En busca de un modelo matemático[1]

Marco Barrales Venegas
Colegio Alemán de Concepción. Chile
mbarrale@dsc.cl

Resumen
El objetivo de nuestra investigación fue ajustar un modelo matemático a un problema real. Específicamente centramos nuestra atención en determinar un modelo matemático referente al aprendizaje de una rata de laboratorio en resolver un laberinto, es decir controlamos el tiempo que invierte la rata en completar el recorrido del laberinto y el número de veces que se repetía la experiencia.
Después de aplicar la interpolación Lagrangeana el comportamiento de las ratas se ajustó a una rama de una función hiperbólica, naturalmente se realizaron algunas restricciones para concluir con una expresión (modelo) más compacta.

Introducción

Uno de los conceptos que siempre a merecido mucha importancia por su carácter medular en los cursos universitarios es el referente a funciones. Regularmente este concepto se expone a los estudiantes en forma de defición, la misma que aparece en los libros de álgebra y cálculo. En muchas ocaciones no se involucra este concepto ni a la realidad en la cual vivimos ni al contexto real, y queda la idea en el estudiante de una definición meramente abstracta.
En este trabajo se pretende reflexionar sobre un fenómeno y acercarnos a él desde una perspectiva matemática. Concretamente nuestro trabajo de investigación se centro en determinar un modelo matemático referente al aprendizaje de una rata blanca de laboratorio (Rattus norvegicus) en resolver un laberinto.

¿Qué es un Modelo Matemático?

Los modelos matemáticos tienen un papel muy importante en la resolución científica de problemas. Una discusión de modelos matemáticos puede empezar con una consideración del método científico. Kemeny y Snell, matemáticos del Dartmouth College, han definido el método científico sencillamente como "un proceso cíclico por el medio del cual los seres humanos aprenden de la experiencia". Hay tres etapas en el modelo científico que uno puede repetir muchas veces: 1)Inducción, 2)Deducción y 3)Verificación.
La **Inducción** es el proceso consiente en observar una situación, acumular datos, pensar, identificar lo pertinente, simplificar, idealizar y formar teorías sobre la situación. Modelar el problema precisamente con símbolos, ecuaciones, etc. Esta nueva irrealidad simbólica es lo que llamamos un modelo matemático. En la **Deducción** se trata de aplicar la lógica y la matemática para deducir consecuencias de las teorías. Si la teoría es realmente buena se alcanza nuevos conocimientos, los cuales algunas veces son inesperados. La **Verificación** es el proceso de comprobar si las predicciones de la deducción pueden explicar lo que ya sabemos o predecir algo nuevo que es verdadero.
Debemos destacar que el proceso de desarrollar el modelo es mucho más difícil que el proceso de encontrar la resolución del modelo en la etapa de deducción. Eddington, un físico inglés, es citado como diciendo: "La formulación inicial del problema es la parte más

---
[1] Primer concurso de proyectos de investigación para profesores de enseñanza media. (97-98) Sociedad de Matemática de Chile.

difícil, porque es necesario utilizar el cerebro todo el tiempo; después, uno puede utilizar matemática en su lugar".

Experimento

Para estudiar el ritmo de aprendizaje de una rata blanca (macho) fue enviada en forma reiterativa por un laberinto confeccionado por el equipo investigador(Srtas. *Karen Amthauer y Alejandra Valenzuela*, alumnas de la *Deutsche Schule Concepción, anexo*). Las variables consideradas en el experimento fueron: "el número de pruebas" y "el tiempo invertido por la rata en recorrer el laberinto".

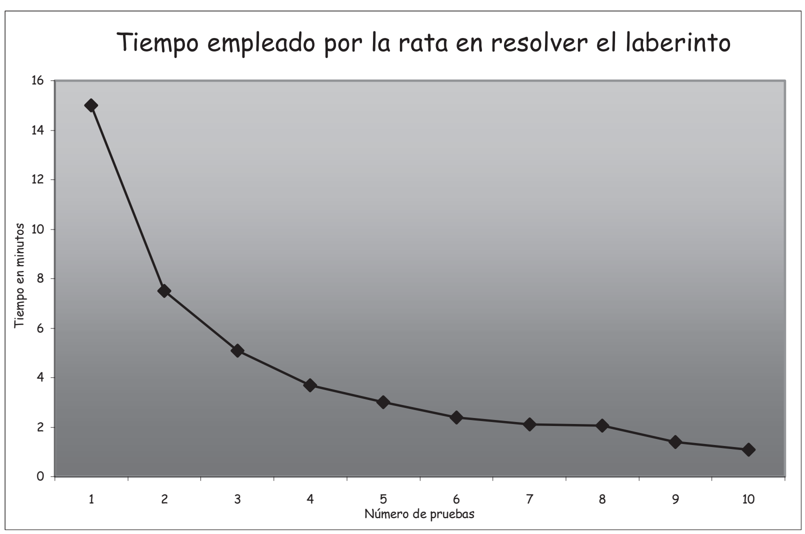
Comentarios de las alumnas:

"En el primer contacto con el laberinto las ratas olfateaban el lugar sin moverse, están en una etapa de reconocimiento, se les ve muy temerosas, a cualquier ruido se paralizan y luego siguen olfateando el laberinto. No les gustaba que las tomaran de la cola para ponerlas en el lugar de partida, se quedaban un rato quietas y luego comenzaban a recorrer el trayecto".

"Naturalmente la falta de comida y los días de experimentación influían en el tiempo que ellas necesitaban en resolver el laberinto. La primera rata resultó más lenta y más cautelosa, las dos siguientes eran más rápidas y juguetonas, posiblemente el estar acompañadas fue un estimulo positivo"

Los resultados promedios de las tres ratas que por varias semanas participaron en el experimento, el cual se efectuaba en jornadas de mañana y tarde, se resumen en la siguiente tabla y gráfico:

Número de Pruebas	Tiempo en minutos
1	15
2	7,5
3	5,1
4	3,7
5	3
6	2,4
7	2,1
8	2,05
9	1,4
10	1,1



El problema matemático que ahora nos planteamos alumnas y profesor es hallar una función real de variable real que tome los valores de los resultados del experimento.

¿Qué modelo elegir? y ¿Cómo plantearlo?

"Generalmente se escoge el modelo que mejor explique el fenómeno que queremos entender, y que mejor se adapte al contexto en el que estamos trabajando"

"En la modelación se buscan leyes generales que permitan reflexionar y explicar un fenómeno".

Polinomio de Lagrange

La elección adecuada de la función y de su expresión matemática (modelo) puede demostrarse algunas veces, pero en otros casos es imposible; de ahí la importancia de que el investigador, basado en su experiencia, tenga una cierta idea a priori de cómo debe ser la función (fórmula o modelo) que pretende encontrar.

Para alcanzar este objetivo y el de nuestro trabajo de investigación buscamos métodos de ajuste de curvas, para determinar una función (modelo) a partir de una tabla de valores. Concluimos que el más apropiado para la aproximación de funciones es por Polinomio de Lagrange o Interpolación Lagrangeana cuya fórmula es la que sigue:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{r} y_k \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

donde $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$ denota el producto de todos los términos de la forma $\frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$ donde j es cualquier entero entre 0 y r excepto k.

Así pues, $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_r)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_r)}$.

El polinomio de Lagrange es válido por el siguiente Teorema:

$\exists$ el polinomio $p(x)$ de grado r tal que, sí $\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ y $\ell_i(x_\ell) = \begin{cases} 0 & ,si \ell \neq i \\ 1 & ,si \ell = i \end{cases}$

por lo tanto $p_r(x) = \sum_{i=0}^{r} y_i \ell_i(x) = \sum_{i=0}^{r} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{r} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ luego $p_r(x) = \sum_{i=0}^{r} y_1 \ell_i(x_0) = y_0$

$$p_r(x_1) = y_1$$

$$\vdots$$

$$p_r(x_r) = y_r$$

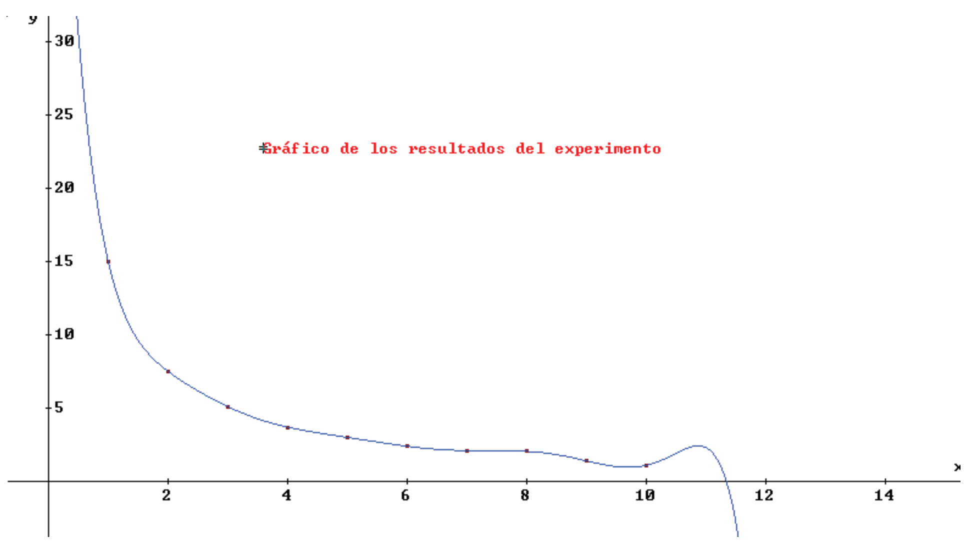
Una vez definido y aceptado el uso del polinomio de Lagrange buscamos la forma de utilizarlo de manera que nos permitiera encontrar el modelo matemático que se ajustará a nuestro experimento con el aprendizaje de las ratas.

Software DERIVE [4]

El programa *DERIVE* en el apartado de archivo de utilidad (archivo *MISC.MTH*) tiene implementada la fórmula de Lagrange del polinomio interpolador la cual se llama *FUNCION POLY_INTERPOLATE*, la cual asocia un polinomio a un conjunto de puntos, es decir nos entrega una función que pasa por todos los puntos de una tabla de valores.

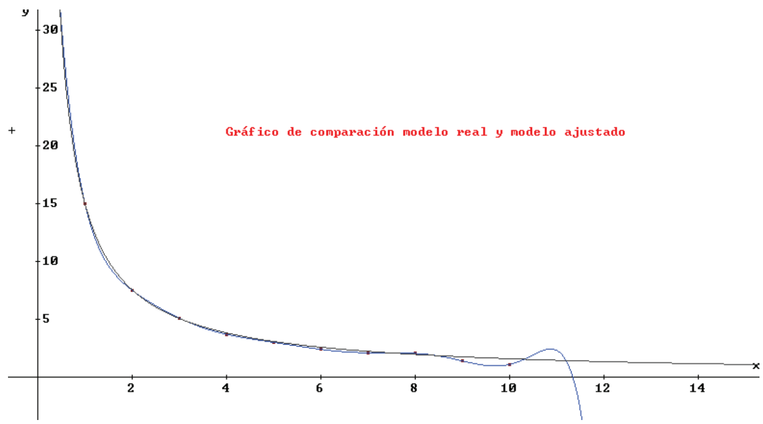
Aplicando dicha función a nuestra tabla resumen del experimento escrito como una matriz, tenemos: $A=\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 7{,}5 \\ 3 & 5{,}1 \\ 4 & 3{,}7 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2{,}4 \\ 7 & 2{,}1 \\ 8 & 2{,}05 \\ 9 & 1{,}4 \\ 10 & 1{,}1 \end{bmatrix}$ poly_interpolate (A, x) se simplifica al polinomio interpolador respecto de x que interpola los pares (x, y) dados en la matriz A

$$P(x) = -0{,}0000275x^9 + 0{,}0015x^8 - 0{,}034x^7 + 0{,}44x^6 - 3{,}52x^5 + 17{,}78x^4 - 56{,}98x^3 + 112{,}37x^2 - 127{,}21x + 72{,}15$$



Conclusiones

Naturalmente el polinomio resultado de la intepolación lagrangeana, es muy poco práctico, es un polinomio que satisface a esos puntos, pero no permite llegar a una fórmula más compacta y operable. Al observar el comportamiento de nuestra gráfica resultado entre el intervalo [10–12] la función cae drásticamente a los valores negativos para el tiempo, lo que contradice nuestros supuestos. Este tipo de conjeturas y análisis nos ayudo para nuestro trabajo. En cambio si nos permitió visualizar que el comportamiento de la rata se ajusta en forma aproximada a una rama de una hipérbola o a una relación inversamente proporcional. Por lo cual comenzamos a ensayar varias curvas de la forma hiperbólica, apoyándonos en el software *DERIVE*. La curva más apropiada a nuestro resultado resultó ser: $A(n)=\frac{1}{10}+\frac{149}{10n}$ con $n \in IN$.



Modelo General: $A(n)=(T_l-1)+\frac{(T_d+1)}{n}$

- ✓ $A(n)$: Modelo de Aprendizaje
- ✓ n : Número de pruebas
- ✓ T_l : Tiempo límite mínimo que necesita la rata para resolver el laberinto
- ✓ T_d : Diferencia de tiempo máximo y mínimo alcanzado por la rata.

Nota: Las variables:"Dificultad del laberinto", "Medio ambiente","Temperatura de la sala", "Tipo de comida", no fueron consideradas en el experimento.

Creemos que es necesario comprobar nuestro modelo o compararlo con otros resultados, ver como se comporta para otro grupo de datos.

Referencias bibliográficas

Allen Smith W. (1988). *Análisis Numérico*.(pp. 252-260).Georgia, USA. Georgia State University. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Vizmanos J.R. Anzola M. (1990). *Matemáticas Algoritmo1* (pp. 177-194) Madrid, España: Ediciones S/M.

Derive in Education Opportunites and Strategies Proceedings of the 2nd Krems Conference on Mathematics education. (1993) Krems,Austria. The Authors And Chartwett-Bratt ltda. Sweden.

UNESCO (1974). Steiner H *¿Qué es la Matemática Aplicada?* Las Aplicaciones en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la Escuela Secundaria. (pp.139-153).

Anexo