf{EA_1} \longrightarrow \mathbf{EA_2}$

EA_1: $8 \cdot Y_2 + D = 21$
EA_2: $8 \cdot Y_1 = 5U$ $(= 5 \cdot 10 + U)$

5€
x 1€
€€
5 3
€€€

$\mathbf{EA_1} + \mathbf{EA_2}$

EA_1: $X_1 \cdot 5 + D = U$
EA_2: $1 \cdot Y_1 = 3$

€ €
x 1 6
€4 2
€€
€€2

$$\left\{\begin{array}{l} EA_1: 6 \cdot Y_1 = D_1 2 \\ EA_2: 6 \cdot Y_2 + D_1 = D_2 4 \end{array}\right.$$

Figura 4.- MCCD con distintos tipos de relaciones

Los elementos mencionados pueden combinarse de múltiples maneras para diseñar múltiples tipos de MCCD con recorridos heurísticos de diferente dificultad. La ejecución de cálculos, la resolución mental de ecuaciones y la detección de relaciones se presentan, por tanto, como las tres situaciones problemáticas básicas que hay que afrontar en la resolución de una MCCD. La figura 5 recoge algunos ejemplos de MCCD con sus correspondientes recorridos heurísticos representados en términos de cálculos, ecuaciones y relaciones. Se deja al lector la tarea de practicar la construcción de tareas escalonadas en dificultad para alcanzar fines determinados.

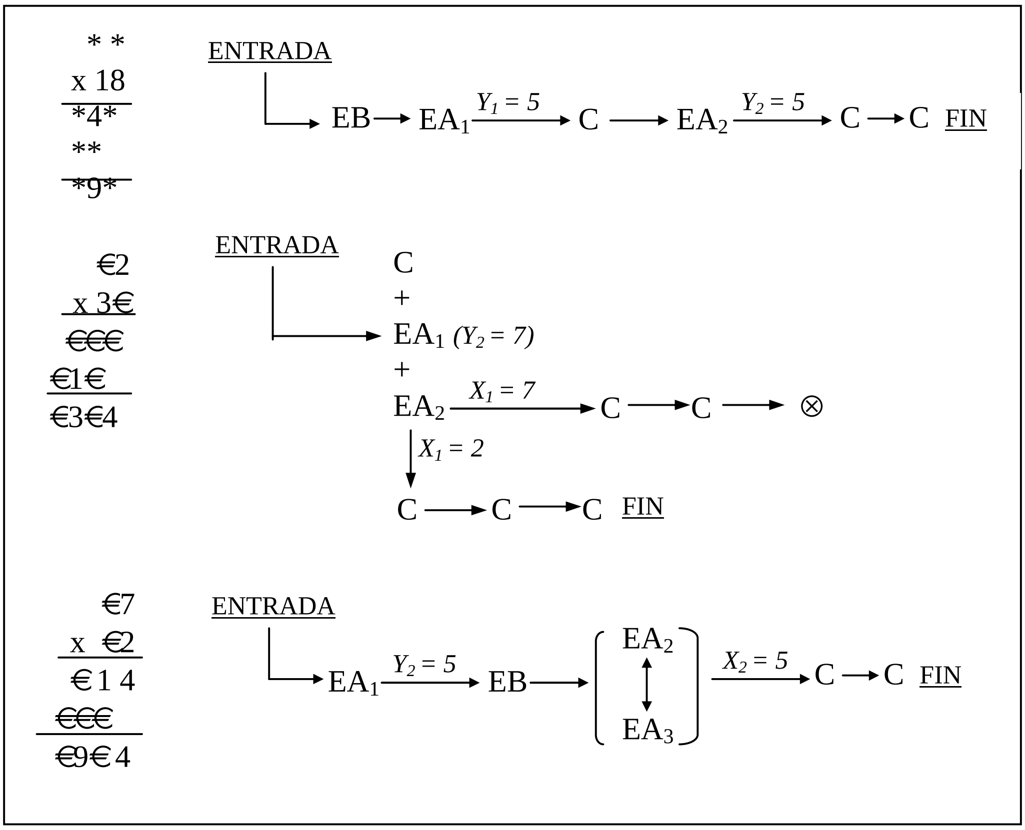

Figura 5.- Ejemplos de MCCD con sus recorridos heurísticos

CONCLUSIÓN

El aprendizaje del algoritmo estándar de la multiplicación no tiene porqué ser una tarea tan mecánica como viene siendo habitual en las aulas de Primaria. Las admitidas como inevitables referencias a lo memorístico, a la aplicación de fórmulas o a la ejecución de procedimientos a modo de rituales sin sentido y separados de la comprensión, pueden ir dando paso a nuevos puntos de vista más ricos, evolucionados y didácticamente más efectivos. Nuevos enfoques donde adquieren un protagonismo especial los distintos usos y utilidades del algoritmo de la multiplicación así como las diferentes situaciones y fenómenos que le dan sentido.

Con el análisis realizado en los apartados anteriores hemos querido presentar un tipo de tareas que forman parte de la fenomenología del algoritmo tradicional de la multiplicación de números naturales. Si desde el ámbito escolar se quiere garantizar una comprensión lo más completa posible de dicho algoritmo, su sentido, su estructura y funcionamiento, o del propio campo de la numeración y las operaciones aritméticas, consideramos conveniente que el alumno participe en actividades de resolución de MCCD diseñadas con intención y de acuerdo a su nivel. De lo contrario, estamos limitando el acceso al conocimiento, impidiendo mayores cotas de comprensión y cortando la posibilidad de dar sentido racional a las rutinarias tareas escolares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARRILLO, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. 1ª edición, Huelva. Universidad de Huelva Publicaciones.

COLERA, J., GAZTELU, I., GUZMÁN M. DE y GARCÍA, J. E. (1996). *Matemáticas 1º ESO*. 1ª edición, Madrid. Anaya.

DICKSON, L., BROWN, M. y GIBSON, O. (1991*). El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid. Labor.

EQUIPO GUADIEL (1993). *Matemáticas 3º Primaria*. 1ª edición, Barcelona. Guadiel-Grupo Edebé.

GAVILÁN, J. Mª y BARROSO, R. (1996). "Didáctica de los algoritmos a través de reconstrucciones". *Epsilon*, 35, 193-202.

KAMII, C. (1995). *Reinventando la aritmética III.* 1ª edición, Madrid. Visor.

POLYA, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. 2ª edición, México.Trillas.

PUIG, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. 1ª edición, Granada. Comares.

RICO, L. (1997). "Los organizadores del currículo de matemáticas". En L. Rico (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* 1ª edición, Barcelona. Horsori.

VERSCHAFFEL, L. y DE CORTE, E. (1997). "Word Problems: A Vehicle for Promoting Authentic Mathematical Understanding and Problem Solving in the Primary School?" En T. Nunes y P. E. Bryant (eds.) *Learning and Teaching Mathematics* (pp. 69-97). 1ª edición, Londres: Psycology Press, Ltd.