LA TRANSFERENCIA DEL CONOCIMIENTO:ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES HACIA UNA CUERDA QUE VIBRA

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional, México
pcamarena@ipn.mx

Resumen
La transferencia del conocimiento es una catalogada como una de las habilidades de orden superior . Esta habilidad, correlacionada directamente con el modelar matemáticamente problemas de otras disciplinas, está en tierra de nadie curricularmente hablando, situación que provoca la reflexión entre los docentes de matemáticas, de los niveles educativos medio superior, superior y de posgrado. Tal problemática es enfrentada por el grupo internacional de investigación en *matemáticas en el contexto de las ciencias* . En el presente investigación, se muestra el caso de transferencia del conocimiento de las ecuaciones diferenciales parciales hacia la cuerda vibrante. La metodología a seguir constó de dos bloques el primero de tipo descriptivo en donde se contextualiza a las ecuaciones diferenciales parciales a través de la cuerda vibrante para detectar los indicadores del proceso de transferencia de conocimiento. La segunda de tipo experimental en donde se pone a prueba la estratega didáctica de la matemática en contexto, para lo cual se selecciona un grupo de estudiantes, se les diagnostica respecto a su infraestructura cognitiva, tomando en cuenta los indicadores detectados referentes a esta etapa, se instrumenta la didáctica de la matemática en contexto y se analiza el grado de transferencia que han logrado los alumnos sobre el eje de los indicadores.

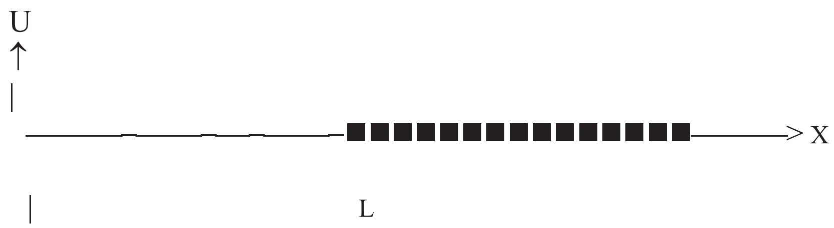
Introducción
La presente investigación se fundamenta en la fase didáctica de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, cuyo objetivo es el estudio de la matemática en el contexto de la ingeniería como didáctica para la enseñanza de las matemáticas en escuelas de ingeniería (Camarena). En otros foros académicos se han presentado trabajos similares en el contexto de la ingeniería (Zúñiga, Camarena y Muro). En esta ocasión se han elegido a las ecuaciones diferenciales parciales por ser un tema problemático para los estudiantes y por representar modelos complejos de la física e ingeniería. En esta presentación se ofrece un caso particular de las ecuaciones diferenciales parciales, la llamada ecuación de onda, la cual, entre otros, modela la cuerda vibrante.

Una de las asignaturas difíciles para el estudiante es el correspondiente análisis matemático para funciones de varias variables, el cual se hereda de la propia matemática, ya que dentro de ésta el tema correspondiente a funciones de varias variables es de los más complejos. Por lo que las ecuaciones que se derivan de este tópico también resultan complejas para los alumnos, en particular las ecuaciones diferenciales parciales.

Luego, se puede decir que si el tratar con derivadas parciales es complejo, más complicado el aplicarlas y el formular ecuaciones diferenciales parciales a partir de un problema dado, es decir, el modelar problemas de la ingeniería o de la física, en donde este modelaje se lleva a cabo a través de las ecuaciones diferenciales parciales es prácticamente imposible para los estudiantes, sobre todo ya que existe el antecedente de que los profesores de matemáticas (Camarena), estadísticamente

hablando, no presentan a la matemática contextualizada en el área de la ingeniería en donde la imparten.
En general los libros de texto que abordan ecuaciones diferenciales parciales no modelan situaciones de la física o la ingeniería, y cuando llegan a hacerlo lo único que aparece es la ecuación que describe el fenómeno, pero no se muestra cómo se llegó a la ecuación.
Por lo antes expuesto es que en esta investigación se ha elegido la contextualización de las ecuaciones diferenciales parciales. Por otro lado, la matemática en el contexto de la ingeniería proporciona una didáctica específica para impartir clases a futuros ingenieros ya que favorece el proceso de la enseñanza y el aprendizaje según Camarena.

La Contextualización de la ecuación de onda
Las ecuaciones diferenciales parciales tienen aplicaciones en varias áreas de la ingeniería, no todo tipo de ecuaciones en derivadas parciales son necesarias en una ingeniería en particular (Camarena). Para el caso de la ingeniería en electrónica y ramas afines son unas cuantas las ecuaciones diferenciales parciales que se emplean, entre éstas se encuentra la ecuación de onda la ecuación de calor, la ecuación de Laplace, etc. Para la ingeniería mecánica se requiere de la ecuación de onda y otras ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico. La ecuación de onda también es utilizada en ingeniería civil. Lo anterior conduce a elegir la ecuación de onda por ser utilizada en varias ingenierías.
Como lo marcan las etapas de la matemática en contexto, al contextualizar un tema específico irán surgiendo los temas matemáticos que deberán ser tratados para la solución del modelo matemático que nace de la contextualización. Se tiene una cuerda que se pone a vibrar, la cual da origen a la ecuación de onda, al tener que resolver esta ecuación para enfrentar el problema planteado, se tendrá que introducir el método de variables separadas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y la clasificación de este tipo de ecuaciones. También se tendrán que definir las condiciones iniciales y las de frontera del problema que se aborda.
Sea una cuerda de densidad uniforme, la cual se tensa y se sujeta de sus extremos y por alguna razón se pone a vibrar, el problema que se tiene es el de conocer la forma del movimiento de la cuerda, es decir, cómo vibrará la cuerda.
Si se representa geométricamente la cuerda tensa, ésta se verá como un segmento de línea, para poder llevar a cabo el modelaje del problema, una de las etapas de la contextualización, se ubican los ejes coordenados en tal representación geométrica, por comodidad se coloca el origen en uno de los extremos del segmento y se hace coincidir el eje horizontal de la variable independiente con la cuerda.
Véase la gráfica No.1.



GRÁFICA No. 1. Ubicación geométrica en los ejes coordenados XU de una cuerda tensa de longitud L.
Al ser una cuerda que está vibrando la posición de los puntos sobre la cuerda respecto a los ejes coordenados variará en función del tiempo, por lo que la ecuación que describe el movimiento de la cuerda vibrante será una función u que dependerá de la variable independiente x y de la variable tiempo t, luego, u=u(x,t).
Para determinar la ecuación que describe el movimiento tómese un diferencial de arco de cuerda, el cual se muestra en la figura No. 1.

```
 ↑ U

           |                    /|
           |                ξ /  |
           |                /_θ__|
           |      ΔS      /  |
           |            /__|  Δu
           |      ξ  / |     |
           |      /_φ_| Δx  |
           |    /      |     |
      _____|___________|___  |______________ X
|          x     x+Δx
```

FIGURA No. 1 Arco de cuerda ΔS.
En el diferencial de arco de cuerda ΔS de la figura anterior, la fuerza vertical que actúa sobre el segmento ΔS está dada por una fuerza ξ sen θ que tira hacia arriba y otra ξ sen ϕ hacia abajo, por tanto, la fuerza vertical es: ξ sen θ - ξ sen ϕ
Por otro lado, como se trata de un diferencial de arco, entonces, los ángulos θ y ϕ son muy pequeños, lo cual induce las siguientes relaciones, válidas solamente para ángulos muy pequeños: $\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta$ y $\phi \approx \operatorname{sen}\phi \approx \tan\phi$
Además: $\tan\theta = u_x(x+\Delta x,t)$ y $\tan\phi = u_x(x,t)$
Aplicando la segunda ley de Newton, la cual establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, se tiene que: Masa de la cuerda: f ΔS; Aceleración: $u_{tt}(x,t)$
Luego, $f\,\Delta S\, u_{tt}(x,t) = \xi\, u_x(x+\Delta x,t) - \xi\, u_x(x,t)$
Como la cuerda está tensa las vibraciones serán muy pequeñas, por lo que $\Delta S \approx \Delta x$. Así:
$u_{tt}(x,t) = (\xi/f)\,[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] / \Delta x$
Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ y haciendo $a^2=(\xi/f)$, se obtiene la ecuación diferencial parcial: $u_{tt}(x,t) = a^2\, u_{xx}(x,t)$ ....(1), llamada ecuación de onda.
Las condiciones del problema. Se mencionó en el planteamiento del problema que la cuerda estaba sujeta de sus extremos, lo cual se representa matemáticamente de la siguiente manera: Si u=u(x,t) es la posición de la cuerda en un tiempo t, en donde la variable x es tal que $0\le x \le L$, véase la gráfica No. 1, entonces: a) La cuerda está sujeta en su primer extremo, significa que x=0 & u=0 para cualquier tiempo t, luego, u(0,t)=0. b) La cuerda está sujeta en su otro extremo, significa que x=L & u=0 para cualquier tiempo t, luego, u(L,t)=0. A estas condiciones se les conoce con el nombre de condiciones de frontera, ya que limitan físicamente a la cuerda, es decir, es su frontera (los extremos de la cuerda).

Por otro lado, si la cuerda tiene cierta posición al inicio del problema, por ejemplo la forma $u=f(x)$, entonces, lo que se está diciendo es que cuando el tiempo es igual a cero (tomando por convención que al inicio del problema se hace correr el tiempo desde cero) se tiene la condición: $u(x,0)=f(x)$. Y si en ese momento por alguna razón se pone a vibrar la cuerda, lo que se tiene es una velocidad $g(x)$ en esa cuerda, la que produce el movimiento, luego: $u_t(x,0)= g(x)$. Estas condiciones son semejantes a las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y efectivamente, también se les llamarán condiciones iniciales.

Solución de la ecuación diferencial parcial[21].
Primero se le hace observar al estudiante que la ecuación diferencial parcial (1): $u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t)$, es una ecuación diferencial parcial del tipo lineal homogénea: $u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0$.
Que para este tipo de ecuaciones existe un método de solución denominado: variables separadas. A diferencia con el método de variables separadas para las ecuaciones diferenciales ordinarias en donde se aplica cuando la expresión de la ecuación diferencial posee separadas las variables, es decir, cuando es de la forma: $P(x)\,Q(y)\,dx + R(x)\,S(y)\,dy = 0$, en las ecuaciones diferenciales parciales el método de variables separadas consiste en suponer que la que tiene separadas las variables no es la ecuación diferencial sino la función solución de la ecuación diferencial parcial.
Luego, para poder resolver la ecuación de onda se presupone que la función solución tiene separadas sus variables, o sea, que: $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ ....(2) Después se sustituirá esta propuesta en la ecuación de onda, obteniéndose: $T''(t) / T(t) = a^2 X''(x) / X(x)$ ....(3)
Esta última relación solamente puede ser cierta si cada término de la igualdad es constante, luego, se deben satisfacer al mismo tiempo las dos ecuaciones que dan origen al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales formado por las ecuaciones: $T''(t)/T(t)=K$ y $a^2X''(x)/X(x)=K$. La constante K se denomina constante de separación, ya que a la ecuación (3) la separó en dos ecuaciones. Como es del conocimiento del alumno la solución para cada una de estas ecuaciones es:

i) Para $K=0$, $T(t) = At+B$ y $X(x) = Cx+D$ dando origen a $u(x,t) = (Cx+D)(At+B)$
ii) Para $K>0$, se puede suponer que $K=s^2$, $T(t) = Ae^{st} + Be^{-st}$ y $X(x) = Ce^{sx/a} + De^{-sx/a}$, generándose $u(x,t) = X(x)T(t) = (Ce^{sx/a} + De^{-sx/a})(Ae^{st} + Be^{-st})$
iii) Para $K<0$, se puede suponer que $K=-s^2$, $T(t) = A\cos st + B\,\mathrm{sen}\, st$ y $X(x) = C\cos sx/a + D\,\mathrm{sen}\, sx/a$, obteniéndose $u(x,t) = X(x)T(t) = (C\cos sx/a + D\,\mathrm{sen}\, sx/a)(A\cos st + B\,\mathrm{sen}\, st)$

Por otro lado, se tienen cuatro constantes de integración y se conocen cuatro condiciones del problema, a saber, dos condiciones de frontera y dos condiciones iniciales, por tanto, será posible determinar una solución particular de la ecuación de onda para esas condiciones. Sustituyendo las condiciones de frontera en las propuestas i) y ii) se observa que la solución que las satisfacen es la solución trivial, la cual implica que no hay movimiento. Para la propuesta iii) después de aplicar las condiciones de frontera se genera la solución: $u_n = u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = (\mathrm{sen}\, n\pi x/L)(E_n \cos an\pi t/L + F_n\, \mathrm{sen}\, an\pi t/L)$. Habrá tantas funciones solución $u=u(x,t)$, de

[21] Por razones de espacio se redujo el desarrollo de la solución de la ecuación diferencial parcial.

la ecuación de onda, como valores tomen las n. En las ecuaciones diferenciales parciales lineales y homogéneas la suma de soluciones también es solución. Por tanto, es solución de la ecuación diferencial parcial (1) la siguiente: $u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\,(n\pi x/L)(E_n \cos an\pi t/L + F_n \,\text{sen}\, an\pi t/L) \quad ....(4)$$

Obsérvese que esta ecuación posee solamente dos constantes de integración y faltan dos condiciones para determinar de manera única la solución de la ecuación de onda. Al sustituir las condiciones iniciales se determinan las constantes de la ecuación (4), en donde los E_n y F_n son los coeficientes de la serie de senos de Fourier dados por las ecuaciones (5) y (6):

$$E_n = (1/L)\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,(n\pi x/L)\,dx \quad .... (5) \qquad F_n = (1/an\pi)\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,(n\pi x/L)\,dx \quad .... (6)$$

La transferencia del conocimiento

La transferencia del conocimiento es una de las habilidades catalogadas entre las de orden superior (Nickerson, Perkins y Smith). Entendida como la habilidad que tiene un individuo para plasmar su bagaje matemático en la resolución de un problema, así como saber emplear las habilidades formativas que ofrece la matemática en la resolución de problemas de toda índole científica, esto es, desde transitar entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático (en ambas direcciones) cuando se trata de fenómenos o problemas de otras áreas científicas, hasta hacer uso del espíritu científico, crítico y analítico que desarrolla la matemática en cualquier tarea profesional.

El término de transferencia del conocimiento también empleado por Ausubel, lo sustenta en su teoría sobre aprendizajes significativos, entendidos como aquellos que tienen significado o sentido para el estudiante.

Para determinar la significancia del contenido a enseñar, Ausubel establece que el nuevo conocimiento deberá de ser relacionado con otros conocimientos familiares, en donde los elementos sustanciales son en relación con la disciplina que está en tratamiento. Se considera que la forma de dar esta relación no necesariamente es a través de la misma disciplina, sino a través de algo que sea atractivo para el alumno, como lo son las propias asignaturas de su carrera profesional. De hecho, este supuesto es un elemento de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, en donde se ha demostrado que la vinculación de la matemática con las áreas de estudio de la carrera en cuestión es un gran elemento motivador y significante.

La detección de los indicadores de la transferencia del conocimiento se lleva a cabo buscando todos los factores de asociación con el tema o concepto involucrado.

Si observamos que lo planteado es un problema y se toman en cuenta las etapas de Polya se puede decir que la transferencia del conocimiento se presenta en la primera, segunda y cuarta etapas, ya que la primera requiere de representar el problema en otros registros para pasar a la segunda etapa y construir el modelo matemático, mientras que la cuarta etapa lleva a cabo el proceso inverso al de la primera etapa, es decir, los resultados matemáticos ahora se traducen al lenguaje del problema para

darle la solución requerida, llevándose a cabo nuevamente transferencia del conocimiento.
En la primera etapa está presente el tránsito entre los diferentes registros de los objetos involucrados, para que se favorezca el conocimiento es necesario transitar según sea el caso entre los registros aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual, siendo un primer indicador de la transferencia del conocimiento.
La segunda etapa, que corresponde a la construcción del modelo matemático pone de relieve los diferentes enfoques que debe tener un concepto matemático. En la matemática en el contexto de las ciencias se ha hecho mucho hincapié en el hecho de que cada concepto o tema matemático posee diferentes enfoques y que es necesario conocer aquellos que son empleados en la carrera de estudio. Constituyéndose un segundo indicador de la transferencia del conocimiento.
En esta segunda etapa también se muestra la necesidad de hacer "consideraciones" para poder realizar la modelación matemática, es decir otro indicador de la transferencia del conocimiento está dado por las equivalencias de conceptos matemáticos bajo ciertas condiciones.
Un indicador que garantiza el que los conocimientos matemáticos sean aplicados a cualquier tipo de problema es la descontextualización de los temas y conceptos matemáticos cuando se usa la didáctica de la matemática en contexto, siendo éste otro indicador más para la transferencia del conocimiento.
No significa que sean los únicos los indicadores aquí mencionados, sino que son los que han salido a la luz en esta investigación. Se está en la búsqueda de más indicadores.

La etapa experimental

Para la selección de los estudiantes y para que se pudiera medir la variable transferencia del conocimiento se controlaron las variables relativas a la infraestructura cognitiva, en la nomenclatura de Ausubel (conocimientos previos) de tal forma que la selección de la muestra se dividió en dos estratos: los que poseían "buenos conocimientos" y los que no los poseían. Los conocimientos elegidos, de acuerdo a la contextualización fueron los conceptos sobre derivación, ecuación diferencial, solución de una ecuación diferencial, condiciones iniciales y solución de ecuaciones diferenciales parciales por separación de variables. Cabe mencionar que otra variable que se tomó en cuenta fue el conocimiento acerca del problema sobre la cuerda vibrante.
El grupo experimental constó de catorce estudiantes de tercer a quinto semestres de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica. Se les comentó lo que se perseguía con la experimentación. Se les planteó el problema de la cuerda vibrante, se les pidió que lo resolvieran, para lo cual trabajaron en equipos de dos personas.
Después del análisis de la información se concluyó, con diferentes grados de profundidad, que: la transferencia del conocimiento está íntimamente relacionada con los conocimientos previos que posee el estudiante. Los estudiantes con buenas bases obtienen la transferencia del conocimiento, mientras que los estudiantes con malas bases no lo logran. Nuevamente se observó la motivación que ofrece la matemática en contexto a los alumnos.

Conclusiones

Los alumnos al saber para qué les van a servir las matemáticas que estudian se ver motivados hacia el curso de matemáticas, incidiendo en su buen desempeño escolar. La matemática en contexto favorece la transferencia del conocimiento.

Bibliografía

Ausubel David P., Novak Joseph D. y Hanesian Helen (1990). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Camarena G. Patricia (1988). Reporte del proyecto de investigación titulado: Propuesta curricular para la academia de matemáticas del Departamento de ICE-ESIME-IPN.

Camarena G. Patricia (1990). Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en *electrónica*. Editorial ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Camarena G. Patricia (1996). El contexto y las ecuaciones diferenciales lineales. Memorias del 6º Coloquio Académico de la ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2000). Reporte de investigación titulado: *Los modelos matemáticos como* tapa de la matemática en el contexto de la ingeniería. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2001). Reporte de investigación titulado: *Registros cognitivos de la* matemática en el contexto de la ingeniería. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia (2002). La formación de profesores de ciencias básicas en ingeniería. *Memorias del* 3º nacional y 2º internacional: Retos y expectativas de la Universidad, México.

Camarena G. Patricia (2002). La matemática en el contexto de las ciencias: fase didáctica. *Acta*Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 16, tomo I, Cuba.

Hsu W. (1970). *Análisis de Fourier*. Editorial Iberoamericana.

Muro U. Claudia y Camarena G. P. (2002). La serie de Fourier en el contexto del proceso de *transferencia de masa*. Revista "Científica" The Mexican Journal of Electromechanical Engineering. Volumen 6, No. 4.

Nickerson Raymond S., Perkins David N. y Smith Edward E. (1994). *Enseñar a pensar, aspectos* de la aptitud intelectual. Editorial Paidós.

Zúñiga S. Leopoldo (2003). Sobre las funciones cognitivas en el aprendizaje del cálculo diferencial de dos variables en el contexto de la ingeniería. XVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Chile.