

CONCEPCIONES ALTERNATIVAS QUE, REFERENTES AL  
COMPORTAMIENTO VARIACIONAL DE FUNCIONES, MANIFIESTAN  
PROFESORES Y ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Crisólogo Dolores Flores, Luis Arturo Guerrero Azpeitia  
CIMATE de la UAG, CECyTEH, México  
[cdolores@uagro.mx](mailto:cdolores@uagro.mx), [lguerrero271@hotmail.com](mailto:lguerrero271@hotmail.com)

**Resumen**

En este artículo se reportan los resultados de una investigación que explora las concepciones alternativas de profesores y estudiantes de bachillerato acerca del comportamiento variacional de funciones. Para tal exploración se diseñó un cuestionario en el que se usan los sistemas de representación verbal, gráfico y analítico. En especial se exploraron concepciones relativas al comportamiento variacional de funciones [v. gr: Para qué  $x$ ,  $f'(x) > 0$ ], comportamiento variacional y signo simultáneamente [v. gr: Para qué  $x$  se cumple que:  $f'(x) > 0$  y  $f(x) < 0$ ] y las relativas a los procesos de reversibilidad: [v. gr: Dada  $f'(x)$  esbozar  $f(x)$  y viceversa]. Los resultados indican que una cantidad significativa de encuestados, creen que  $f(x) < 0$  si su gráfica está en el semieje negativo de las  $x$ ; consideran a  $f'(x)$  como asociada a un punto y no al comportamiento de  $f(x)$ ; la mayoría se muestra imposibilitado para transferir información variacional de la gráfica de  $f'(x)$  a  $f(x)$ .

**Elementos básicos de la investigación**

**Problema y objetivo.** Varios trabajos de investigación (Dolores, 1996; Dolores, 1998; Dolores/Guerrero/Medina/Martínez, 2001; Dolores/Guerrero, 2002; Cáceres, 1997) muestran que en situación escolar, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (PLV) en estudiantes universitarios y preuniversitarios es muy deficiente. En el marco de este problema global, adoptamos un problema específico: cómo se manifiestan en los profesores y estudiantes de bachillerato de un mismo subsistema educativo esas deficiencias, en especial cuando analizan el comportamiento de funciones. El análisis de funciones es muy importante en la escuela media y superior pues en él se sintetiza el objetivo primordial de la matemática de las variables. Por ello en esta investigación nos planteamos como objetivo, detectar y caracterizar las concepciones alternativas de profesores y estudiantes de bachillerato sobre los aspectos básicos del análisis de funciones.

**Elementos teóricos.** El PLV es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática del cambio por una lado y los procesos del pensamiento por otro; implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio (Cantoral, 1997). Por otro lado, las representaciones semióticas juegan el papel de mediatizadores del conocimiento en la actividad matemática, a través de ellos, las representaciones mentales se exteriorizan para fines de comunicación y son al mismo tiempo esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento, ya que aquellas dependen de la interiorización de las representaciones semióticas (Duval, 1998). Los rasgos característicos del comportamiento de las funciones de nuestro interés son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula; estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica,

analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los profesores y estudiantes. En los medios escolares se cree que las gráficas son de gran ayuda para visualizar el comportamiento de funciones. Sin embargo, con frecuencia esas *visualizaciones* y los significados que los estudiantes atribuyen a las gráficas no son congruentes con los significados aceptados en textos o los que comparten los expertos. Esta incongruencia causa conflictos en la comprensión y aceptación de los significados, por ello ha recibido varias denominaciones: errores, errores sistemáticos, preconcepciones y concepciones alternativas. El término *error* enfatiza la incongruencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado, las *preconcepciones* se caracterizan por aquel tipo de conocimiento precientífico formado por las experiencias cotidianas y que está fuertemente arraigado en la mente, las *concepciones* pueden o no ser acordes con los significados aceptados por textos y expertos, por nuestra parte en este trabajo adoptamos el término *concepciones alternativas* en el sentido de Confrey (1990), Mevarech y Kramarsky (1997), porque enfatiza lo que las personas *piensan* o *saben* por sobre lo que no conocen.

Metodología. De acuerdo con los resultados obtenidos en la primera parte de esta investigación, (Dolores/Guerrero 2002) y que consistió en la aplicación de un cuestionario a 16 profesores integrado por 9 preguntas, se procedió al diseño de un segundo cuestionario para ser aplicado a los estudiantes del mismo subsistema educativo en el que imparten clase los profesores, esto con la finalidad de tener mayores elementos para describir la situación que prevalece al respecto. Dicho cuestionario se estructuró para que permitiera extraer información sobre las concepciones de los estudiantes al analizar el comportamiento de funciones por medio de los sistemas de representación gráfico, analítico y verbal. Se plantearon ocho situaciones diseñadas sobre la base de tres criterios: dadas las condiciones analíticas de  $f'(x)$  construir o seleccionar  $f(x)$ , dadas las condiciones (en forma verbal) de  $f'(x)$  seleccionar  $f(x)$ , y, dada la gráfica de  $f'(x)$  construir  $f(x)$ .

CUADRO 1. CARACTERÍSTICAS DE LAS PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO

PREGUNTAS	TRANSICIÓN	DADA LA CONDICIÓN VARIACIONAL EN FORMA:
1, 2, 3	Analítico-Gráfico	Analítica de $f'(x)$ , seleccionar la gráfica de $f(x)$
4, 5	Verbal-gráfico	Verbal de $f'(x)$ , seleccionar la gráfica de $f(x)$
7	Analítico-Gráfico	Analítica de $f'(x)$ , construir gráfica de $f(x)$
6, 8	Gráfico-gráfico	Gráfica de $f'(x)$ , construir la gráfica de $f(x)$

El cuestionario se aplicó a 100 estudiantes de 7 planteles de una institución de educación media superior del estado del centro del país que ya habían acreditado sus cursos de cálculo. A continuación se presenta el análisis de las respuestas, siendo importante aclarar que se retoman las concepciones alternativas manifestadas por los profesores, presentando simultáneamente los resultados cuando fue pertinente ante

cuestionamientos iguales o similares; las gráficas correspondientes a cada una de las preguntas (cuando fueron proporcionadas) aparecen en el Cuadro 2.

**Análisis de las respuestas dadas al cuestionario**

Pregunta 1. **En qué gráfica se cumple que  $f'(x) < 0$  para toda  $x$ ?** El 52% de los estudiantes encuestados, asociaron como función decreciente a la gráfica 1B, misma que además es negativa, por otra parte, el 26% eligió la opción 1C (también negativa), en tanto que las gráficas 1<sup>a</sup>, 1D y 1E, fueron consideradas en un 15, 14 y 14% respectivamente. Siendo preciso resaltar que los profesores, ante una pregunta similar, asociaron correctamente a la gráfica en cuestión en un 40% y sólo el 20% asoció con función decreciente a aquellas gráficas en las que  $f(x) < 0$ .

Pregunta 2. **En qué gráfica se cumple que  $f'(x) > 0$  y  $f(x) < 0$ .** Los estudiantes consideraron en un 30%, que la gráfica mostrada en 2E satisface las condiciones solicitadas, sin embargo en esta gráfica se observa que  $f'(x) > 0$  pero las abscisas son negativas, por otra parte, en un 28% de los casos eligieron a las opciones 2<sup>a</sup> y 2D, en las cuales se tiene que en ambas  $f(x) > 0$ , la opción 2B fue seleccionada en un 25% por un 23% de la opción 2C; en estos dos últimos casos se tiene que  $f(x) < 0$ .

Pregunta 3. **En qué gráfica se cumple que  $f'(x) < 0$  y  $f(x) > 0$ .** Para las gráficas que satisfagan las condiciones de función decreciente pero de signo positivo, los alumnos asociaron a la gráfica 4B en el 34% de los casos, en esta gráfica se observa que  $f(x) < 0$  y con abscisas negativas; en tanto que, el 33% eligió a la gráfica mostrada en 3C en la que  $f(x) < 0$  y con abscisas positivas, por otra parte y en porcentajes menores, los estudiantes asociaron en un 28% y 23% respectivamente a 3D y 3<sup>a</sup> ambas gráficas de funciones positivas, finalmente al inciso 3B, lo seleccionaron en un 10%.

Pregunta 4. **Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y positiva, o bien, función decreciente y negativa, según el comportamiento de sus gráficas.** Los profesores asociaron simultáneamente en un 66.7% a las gráficas 4<sup>a</sup> y 4C con las condiciones *creciente y positiva*, en tanto que los estudiantes hicieron lo propio en un 48%. Por otra parte en el caso de las gráficas 4D y 4E, el 53% de los profesores considera que la gráfica mostrada es decreciente y negativa mientras que para los estudiantes la gráfica 4D cumple dichas condiciones en un 52% y para 4E, el 39% de los estudiantes considera que la gráfica es creciente y positiva. Finalmente para la gráfica 4B, los profesores y estudiantes consideraron que esta es decreciente y negativa en un 93% y 72% respectivamente, en tanto que para 4F, hicieron lo propio en un 80% y 51% correspondientemente.

Pregunta 5. **Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y negativa, o bien, función decreciente y positiva, según el comportamiento de sus gráficas.** La gráfica mostrada en 5D, es creciente y negativa para el 53% de los profesores y el 45% de los estudiantes, mientras que la gráfica 5E es decreciente y positiva para el 53% de profesores y 23% de los alumnos (afirmaciones correctas). Para el caso de la gráfica 5<sup>a</sup>, el 60% y 39% de los profesores y alumnos respectivamente considera que es creciente y negativa, en tanto que para 5B asocian la misma característica el 13% y 40% de los encuestados; por otra parte, en relación a la gráfica 5F los porcentajes de

asociación entre esta gráfica y la condición decreciente y positiva fueron del 20% para profesores y 41% para estudiantes. Del análisis de las asociaciones hechas en las preguntas 3 y 4, se observó que existe cierto sector de encuestados que consideran que una función es creciente si es positiva, aumentando el porcentaje de asociación en aquellas gráficas en las que  $x > 0$ ; en tanto que una función es decreciente si ésta es negativa privilegiando el caso en el que  $x < 0$ .

**Pregunta 6. Se muestra una porción de la gráfica de la función  $f'(x)$  en torno de  $x = a$ , esboce la gráfica de  $f(x)$  en torno a ese punto.** El 75% de los profesores realizaron producciones, mientras que los estudiantes lo hicieron en un 45% de los casos. De las producciones hechas por los profesores, tenemos que en el 83.4% de los casos, se consideró al punto  $(a, 0)$  como un cero de  $f(x)$ , esta cifra contrasta con el 9% de los estudiantes que realizaron gráficas con iguales condiciones. En relación a la producción de los estudiantes que mayor frecuencia presentó, fue una reflexión respecto al eje de las ordenadas ( $f(-x)$ ) con el 32% de la población. Solo uno de los profesores fue capaz de esbozar una gráfica que cumple con las condiciones solicitadas.

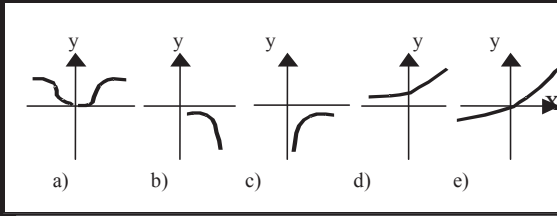
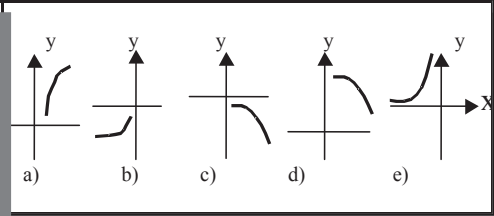
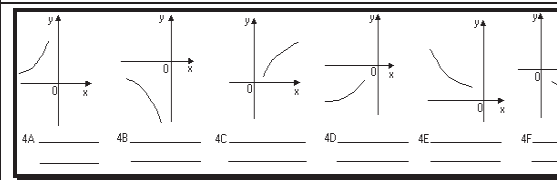
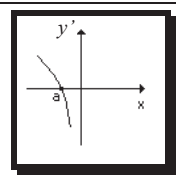
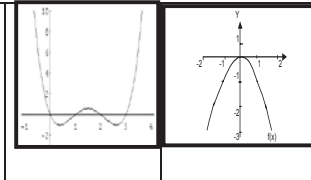
**Pregunta 7 A.** Si  $f(x)$  tiene un solo punto estacionario en  $x = -2$ ,  $f'(x) > 0$  para  $x < -2$  y  $f'(x) < 0$  para  $x > -2$ . Esboce una gráfica para  $f(x)$  que satisfaga estas condiciones y de la fórmula de la función (pregunta para profesores). El 66.7% de los profesores que realizaron al menos un esbozo para las condiciones solicitadas, asoció al punto estacionario de la función con el cero de la misma. Con estos datos es posible considerar que existe confusión entre  $f(x)$  y  $f'(x)$ , al menos en  $x = a$ . El 45.5%, esboza gráficas que cumplen con las condiciones de  $f(x) > 0$  para  $x < -2$  y para  $x > -2$ , aunque estas condiciones debieron cumplirse pero para  $f'(x)$ . Un 27.3% bosquejó una gráfica que cumple las condiciones solicitadas para  $f'(x)$ , solamente un profesor no asoció al punto estacionario con el cero de la función. Solamente uno de los encuestados construyó una gráfica que cumple con todas las condiciones solicitadas. Existe proclividad a confundir a  $f(x)$  con  $f'(x)$  al menos en un 60% de los casos.

**Pregunta 7 B.** Trace la gráfica de  $f(x)$ , si se sabe que: tiene puntos estacionarios en  $x = 1$  y  $x = 3$ ;  $f'(x) > 0$  para  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  en el intervalo  $1 < x < 3$  y  $f'(x) > 0$  para  $x > 3$  (pregunta para alumnos). Para esta pregunta, el 47% de la población realizó alguna producción siendo 25 esbozos diferentes, sin embargo en 72% de ellos es manifiesto que los estudiantes confunden al menos un punto estacionario con la intersección de la gráfica con el eje de las abscisas, esbozando incluso una gráfica que cumple con las condiciones pero para  $f(x)$  y no para  $f'(x)$ , es posible que para ellos sea cierto que  $f(x_0) = f'(x_0)$ .

**Pregunta 8 A.** La gráfica siguiente corresponde a cierta  $f'(x)$ , esboce al menos una que corresponde a  $f(x)$  (pregunta para profesores). El 56.3% de los profesores realizó alguna producción, de las cuales, el 44.4% de los casos consistió en un esbozo de una gráfica creciente, mientras que el 22% pretendió realizar un análisis de  $f'(x)$  a través de rectas tangentes en algunos puntos.

Pregunta 8 B. Para la gráfica siguiente esboce la gráfica respectiva de  $f'(x)$  (pregunta para alumnos). El 48% de los alumnos esbozó alguna gráfica y fueron en total 12 gráficas diferentes, la más representativa fue, con el 25% de los casos una gráfica que en forma de parábola que la reflexión de la curva dada respecto al eje de las abscisas. Otras producciones aunque menos relevantes consisten en una parábola con el eje focal coincidente con el eje de las abscisas con el 5% de los casos y una gráfica idéntica a la mostrada en el cuestionario con el 4% de los esbozos. Ninguno de los alumnos dibujó una gráfica que satisfaga las condiciones solicitadas.

CUADRO 2. GRÁFICAS DADAS EN LAS PREGUNTAS 2, 3, 4 ...9

									
Pregunta 1					Pregunta 2 y 3				
									
Pregunta 4 y 5						Pregunta 6		Pregunta 8-A	Pregunta 8-B

**Concepciones alternativas encontradas**

Cierto sector de los profesores y estudiantes cuestionados asocian consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva (expresadas en forma verbal-escrita) con las gráficas correspondientes (66.7% y 48% respectivamente), mientras que al pedirles que asocien las condiciones creciente y negativa (bajo las mismas condiciones) por un lado, y decreciente y negativa por otro, los porcentajes disminuyen sensiblemente (53% y 45%); sin embargo al realizar una revisión del resto de las respuestas hechas por los encuestados, se observan ciertas tendencias como la de confundir el crecimiento de una función ( $f'(x)>0$ ) con su ubicación en el semieje positivo de las abscisas, en tanto que el decrecimiento de la función ( $f'(x)<0$ ) es asociada con las gráficas cuya ubicación es el semieje negativo de las abscisas, por una parte y por otra y con mayor porcentaje (poco mas del 50%) se observa la proclividad a relacionar la expresión  $f'(x)>0$  con una gráfica cuyas ordenadas sean positivas, mientras que, aquella función que posea ordenadas negativas, es asociada con la expresión  $f'(x)<0$ . En términos generales notamos la tendencia de sólo atender una condición cuando se planteaban dos simultáneamente. Es probable que esté fuertemente arraigada la idea de asociar crecimiento con *positividad* y de decrecimiento con *negatividad* de la función.

CUADRO 3. ALGUNAS PRODUCCIONES DE LOS ENCUESTADOS					
Pregunta 6-A producciones profesores					
Pregunta 6-B producciones alumnos					
Pregunta 7-A producciones profesores					
Pregunta 7-B producciones alumnos					
Pregunta 8-A producciones profesores					
Pregunta 8-B producciones alumnos					

Se detectó gran proclividad tanto en los profesores como en los estudiantes a considerar que, gráficamente se cumple que  $f(x_0)$  es equivalente con  $f'(x_0)$ , en virtud de que alrededor del 80% de los profesores y el 70% de los estudiantes, construyeron

gráficas en las que hacen manifiesto que  $f(x_0) = 0$  y  $f'(x_0) = 0$  son la misma expresión, esto al menos en el tratamiento gráfico.

En referencia al proceso de reversibilidad, el paso de la gráfica de  $f'(x)$  a  $f(x)$ , es escaso en profesores y prácticamente nulo para los estudiantes, esbozando gráficas en las que buscan satisfacer las propias condiciones de  $f'(x)$  y no las correspondientes a  $f(x)$ , solo trabajan en un mismo plano de coordenadas pues se muestran imposibilitados para transferir información variacional del plano de coordenadas  $(x, f'(x))$  al de coordenadas  $(x, f(x))$  o viceversa. Generalmente el proceso de graficación de  $f'(x)$  dada  $f(x)$ , es relativamente transitable (empíricamente) para los profesores, pero no así para los estudiantes quienes se vieron imposibilitados de construir una gráfica que cumpliera con las condiciones solicitadas; además, en nuestra indagación, observamos que a los profesores al plantearles construir  $f(x)$  dada  $f'(x)$  esbozan rectas tangentes en algunos puntos de la gráfica de  $f'(x)$ . Solo un profesor construyó una gráfica aceptable.

### Bibliografía

- Cantoral R (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Seminario de Investigación, Área de Educación Superior, Cinvestav/IPN México D.F.
- Confrey J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of research in Education*. Vol. **16**. Pp. 3-56
- Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Dolores C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*. Tesis Doctoral. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la UAG. Chilpancingo Gro.
- Dolores C./Bello G./ Carvajal D. F (2002). *Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria*. Artículo en proceso de revisión para la revista RELIME. Inédito.
- Cáceres T. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional. Un estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN, México D.F.
- Dolores C./Guerrero L./Medina M./Martínez M. (2001). *Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales*. Reporte de Investigación aceptado para su publicación en las Actas de RELME XV. Buenos Aires Arg.
- Leinhardt, G. / Zaslavsky, O./ Stein M.K. (1990) Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* Vol. **60**. Pp. 1-64
- Mevarech Z. & Kramarsky B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. **32** Núm. 3. pp. 229-263
- Dolores C./Guerrero L. (2002). *Concepciones alternativas que referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato*. Reporte de Investigación aceptado para su publicación en actas de RELME XVI. La Habana Cuba.
- Wainer H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher* Vol. **21**, pp.14-23