

SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO RACIONAL EN ALUMNOS DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Ma. Guadalupe Cabañas, Faustino Guillén y Minerva Galeana Sixto
CIMATE – U. Autónoma de Guerrero, México
gcabanas52@hotmail.com

Resumen

Esta investigación se realizó con alumnos de Nivel Medio Superior (NMS) que habían cursado la asignatura de Matemáticas I y que tenían dificultades con la comprensión del concepto de número racional. El propósito fue poner en escena situaciones didácticas, para explorar sus efectos en la comprensión de este concepto. Para tener información precisa de cuál es el estado que guardaba este conocimiento en los alumnos, se hizo un diagnóstico, por lo que se diseñaron y validaron las situaciones que se utilizarían tanto en el diagnóstico como en la puesta en escena. En su diseño se consideraron los contenidos de aritmética de NMS, diferentes sistemas de representación y el modelo utilizado por Sierpinska sobre los actos de comprensión de conceptos matemáticos. Al comparar los resultados que se obtuvieron en el diagnóstico con los de la puesta en escena de las situaciones didácticas, se encontró que: el permitir que los alumnos conocieran diferentes formas de representar a los números racionales, el significado de cada una de ellas, así como convertir o traducir unas representaciones en otras a través de las situaciones didácticas, propició la construcción de este concepto y mejoraran su comprensión.

Introducción y planteamiento del problema

La mayor parte de los temas de investigación relacionados con la enseñanza de la matemática, provienen sin lugar a dudas de la práctica docente, ya que es en el salón de clases donde los profesores se enfrentan a una gran diversidad de problemas; cuya solución, debería ser el propósito final de proyectos de investigación en nuestra disciplina. Son muchos los problemas que se presentan en el proceso de enseñanza de la matemática y de diversa índole, varios de ellos están asociados a dificultades de los alumnos con el aprendizaje de la aritmética y el álgebra que trascienden en la enseñanza del cálculo. Estas dificultades se traducen en errores y de alguna forma reflejan el conocimiento matemático que tienen relación con el uso de la simbología, de fórmulas, en la demostración de teoremas y en la comprensión conceptos matemáticos, por mencionar algunos. Martínez y López (2001) al estudiar las dificultades que se les presentan a los alumnos de NMS, cuando realizan procedimientos con fracciones, encontraron que se relacionan con:

- La traducción del lenguaje matemático al común, debido a que no comunican el significado preciso de los símbolos involucrados en las situaciones planteadas.
- El algoritmo de la multiplicación en la que se involucran los paréntesis para indicarla, ya que no logran asociarlo a ella.
- La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, que no la aplican.
- El algoritmo de la suma de fracciones, que al aplicarlo, utilizan el modelo lineal aditivo, el cual ha quedado muy arraigado en el trabajo con los números naturales.

Sin embargo, por nuestra experiencia docente con alumnos de primer semestre de este nivel educativo, hemos encontrado que sus dificultades están asociadas con la comprensión del concepto de número racional. Además de las descritas arriba, se han identificado otras que se relacionan con:

- La transformación de números decimales finitos y periódicos a fracciones.
- Identificar entre un grupo de números reales (fracciones comunes y mixtas, fraccionarios decimales finitos y periódicos, decimales infinitos y números enteros), cuáles son racionales.
- Establecer relación de orden entre números fraccionarios y representarlos en la recta numérica.
- Aplicar las propiedades de la suma y de la multiplicación, así como la ley de los signos y de la potenciación en la solución de operaciones aritméticas.
- La solución de operaciones aritméticas y de problemas.
- Identificar en algunos modelos (gráficos, pictográfico, geométrico), partes de un todo.

Esta investigación se orientó precisamente al trabajo con el concepto de número racional con alumnos del NMS. El problema que motivó su realización fue conocer *¿Cuál es el nivel de comprensión del concepto de número racional alcanzado por los alumnos de primer grado de NMS, después de haber puesto en escena situaciones didácticas relacionadas con el mismo?* El objetivo general que nos planteamos fue: *Poner en escena situaciones didácticas con alumnos de primer grado del NMS, para explorar sus efectos en la comprensión del concepto de número racional.*

Metodología de la investigación

Utilizamos la ingeniería didáctica. Esta metodología, surge en la escuela francesa y se constituye como una analogía de la actividad realizada por los ingenieros en el desarrollo de sus proyectos, quienes se fundamentan en los conocimientos científicos de su dominio y someten sus resultados a un control de tipo científico. A diferencia de otras metodologías, se basa en la experimentación en clase y está ubicada en el registro de los estudios de caso, cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Una descripción de esta metodología se detalla en Artigue, M., (1995), en la que distingue cuatro fases: La fase de análisis preliminar, la fase de concepción y análisis a priori de situaciones didácticas de la ingeniería, la fase de experimentación y la fase de análisis a posteriori y evaluación. En la fase de *análisis preliminar* se hacen consideraciones de tipo:

- Epistemológico. Que da una explicación de la evolución histórica de los conceptos que se estudian.
- Cognitivo. Relacionadas con las características cognitivas de los estudiantes.
- Didáctico. Que se refiere a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

En la fase de *concepción y análisis a priori* el investigador tiene que:

- Hacer el análisis de restricciones y;
- Determinar las variables de control

Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de *control de significado*. Esto quiere decir, de forma muy esquemática, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a

través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería didáctica ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones [Artigue, M., 1995].

El análisis a priori está basado en un conjunto de hipótesis. La validación de éstas, se realiza a través de la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, en la cuarta fase de esta metodología. En la fase de *experimentación* tienen que ponerse en escena las situaciones didácticas ya diseñadas. La fase de *análisis a posteriori* se basa en el conjunto de datos recogidos en el proceso de experimentación, de las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, así como de las producciones de los estudiantes. Tal como fue señalado antes, una vez realizado el análisis a posteriori, se hace una confrontación de los resultados de éste con los del análisis a priori, que es en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación y que también se lleva a cabo en esta fase.

Sobre las concepciones de número racional en alumnos de nivel medio superior.

Para conocer con precisión cuál es el estado que guardaba el concepto de número racional en los alumnos de NMS, se realizó un diagnóstico con alumnos de segundo semestre de la escuela preparatoria No. 1 de la UAG. Los criterios para la selección de estos alumnos fueron que: hubiesen cursado la asignatura de Matemáticas I; tuviesen dificultades al trabajar con este contenido matemático; y no hubiesen logrado acreditar dicha asignatura. Para ello, se estructuraron tres cuestionarios diferentes, con las mismas características y el mismo número de situaciones, que en este caso fueron nueve en cada uno. A partir de los resultados del diagnóstico encontramos que los alumnos:

- No fueron capaces de identificar y discriminar entre un grupo de números propuestos (racionales e irracionales), cuáles representaban números racionales.
- No fueron capaces de establecer la relación de orden entre números racionales y representarlos en la recta numérica. Es decir, no identificaron la relación correspondiente, tampoco discriminaron entre dos números cuál era mayor y cuál menor, así como no sintetizaron al determinar el orden que le correspondía a cada uno.
- No identificaron los tres números fraccionarios distintos en un intervalo dado y no discriminaron entre aquellos que si corresponden al intervalo.
- No pudieron transformar un número decimal a un número fraccionario, así como para aplicar las propiedades asociativa y distributiva. Es decir, no fueron capaces de cambiar de un registro de representación a otro, tampoco sintetizaron el resultado de la operación.
- No pudieron transformar una fracción mixta a común, no identificaron la multiplicación indicada mediante paréntesis, no trabajaron con el algoritmo correspondiente, tampoco simplificaron sus resultados
- No fueron capaces de identificar y discriminar cuáles de las expresiones planteadas cumplen con la condición de igualdad y cuáles no, así como no sintetizaron al argumentar sus respuestas.

- No fueron capaces de identificar las condiciones dadas en los problemas, no sintetizaron ni generalizaron al establecer la relación entre ellos y obtener un resultado.
- No identificaron ni discriminaron los datos y la porción que ocupa la parte sombreada de las figuras dadas, tampoco lograron sintetizar al establecer la fracción correspondiente.

Estas evidencias, pusieron de manifiesto que los alumnos de primer año de NMS no habían comprendido el concepto de número racional en los cursos normales de enseñanza. De acuerdo con el modelo utilizado por Sierpinska sobre comprensión de conceptos, podemos decir que los alumnos no fueron capaces de identificar, discriminar, sintetizar y generalizar conceptos. De igual forma, se observó que no lograron identificar las diferentes formas de representación de los números racionales, así como para pasar de un sistema de representación a otro.

El desarrollo de las situaciones didácticas. Se pusieron en condiciones de enseñanza seis situaciones distintas, la mayor parte de ellas fueron seleccionadas de los tres cuestionarios utilizados en el diagnóstico. La puesta en escena se hizo a través del modelo utilizado por Cordero, F. et al (2000) en el análisis del comportamiento tendencial de funciones, particularmente sobre la linealidad del polinomio. En el modelo se identifica como uno de los elementos principales, al conocimiento, para determinar la relación entre un profesor y sus alumnos, donde la clase es un sitio de interacción de costumbres y creencias de cada uno de sus participantes. Otro elemento no menos importante que considera, es la conveniencia de establecer un lenguaje común para tener un ambiente que propicie la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, promover la independencia del alumno y la responsabilidad que debe tener en su propio aprendizaje, a través de: Trabajo individual y en equipo; La resolución de actividades matemáticas; La discusión matemática y; La autoevaluación del trabajo individual, por equipo y en grupo. Todos esos ambiciosos propósitos como le llaman los autores, se concretan dentro de la clase en tres momentos, a saber: la resolución de la actividad; la representación y discusión de las soluciones y, anexos y retroalimentación. En el desarrollo de las sesiones de trabajo con las situaciones didácticas, cada uno de los tres momentos anteriores tuvo como propósito: por un lado, que el alumno aprendiera a realizar la actividad en sí misma, y por otro, que aprendieran la herramienta conceptual con la que estaban trabajando. De esta forma, el objetivo del primer momento fue que lograran aprender a trabajar de forma individual en una primera etapa, durante el proceso de solución de las situaciones planteadas. Es decir, en la comprensión del enunciado de la actividad, en la búsqueda de la vía de solución y en la revisión del proceso. En una segunda etapa, se buscó que los alumnos aprendieran a trabajar en equipo, a mostrar y explicar el proceso de solución de sus actividades, a discutir, plantear y validar argumentos, y a analizar más de una forma de resolverlas. Para el segundo momento, el objetivo fue que los alumnos tuvieran la capacidad de trabajar en grupo, que comunicaran sus resultados y que validaran, justificaran y defendieran sus procedimientos ante el resto de los equipos. El objetivo del tercer momento fue que los alumnos retomaran el trabajo realizado individualmente y lo vincularan a la actividad general. Otros elementos asociados a este modelo y que también fueron considerados en la puesta en escena,

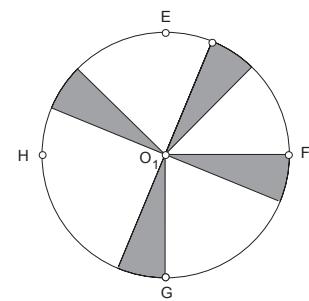
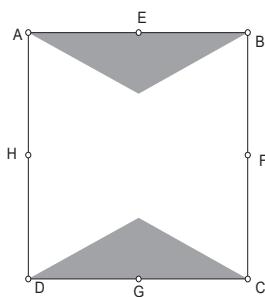
son: Las modalidades de trabajo; el diseño de la actividad, que incluye el enunciado de la actividad y su propósito, el precepto de evaluación y la solución de referencia; los lineamientos para la interacción con los equipos durante la resolución de la actividad; el guión de la discusión; las variables de la actividad y; la conclusión.

Modalidades de trabajo Las situaciones didácticas se trabajaron en tres sesiones y cada una tuvo una duración de tres horas aproximadamente. El desarrollo de las sesiones se llevó a cabo de tres formas: individual, en equipo y grupal. El propósito del trabajo individual fue consolidar los conceptos y procedimientos que forman parte del objetivo de la actividad. El trabajo en equipo se realizó con la finalidad de que los alumnos no se paralizaran ante las dificultades, que tomaran decisiones para organizar el trabajo, que las ideas que presentaran fueran desarrolladas por más de una persona y que hubiese un control sobre las equivocaciones y las malas interpretaciones. El trabajo grupal se llevó a cabo al finalizar el trabajo en equipo. El objetivo de esta etapa fue que los alumnos escogieran la parte fundamental de su trabajo, que pusieran atención a la forma de comunicar sus resultados, que generaran argumentos para defender sus procedimientos; que hicieran explícito por qué un conjunto de etapas resuelve la actividad, que observaran procedimientos distintos de solución y que pusieran atención al trabajo desarrollado por otros equipos.

Actividades realizadas durante la puesta en escena. En este apartado se muestra una de las situaciones didácticas (estructurada en forma de actividades) realizada por los equipos en cada una de las sesiones desarrolladas durante la puesta en escena de cada una de las situaciones didácticas. En cada sesión los equipos se organizaron con integrantes diferentes, con el propósito de tener movilidad en el pensamiento de los alumnos y de evitar la rutina. Al inicio de los trabajos por equipo, se analizaron y discutieron las actividades desarrolladas individualmente, para comprobar su veracidad y evaluar la(s) vía (s) de solución (es) utilizadas en el proceso de solución. Esto les permitía valorar la forma que ellos consideraban más simple de resolverlas, en el caso de considerar que las respuestas cumplían con las condiciones y exigencias planteadas, o en su caso determinarla entre todos, para formular las conclusiones correspondientes.

Una situación ilustrativa. De las seis situaciones elaboradas presentamos a modo de ejemplo - por razones de espacio - la primera de ellas.

Situación 1. Se les pidió a los alumnos que determinaran la fracción de área de la(s) región (es) sombreada(s) en el cuadrado ABCD y en el círculo EFGH, los cuales tienen un área de una unidad. E, F, G y H son los puntos medios del cuadrado. EG y HF son diámetros del círculo.



Solución de referencia de la actividad 1a. Para desarrollar esta actividad, los alumnos tenían la posibilidad de apoyarse en los puntos medios de la figura y en los vértices de los triángulos sombreados, trazando rectas paralelas a partir de esos puntos. A la vez unir los vértices del cuadrado con los puntos medios para obtener dieciséis triángulos rectángulos iguales. Esto les permitiría *identificar* en cuántas partes podía dividirse el todo y determinar la porción que ocupa la suma de las partes sombreadas, que equivale a un cuarto.

Solución de referencia de la actividad 1b. Para desarrollar esta actividad, los alumnos podían apoyarse en los diámetros dados en la figura y realizar trazos auxiliares convenientes, hasta obtener dieciséis subdivisiones equivalentes. Esto les permitiría *identificar* en cuántas partes iguales se divide el todo y determinar qué porción ocupa la parte sombreada, que equivale a un cuarto.

Conclusiones

Al comparar los resultados que se obtuvieron en el diagnóstico con los del cuestionario final, se concluye que:

1. El propiciar que los alumnos interactuaran con el conocimiento, el medio (material, social, etc.) y con el profesor, permitió que formularan y validaran estrategias para resolver las situaciones propuestas.
2. Se obtuvieron evidencias de que los alumnos mejoraron la forma de:
 - Comunicar sus resultados, mostrando y explicando el proceso de solución de las situaciones planteadas.
 - Defender y argumentar sobre los procedimientos utilizados para validarlos.
 - Identificar interpretaciones equivocadas y procedimientos erróneos.
 - Observar que existen diferentes vías de solución para resolver las situaciones propuestas.
 - Escoger la parte fundamental de su trabajo para emitir conclusiones.
3. El permitir que los alumnos conocieran diferentes formas de representar a los números racionales, el significado de cada una de ellas, así como convertir o traducir unas representaciones en otras propició la construcción de este concepto.
4. En el proceso de comprensión del concepto de número racional, a los alumnos se les presentaron dificultades al trabajar con situaciones que estuvieron asociadas con:
 - Pasar de un sistema de representación geométrico a un numérico.
 - Establecer la razón entre dos regiones ubicadas en un mismo objeto (geométrico).
5. La sintaxis que utilizan los alumnos para representar igualdades son expresiones que desde el punto de vista matemático son contradictorias. No obstante, parecen estar muy arraigadas en la mente de ellos, como puede observarse enseguida:

$$\frac{4}{7} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = \left(\frac{11}{2} + \frac{3}{4} \right) - \frac{22}{4} + \frac{3}{4} = \boxed{-\frac{19}{4}}$$

Contradicción
matemática

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= 24 \text{ de } \frac{1}{6} = 4 \rightarrow 1 \text{ hijo} \\ \frac{1}{3} &= 24 \text{ de } \frac{1}{3} = 8 \rightarrow 2 \text{ hijos} \\ \frac{1}{2} &= 24 \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{12}{24} \rightarrow 3 \text{ hijos} \end{aligned}$$

6. Los alumnos mejoraron su comprensión acerca del concepto de número racional mediante la realización de las actividades planteadas en las situaciones didácticas.

Bibliografía

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Balbuena, C. H. (1988). Análisis de la secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria. Tesis no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Revista de Educación Matemática* 12 (1). pp.5-37. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. pp. 237-265. México:Thomson-Learning.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanis, J.A.; Rodríguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas: México.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. *La Educación matemática en la enseñanza secundaria* 12. pp. 95-124. Barcelona: ICE/HORSORI.

Chevalard, Y. (1998). *La transposición didáctica*. Pp.45. Buenos Aires: Copyright Aique Grupo Editor S. A

Duval, R. (1997). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemáticas Educativa II*. Pp 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. (1997) Perspectivas y métodos de investigación en Matemática Educativa. Serie: de antología número 1. Pp 63-79.

Ferguson, S. A. (2001). *Dynamic Imagery Test*. Forida State University, Matematics Education Department.

Martínez, M. y Abundis, S. (2001). *Dificultades en alumnos de Bachillerato al realizar procedimientos con fracciones. Un estudio de casos*. México: Tesis de licenciatura sin publicar de la facultad de matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero.

Rico, L. (1995). Errores y Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación matemática*. Pp. 68-108. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Sierpinska, A. (2002): <http://alcor.concordia/~sierpan/tds.htm>. (leido 28 de febrero de 2002).

Sierpinska, A. (1992). On Understanding of function. En Dubinsky and Hared Editors. (1992). *Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematics Asociations of America. Notes. Vol. 25*. pp.25-58.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. *La Educación matemática en la enseñanza secundaria* 12. Pp. 125-154. Barcelona: ICE/HORSORI.