Logaritmos, física y algo más

Daniel Vaccaro, Verónica Szemruch
Colegio del Salvador. Buenos Aires. Argentina
veros@micropymes.com.ar   danvac@tutopia.com

Resumen
Con la popularización de las calculadoras electrónicas el cálculo logarítmico en sí mismo fue perdiendo espacio y en forma gradual se fue abandonando su enseñanza. Pero el tema "logaritmos" sigue presente en los "programas". Es muy difícil lograr un aprendizaje sustancial y por lo tanto duradero si en el momento de abordar el tema nuestros alumnos no le encuentran significado. Así que procuramos dárselo. Para ello, aspiramos a un desarrollo conceptual muy distante del puro entrenamiento algebraico al que se fue limitando la práctica de la enseñanza de esta tema.

Introducción

El cálculo por medio de logaritmos fue durante mucho tiempo el "plato fuerte" del programa de matemática de 4º año del Bachillerato en nuestros colegios nacionales.
Desde nuestro lugar de educadores y con la intención de ensayar nuevas estrategias didácticas, surge esta propuesta tendiente a una enseñanza amena e interesante y a un aprendizaje significativo. Proponemos, para ello, valernos de un amplio campo de aplicaciones y tener en cuenta no sólo los contenidos conceptuales sino también los procedimentales y actitudinales en forma integrada.

Una propuesta para trabajar logaritmos en el aula

A continuación presentamos algunos ejemplos de situaciones problemáticas que permiten el abordaje del tema logaritmos desde una óptica interdisciplinaria. El marco teórico que sustenta la propuesta es la resolución de problemas (Polya, 1998).
La propuesta interdisciplinar permite abordar los logaritmos como una herramienta de suma utilidad para resolver problemas de otras ciencias y no presentar a los alumnos los logaritmos como operadores matemáticos solo aplicables a la resolución de ejercicios rutinarios.

Terremotos

Antes de que se desarrollara el concepto de magnitud de un terremoto, se utilizaba una cantidad más subjetiva conocida como intensidad. Esta cantidad se determinaba en las observaciones de los efectos directos del terremoto:

- ✓ Grado de la sacudida percibida por la gente
- ✓ Cuantía de los daños causados a estructuras artificiales
- ✓ Extensión de deformaciones visibles de la Tierra misma

Una de estas escalas tiene 12 grados, que se indican con números romanos y fue desarrollada por Mercalli.

Actualmente se utiliza la magnitud de un terremoto que es una medida absoluta relacionada con la energía sísmica liberada. Una de las escalas más utilizadas es la de Richter en la que la magnitud M y la energía E, expresada en Joules, están relacionadas por la fórmula:

$$\log E = 1{,}44\,M + 5{,}24$$

Según esta fórmula si nos informan de la magnitud de un terremoto podemos averiguar cuánta energía fue liberada durante el mismo. Para ello basta con despejar E de la fórmula anterior donde obtenemos:

$$E = 173780 \times 10^{1{,}44\,M}$$

Un terremoto de grado VI en la escala Mercalli produce

- ✓ un susto generalizado en las personas
- ✓ daños en mampostería y chimeneas
- ✓ se mueven los muebles
- ✓ se caen objetos

Corresponde aproximadamente a una magnitud de 5,5 en la escala Richter y por lo tanto se libera una energía:

$$E = 1{,}4 \times 10^{13} \text{ Joules} = 4\,000\,000 \text{ kwh}$$

¡Esta es suficiente cantidad de energía para mantener encendida una lamparita de 40 Watt durante más 400 000 años!

Pero un terremoto de magnitud 8,5(sólo 3 unidades mayor que el anterior) produce

- ✓ destrucción total
- ✓ ondas visibles en el suelo
- ✓ el nivel del suelo y los contornos del paisaje quedan modificados
- ✓ algunos objetos pueden "volar"

Si calculamos la energía para este caso resulta E= $8{,}4 \times 10^{10}$ kwh. Es decir, en términos de la energía un terremoto de magnitud 8,5 es 21 mil veces más "grande" que uno de magnitud 5,5.

Algunos ejercicios

1. ¿Cuántas veces más energía libera un terremoto de magnitud 7 que un terremoto de magnitud 5?
2. Si se pudiera aprovechar la energía de un terremoto para generar corriente eléctrica, ¿Durante cuánto tiempo se puede mantener iluminada una ciudad que tiene instaladas 100 000 lámparas de 100 Watts cada una con la energía de un terremoto de magnitud 5?
3. Si en un terremoto de magnitud M se libera una cantidad de energía E, ¿cuántas veces más energía se libera en un terremoto que es un grado mayor?
4. Completar la siguiente tabla calculando la energía o la magnitud según corresponda:

Terremoto			
Fecha	Lugar	Magnitud (Richter)	Energía (Joule)
27/mar/1964	Alaska	8,6	
27/jul/1976	Tientsin, China		$1{,}1 \times 10^{17}$
15/set/1977	Udine, Italia	6,2	

Dosis de un medicamento

La cantidad de ciertos medicamentos (en el cuerpo humano) sigue una ley de decaimiento exponencial: $N = N_0 . e^{-kt}$ Donde

- ✓ N = cantidad de droga presente en un tiempo " t ".
- ✓ N_0 = cantidad de droga en un tiempo t=0
- ✓ $K = \frac{\ln 2}{H}$ (siendo H la vida media del medicamento)

Si se pretende alcanzar un determinado nivel terapéutico, las dosis que siguen a la primera deberán ser reducidas para mantener este nivel y evitar de esta manera los efectos tóxicos de ciertas drogas.

Para determinar el nivel terapéutico (T):

$$T = \frac{P.\left(1 - e^{-dkI}\right)}{e^{kI} - 1}$$

Para determinar la dosis reducida (R):

$$R = P.\left(1 - e^{-dkI}\right)$$

Donde :

- ✓ P = unidades de medicamento por dosis
- ✓ I = intervalo de tiempo entre dosis consecutivas
- ✓ d = cantidad de dosis

Problemas

1) Si "I" es el intervalo de tiempo entre dosis consecutivas, demuestre que para el nivel terapéutico "T":
$$\frac{P.\left(1 - e^{-dkI}\right)}{e^{kI} - 1} = \left(1 - \frac{1}{2^d}\right).P$$
Observar que $0 < 1 - \frac{1}{2^d} < 1$ para $d > 0$.

2) La teofilina es una droga utilizada en el tratamiento del asma bronquial y tiene una vida media de 8 hs en el sistema de un paciente relativamente sano y no fumador. Suponga que el paciente alcanza el nivel terapéutico deseado en 12 hs cuando 100 mg le son suministrados cada 4 hs aquí d = 3 . A causa de la toxicidad, la dosis debe ser reducida más adelante.
   a) Determine el nivel terapéutico (redondee al mg más cercano).
   b) Determine la dosis reducida (redondee al mg más cercano).

Decaimiento radiactivo

Los núcleos de los átomos de un elemento radiactivo se desintegran conforme transcurre el tiempo, siguiendo una ley de decaimiento exponencial. Este hecho se formula de la siguiente manera:

$N = N_0 . e^{-\lambda t}$ Donde

- ✓ N = cantidad de núcleos del elemento en un tiempo " t ".
- ✓ N_0 = cantidad inicial de núcleos (es decir en un tiempo t=0)
- ✓ λ = constante de decaimiento (propia de cada elemento).

Cálculo de la vida media de un elemento radiactivo

Si $N = \frac{N_0}{2}$

es decir para una cantidad equivalente a la mitad de la inicial

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \; . \; e^{-\lambda\, T}$$

donde T es el tiempo necesario para que la cantidad de elemento se reduzca a la mitad

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda\, T}$$

despejando

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

donde T se llama vida media del elemento .

***Por ejemplo**: Si inicialmente hay un gramo (1gr) de sustancia, después de cierto tiempo T habrá ½ gr, luego de transcurrido un tiempo 2T habrá ¼ gr, etc.*

Otros problemas de aplicación

Radiactividad

1) El elemento radiactivo decae de modo que después de “t” días la cantidad de miligramos presentes “N”, esta dado por $N = 100.e^{-0.062t}$.
   a) ¿Cuántos miligramos hay inicialmente?
   b) ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?

Respuesta: a) 100 mg b) 53,8 mg.

Crecimiento poblacional

1) El número de bacterias presentes en un cultivo después de “t” minutos, está dado por la fórmula : $N(t) = 300 \; . \left(\frac{4}{3}\right)^t$ donde se puede ver que N(t) es un múltiplo de la función exponencial $(4/3)^t$.
   a) Determine cuántas bacterias están presentes al inicio.
   b) Determine cuántas bacterias estarán presentes después de 3 minutos.
   c) ¿ Cuánto tiempo tomará que haya 1000 bacterias?

Respuesta: a) 300 bacterias b) 711 bacterias c) 4,2 min.

2) La población de una ciudad de 8000 habitantes crece a razón del 2 % anual.
   a) Determine una ecuación que permita calcular la población “P” después de “t” años a partir de ahora.
   b) Encuentre la población dentro de dos años.

Inversiones

Para el cálculo de interés compuesto también utilizamos una función exponencial. Si “S” es el monto compuesto de un principal “P”, al final de “n” períodos de interés a la tasa periódica “r”.

$$\Rightarrow \; S = P.(1 + r)^n$$

1) Si $2600 son invertidos durante 6 años y medio, al 6% compuesto cada trimestre.

Determine:
a) El monto compuesto.
b) El interés compuesto.

Sonido
El oído humano es notablemente sensible a las variaciones en la intensidad del sonido. La intensidad del sonido es una forma de expresar la cantidad de energía que pasa a través de 1 centímetro cuadrado de área transversal en un segundo. Es decir que:

$$\textit{Intensidad} = \textit{Energía}/\textit{Área} \ . \ \textit{tiempo}$$

Según esto la intensidad de un sonido se puede expresar, por ejemplo, en Watts sobre centímetros cuadrados. Una intensidad $I_o = 10^{-16}$ W/cm^2 corresponde aproximadamente al sonido más débil que se puede escuchar. La intensidad máxima que el oído humano puede tolerar es aproximadamente igual a 10^{-4} W/cm^2. Como se podrá apreciar entre la mínima intensidad audible y el máximo hay 12 órdenes de magnitud. La intensidad máxima tolerable es 1 billón(es decir, 1 millón de millones) de veces mayor que la intensidad correspondiente al sonido audible más débil.
¿Cómo podemos comprender esto? Supongamos que una mosca pasa cerca de nuestro oído y el movimiento de sus alas produce un sonido de manera que nuestro oído recibe 10^{-16} Joules de energía en un segundo a través de 1 cm^2. En este caso, y suponiendo que estemos en un ambiente en absoluto silencio podríamos apenas percibir ese sonido. Pero en ese mismo ambiente se necesitarían 1 billón(1 millón de millones) de moscas para "aturdirnos".
Por estas razones se ha elegido una escala logarítmica para expresar el nivel de intensidad sonora que se adapte a la forma en que el oído humano percibe el sonido. Dicho nivel de intensidad sonora se define de la siguiente manera:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_o}$$

La unidad en que se expresa el nivel de intensidad sonora se denomina decibel. En la fórmula anterior I_o representa el umbral de audición o mínima intensidad audible.
De esta manera un enorme rango de variación entre la mínima intensidad y el umbral de sensación de dolor cuya intensidad es 10^{12} veces mayor se transforma en una escala de niveles de intensidad que va de 0 dB hasta 120 dB.

Estrellas
El astrónomo Tolomeo en el siglo II d.C. catalogó las estrellas asignándole una especie de jerarquía basada en su brillo tal como se lo percibe a simple vista. Las más brillantes son las estrellas de 1ra magnitud o m = 1. Las menos brillantes, las que apenas se aprecian a simple vista, son de 6ta magnitud o m = 6. Por supuesto que con los telescopios se pueden ver estrellas mucho más débiles es decir cuyos valores de m > 6.
Esta escala de magnitudes fue utilizada por los astrónomos durante siglos pero su utilización no resultó sencilla ya que no se podían medir, sino que eran el resultado de estimaciones subjetivas. Hasta el siglo XIX no se pudo lograr un método riguroso, basado en la comparación de la intensidad de la luz recibida de cada estrella con la recibida de una fuente de luz de intensidad regulable, de modo tal de obtener de cada estrella cierta intensidad I expresada en Watts/m^2
Pogson determinó la relación entre la magnitud visual de una estrella y la intensidad medida con un instrumento de observación:

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log \frac{I_1}{I_2}$$

El signo menos indica que al aumentar la iluminación(intensidad), disminuye la magnitud y por lo tanto la estrella se ve más brillante. Según esta fórmula entre una estrella de 1ra magnitud y otra de sexta magnitud la relación de intensidades es:

$$1 - 6 = -2{,}5 \log \frac{I_I}{I_{VI}}$$

$$5 = 2{,}5 \log \frac{I_I}{I_{VI}}$$

$$I_I = 100\, I_{VI}$$

Conclusiones

Este trabajo propone una unidad didáctica interdisciplinaria tomando como ejes estructurantes a las funciones logarítmica y exponencial, y está sustentado en la intención de que los alumnos trabajen estos contenidos simultáneamente con la asignatura Física y los comprendan a partir de algunas de sus aplicaciones científicas y técnicas tales como: El nivel de intensidad sonora, la magnitud de los terremotos en la escala Richter, el brillo de las estrellas, el decaimiento radiactivo, la cantidad de información, la ecuación barométrica, el crecimiento de una población entre otros.

Esta propuesta está siendo aplicada en la actualidad. Los resultados que se están obteniendo son positivos. Sobre la base de este tipo de problemas, los alumnos se comienzan a plantean preguntas, dar sugerencias de posible vías distintas de resolución, llegan a hacer hipótesis y a explicar los resultados obtenidos. La presentación de problemas similares a los anteriores da a los logaritmos significatividad dentro de la enseñanza, ya que permiten el abordaje y resolución de situaciones problemáticas de diversa naturaleza.

Proponemos partir de información potencialmente interesante. Es decir situaciones que puedan ser consideradas importantes por muchas personas, más allá de la situación escolar de enseñanza – aprendizaje. En función del interés que esta información pueda originar y analizando la comparación entre magnitudes en las cuales la variación moderada de una variable provoca la variación de otra variable en muchos órdenes de magnitud, deseamos introducir la necesidad de las funciones exponencial y logarítmica y los procedimientos para la utilización de éstas en la resolución de problemas.

Referencias bibliográficas

Booth B, Fitch F(1986). *La inestable Tierra*. Salvat. Barcelona

COMAP. (1998). *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.

Haeussler y Paul (1998). *Matemáticas para administración, economía, ciencias sociales y de la vida.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana

Jaschek C, Corvalán de Jaschek M(1983). *Astrofísica.* OEA. Washington

Polya, George. (1998). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.