LA COVARIACIÓN DE PROGRESIONES EN LA RESIGNIFICACIÓN DE FUNCIONES

Marcela Ferrari Escolá y Rosa María Farfán
Cinvestav, IPN, México
mferrari@mail.cinvestav.mx, @mail.cinvestav.mx

Resumen
En este artículo se aborda la función logaritmo desde una visión socioepistemológica. Se presenta y desarrollan las ideas base para el diseño de secuencias de aprendizaje que respeten la hipótesis de que la covariación entre progresiones, que halla un robusto sustento en el devenir histórico de la noción de función, es un argumento que nos permitirá crear un puente entre la operatividad y la funcionalidad de los logaritmos, es decir, lograr su construcción escolar así como remirar la naturaleza de ciertas funciones.

Introducción

Nuestro trabajo de investigación busca profundizar en la construcción social del conocimiento matemático partiendo de la necesidad de reorganizar la obra matemática con base en la reconstrucción de significados y pensando a la matemática como una actividad humana, por tanto cultural e históricamente determinada, como aspectos básicos a tener en cuenta al estudiar un fenómeno didáctico.
De trabajos como Trujillo (1995), Soto (1988), Confrey (1995, 2000), Lezama (1999), Ferrari, (2001) y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos lo cual nos lleva, de manera natural, a cuestionar modelos de difusión de conocimientos, concepciones, elementos que siendo útiles en determinados momentos perturban en otros niveles, es decir, devienen en obstáculos epistemológicos o didácticos.
La revisión bibliográfica realizada nos permitió localizar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1991, 1992, 2000), supeditan la construcción del logaritmo al de función y aquellos que, como Confrey (1995, 2000), Ferrari (2003) respetan la naturaleza propia de cada función. Por nuestra parte, pensamos que mediante una dialéctica entre ambas posturas e introduciendo como eje la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, se podría resignificar el concepto de logaritmos a la par de robustecer el concepto mismo de función.
La problemática que abordamos requiere por tanto de un análisis a profundidad de este fenómeno desde los cuatro polos que consideramos fundamentales, el epistemológico, el didáctico, el cognitivo y el sociocultural, para lo cual se utiliza la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación y la Socioepistemología como marco para este trabajo.

Antecedentes

La indagación epistemológica reportada en Ferrari (2001) sobre logaritmos, que pretende dar evidencias de la construcción social de este conocimiento matemático, establece que se pueden distinguir, tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si se

toma como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, argumento utilizado por Napier para su primera definición.
Como primer momento, se considera a *los logaritmos como transformación*, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda de facilitar engorrosos cálculos producto de las necesidades sociales de la navegación, artillería y astronomía. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentado regresar a la aritmética, es decir, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la confluencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de la relación entre ambas surge la definición de los logaritmos. Los elementos matemáticos utilizados son trabajados, en nuestras aulas, desde los niveles iniciales. La búsqueda de patrones numéricos, la relación entre ellos, la economía de recursos para expresar ideas matemáticas son abordados en las currícula y libros de texto actuales, pero no relacionados y utilizados a la hora de introducir los logaritmos.
Su exploración en otros contextos, producida principalmente en el siglo XVIII, lleva a considerar como segundo momento el de *los logaritmos como modelizadores* pues en esta etapa se determinan sus características geométricas y por tanto logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVIII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo registro "algebraico-geométrico" que se estaba desarrollando; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia encontrando otro lenguaje para ser descritos ingresando así en los avatares de un cálculo en plena gestación; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos a partir de su desarrollo en serie de potencias lo cual les abre las puertas para acceder al discurso matemático del siglo XVIII y adquirir el status de función.
Todos estos argumentos y exploraciones que giran en torno a descubrir las características logarítmicas en distintos contextos mediante el uso explícito de la relación entre progresiones está absolutamente fuera del discurso matemático de nuestros días. Aparece en los libros de difusión de conocimiento del siglo XVII, para desaparecer completamente a partir de las ideas eulerianas y de su vinculación definitiva con las funciones exponenciales mediante el concepto de función inversa.
Comienza así, un tercer momento que se identifica como la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos,* conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones dadas anteriormente, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.
Esta visión del devenir de los logaritmos como objetos de saber lleva a proponer como hipótesis epistemológica la incorporación en el diseño de las nociones de progresión aritmética y geométrica y su fuerte vinculación con los logaritmos. Se considera entonces, que son elementos que pueden resultar útiles, al igual que en el desarrollo histórico de los logaritmos, para facilitar el pasaje desde las características aritméticas de esta noción hasta las funcionales permitiendo la exploración en distintos registros y su correspondiente vinculación.

Función lineal como relación entre progresiones aritméticas

A partir de las ideas presentadas en los parágrafos anteriores para logaritmos y que pueden profundizarse, para el concepto de función, con la lectura de Youschkevitech (1996) o Farfán (1997) en los cuales el desarrollo de la noción de función es tema central, surge evidente la importancia de la que consideramos como primera instancia de uno de los mecanismos de la construcción social del conocimiento, esto es, su uso. Efectivamente, el concepto "función" no surge espontáneamente dentro de una estructura teórica, sino que conlleva un proceso de evolución en el cual la necesidad de responder a una pregunta surgida, por ejemplo, de las inquietudes por "matematizar" la naturaleza provoca la aparición de ideas preliminares en las cuales se comienza a percibir la que, luego de un largo proceso, se convertirá en pieza fundamental de la estructura teórica de la matemática actual.

En este apartado, retomaremos el tratamiento y uso que en épocas anteriores a la definición formal del concepto de función jugaron un papel interesante en el desarrollo del mismo. Nos referimos a los intentos de describir el movimiento de los cuerpos en el espacio surgidos desde la antigüedad. Entre las primeras formulaciones que encontramos en la literatura científica sobre el movimiento de los cuerpos se hallan las de Galileo quien en su tratado: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Attentin alla Mecanica y Movimenti locali* de 1638 define distintos movimientos, llegando a describir la caída libre de un cuerpo.

Efectivamente, como definición de "movimiento uniforme" hallamos la siguiente sentencia:

> *Por movimiento igual o uniforme entiendo aquel en que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, cualesquiera que éstos sean, son iguales entre sí* (en Cantoral, 1993, p.15).

El mismo Galileo llega a la definición de "movimiento naturalmente acelerado" luego de exponer la necesidad de describir la caída libre de los cuerpos pesados como esencia del movimiento acelerado. En este sentido, establece:

> *... un móvil que cae partiendo de una situación de reposo recorre, en tiempos iguales, espacios que mantienen entre sí la misma proporción que la que se da entre los números impares sucesivos comenzando por la unidad...* (en Cantoral, 1993, p.14).

Percibimos entonces, en estos primeros intentos por describir matemáticamente el movimiento de los cuerpos en el espacio, ideas que llamaremos de "funcionalidad", es decir, de dependencia o correspondencia entre cantidades, en este caso, espacio-tiempo o velocidad-tiempo.

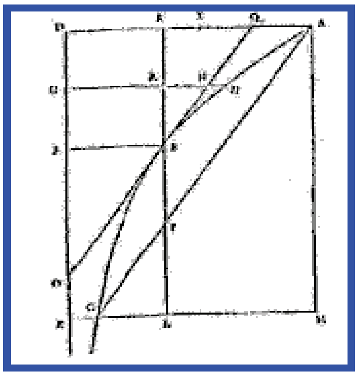
Si analizamos las ideas de Galileo, podemos considerar que la herramienta que utiliza en sus explicaciones es la relación entre las que hoy conocemos como "progresiones aritméticas" es decir, aquellas sucesiones numéricas en las que dos términos consecutivos difieren en una misma constante.

Sistema logarítmico como relación entre progresiones aritméticas y geométricas.

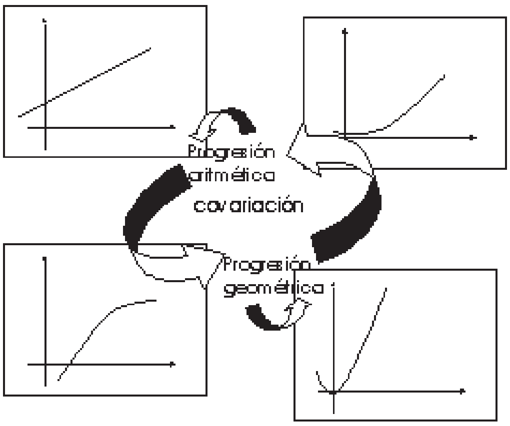
> *Si un cuerpo es resistido en la razón de su velocidad, y se mueve por su sola inercia a través de un medio homogéneo, y los tiempos se toman iguales, las velocidades en el comienzo de cada uno de los tiempos están en una progresión geométrica, y los espacios descritos en cada uno de los tiempos son como las velocidades.*
>
> (Newton, 1993, p. 286)

Hemos visto que para describir ciertos movimientos, tales como el uniforme (velocidad constante) o la caída libre de un cuerpo (aceleración constante), basta con utilizar la relación entre progresiones aritméticas. Sin embargo, para describir el movimiento de un cuerpo cuando entra en juego la resistencia que un medio le ofrece es necesario utilizar otro tipo de progresiones, las llamadas geométricas pues la velocidad del cuerpo va disminuyendo en forma proporcional.
Newton, en el siglo XVIII, intenta describir el movimiento de un cuerpo esférico en un medio que le ofrece resistencia y publica el resultado de estas investigaciones en su tratado: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la Filosofía Natural), publicado en 1687.
Por ejemplo, en el *Libro Segundo: El movimiento de los cuerpos (En medios resistentes)* encontramos la Proposición II. Teorema II.
O Huygens que en su tratado sobre la luz establece que.....

... para encontrar los espacios recorridos en ciertos tiempos, cuando caen los cuerpos o suben perpendicularmente, y para conocer las velocidades al cabo de estos tiempos, había una línea curva, que he examinado largo tiempo antes, que es de gran uso en esta investigación. Se le puede llamar "*Logaritmique*" o "*Logistique*", no veo que se haya dado algún nombre aunque otros la hayan considerado antes. Estando ABC, que tiene una línea recta DE como asintota, en la cual si se toman partes iguales cualesquiera, como DG, GF, etc. y por los puntos D, G, F; etc. se trazan perpendiculares a la curva, se ve que las líneas DA, GH, FB serán proporcionalmente continuas.



A la luz de estos argumentos construidos por científicos de siglos anteriores, con el afán de describir ciertos fenómenos de la naturaleza, podemos discutir acercamientos a la construcción escolar de la función logaritmo y otras posibles maneras de mirar el concepto de función que podrían favorecer una apropiación más robusta de la misma.



Pensar en las funciones polinómicas, exponenciales, potencia y logarítmica como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas es una argumento de discusión y construcción de las mismas no generalizable a otras funciones tales como las trigonométricas. Esto reafirma nuestra idea de la importancia de reconocer la naturaleza propia de cada función.

Cabe ahora buscar evidencia, mediante el diseño de secuencias de aprendizaje que respeten esta hipótesis, que halla un robusto sustento en el devenir histórico de la noción de función, como el argumento que nos permitirá crear un puente entre la operatividad y la funcionalidad de los logaritmos, es decir, lograr su construcción escolar.

Bibliografía

Confrey, J. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in mathematics education 26*(1), 66-86.

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). La creación de los exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Eduativa 3*(1), 5-31.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflexive abstraction in advanced mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 159-202). New York, EE. UU.: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). EE. UU.: Mathematical Association of America. Vol 25.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), 47-70.

Farfán, RM (1997). *Ingeniería Didáctica. Estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2003). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Huygens, C. (1690). *Discours de la cause de la pesanteur.* Reeditado por IREM de Dijon (abril-1981)Lezama, J. (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Newton, I. (1968). Further logarithmic calculation. En D. Whiteside (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton Vol 2*. Cambridge, Gran Bretaña: University Press. (Trabajo original publicado en 1667).

Newton, I. (1693). Principios matemáticos. (A. Escohotado & M. Saenz, Trad.). Barcelona, España: Altaya. (Trabajo original publicado en 1686).Soto, E. M. (1988). Una experiencia de redescubrimiento en el aula: Acerca de los logaritmos de los números negativos y los orígenes de la variable compleja. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Trujillo, R. (1995). Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN. México.