

SOBRE LA NOCIÓN DE CONTINUIDAD PUNTUAL: UN ESTUDIO DE LAS
FORMAS DISCURSIVAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES
UNIVERSITARIOS EN CONTEXTOS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Eddie Aparicio y Ricardo Cantoral
Universidad Autónoma de Yucatán y Cinvestav IPN. México
alanda@tunku.uady.mx ; rcantor@mail.cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo se aborda un problema de enseñanza ligado al aprendizaje de conceptos básicos del análisis matemático clásico, particularmente nos ocupamos del concepto de continuidad puntual de una función real de variable real que es enseñado al nivel universitario. Se analizan algunas de las formas discursivas y acciones gestuales utilizadas por los estudiantes cuando estos discurren sobre la noción de continuidad puntual. Para ello, nos valimos de un diseño experimental basado en la aproximación teórica de naturaleza sistémica a la investigación en Matemática Educativa, la Socioepistemología. En este diseño se supuso que los conocimientos matemáticos en la mente de los estudiantes son el producto cultural de una serie de prácticas sociales. Específicamente, trataremos con la dimensión gestual de las acciones de visualización que los estudiantes movilizan cuando se desempeñan en el marco de un diseño experimental basado en la geometría dinámica. Al respecto utilizamos *Sketchpad, 4.0* - programa dinámico de geometría- .

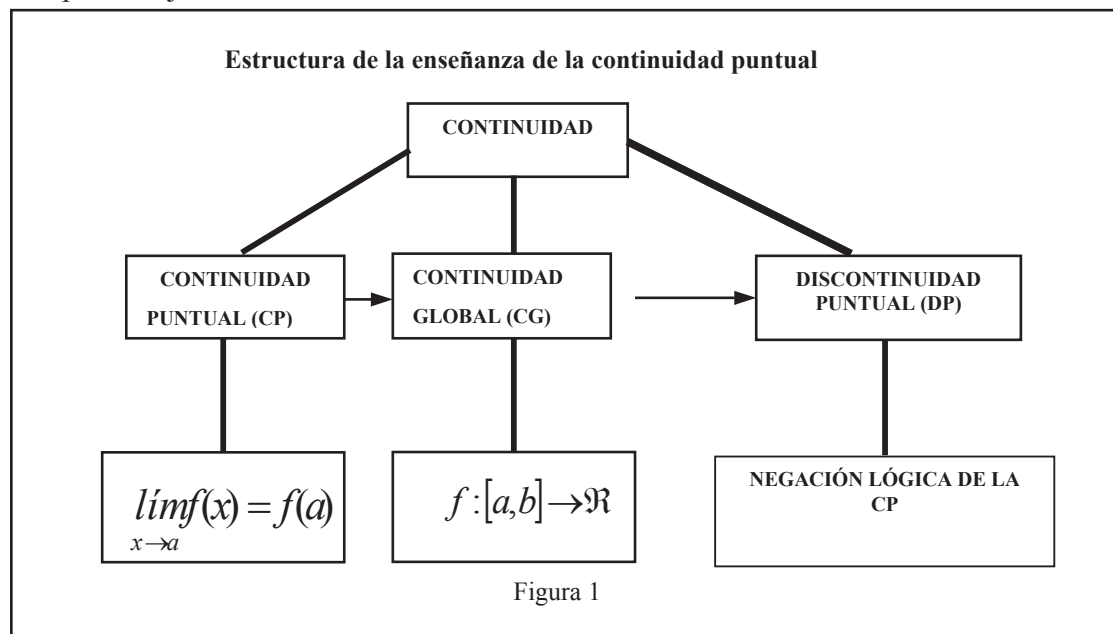
Introducción

El concepto de continuidad puntual de funciones reales de variable real es considerado básico en la enseñanza matemática universitaria. En la mayoría de los sistemas escolares, la presentación habitual de dicho concepto inicia considerando la definición de continuidad puntual de una función en un punto interior de un conjunto abierto en los reales. En seguida, se discuten al nivel operativo algunos criterios para decidir la continuidad o discontinuidad de una función en un punto. Sostenemos que este tipo de tratamiento escolar induce problemas de aprendizaje entre los estudiantes. Presuponemos que la noción de continuidad, en un sentido global, posee un carácter apriorístico en el ser humano. *Las personas perciben el cambio en su estudio de fenómenos reales en términos globales, no locales.* Tomemos por ejemplo, al movimiento libre de la mano que se desplaza de un lado a otro sin cesar, les imaginamos trayectorias continuas describiendo su movimiento, la mano entonces, recorre todos los puntos intermedios entre un extremo y el otro sobre su trayectoria, ¿cómo no habría de hacerlo? De la misma manera, en la caída de los graves se piensa que estos pasan por todos los puntos intermedios de su trayectoria.

Recientemente diversas investigaciones han buscado fundamentar la idea de emplear en el discurso escolar, elementos más diversificados y más interdependientes que no limiten la práctica escolar al tratamiento de los métodos y procesos algorítmicos ya sean estos de naturaleza aritmética o algebraica. Algunos ejemplos en la literatura especializada dan muestra de ello (Alanís, 2002; Dolores, 1999; Cantoral y Montiel, 2001). En nuestro estudio (Aparicio, 2003) detectamos que el aspecto gesticulativo permite a los estudiantes no sólo concebir a la función en general y a la función continua en un punto en particular, como un objeto susceptible de ser operado, sino que también son capaces de transitar entre las cinco diferentes representaciones, lo algebraico, numérico, geométrico, icónico, verbal – gestual- .

La continuidad: una visión en situación escolar

En la siguiente figura (fig. 1), hemos querido mostrar mediante un esquema, la estructura que se sigue en el tratamiento del concepto de continuidad en la mayoría de los textos escolares contemporáneos y la cual hemos considerado genera problemas de aprendizaje.



Perspectivas didácticas en el Análisis

Investigaciones como las de (Tall, 1981; Hitt, 1994; Sierra, 2000), señalan que las concepciones de los estudiantes sobre el concepto matemático de función continua están distantes de la definición formal que la enseñanza les ha dado. Sostienen además, que algunas de tales concepciones son el producto inducido desde su propia enseñanza. Estos estudios suelen centrar la atención en la forma en que el objeto matemático *función* es operado por el sujeto –alumno- que aprende al momento de resolver ciertos problemas o acertijos matemáticos. Investigaciones como estas, buscan aportar elementos que permitan entender y explicar algunas de las problemáticas asociadas al aprendizaje de la continuidad de una función. En general, la guía seguida consiste en actuar sobre el objeto matemático (funciones continuas en este caso) considerándole como una entidad preexistente a toda práctica de comunicación. Las preguntas que elaboran para clasificar las respuestas son del tipo, diga si es o no continua esta función, decida del conjunto de gráficas siguientes cuáles se corresponden con funciones continuas, etc. En cierto sentido, preguntan directamente lo que esperan ver aparecer, la continuidad, ignorando el hecho que quizá dichas respuestas estén ya condicionadas por las prácticas escolares. Por nuestra parte en cambio, seguimos un camino distinto pues el acercamiento didáctico que utilizamos es basado en un resultado de naturaleza epistemológica que quisimos continuar a la didáctica. De modo que, en nuestro diseño suponemos a la noción de continuidad puntual como una consecuencia de la discontinuidad puntual y no de la noción global de continuidad. Esto es, consideramos que la noción de continuidad

puntual se estabiliza entre los estudiantes sólo hasta que esta aparezca como un medio para evitar las discontinuidades de orden puntual.

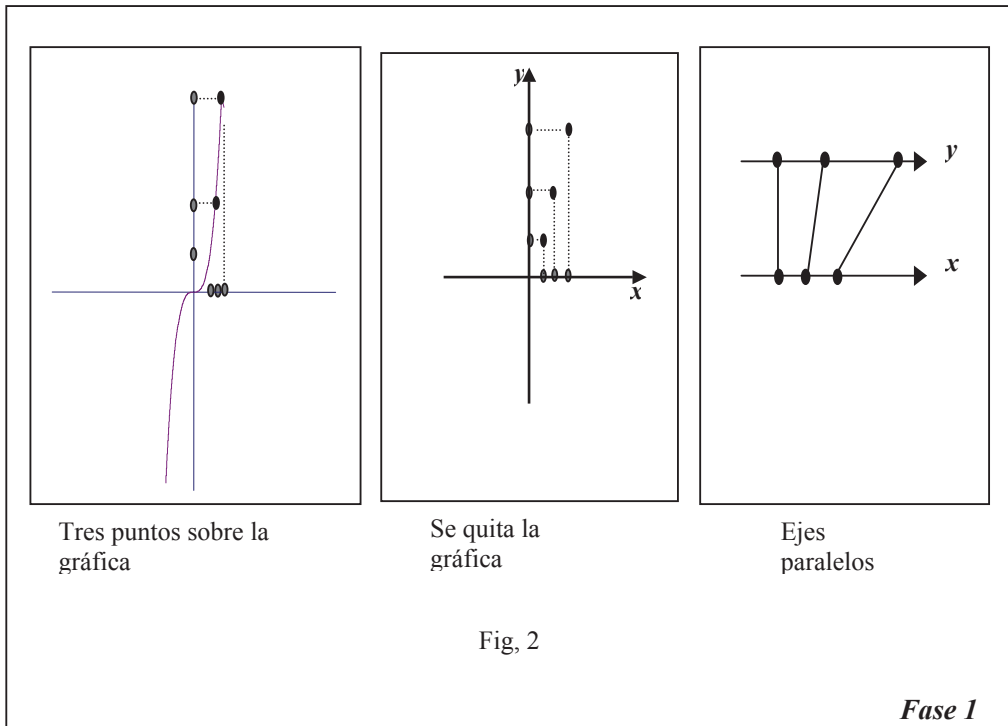
La perspectiva Socioepistemológica

La Socioepistemología es una aproximación que busca dar explicación de los fenómenos didácticos producidos en el campo de las matemáticas mediante el entendimiento de la construcción social del conocimiento y bajo un enfoque sistémico, que precisa de la incorporación de aspectos sociales, como la comunicación, la búsqueda de consensos, la construcción de lenguajes o el diseño de herramientas, en el estudio de tales fenómenos. En este sentido, desde esta perspectiva, la construcción de un conocimiento matemático necesariamente se encuentra ligado a aspectos más amplios y que rebasan la mera organización teórica del contenido: Aspectos epistemológicos, prácticas socioculturales, procesos avanzados del pensamiento y aquellos que tienen que ver con el funcionamiento de una institución escolar (Cantoral, 2001). De manera que, al centrar la atención en la definición formal del concepto, más que en el uso que los sujetos den en situaciones específicas, se dejan de lado algunos aspectos discursivos fundamentales para su aprendizaje. Tomemos por caso a la argumentación verbal que los alumnos pueden hacer al momento de articular sus expresiones lingüísticas con los aspectos propiamente gestuales que se utilizan al mover la mano, al recorrer una curva, y que proveen de elementos esenciales al proceso de visualización. De manera que resulta necesario entonces, reconocer el tipo de pensamiento y estrategias que el alumno pone en juego en el momento de generar conocimiento. Por ejemplo, analizar aquellas estrategias que en su naturaleza son de tipo variacional. Es así que partiendo de nuestros supuestos, decidimos ampliar las perspectivas ofrecidas en la didáctica del análisis, determinando incorporar como elementos de la investigación las prácticas asociadas a los objetos teóricos, procesos y conceptos. Así, además de las definiciones y los teoremas exploramos los usos lingüísticos, las gesticulaciones que sobre las nociones de continuidad y discontinuidad puntual se llevan a cabo entre estudiantes universitarios (Aparicio, 2003, Aparicio y Cantoral, 2002). Por ejemplo, hemos notado que la definición formal de continuidad puntual no parece constituir una base adecuada a partir de la cual sea posible construir significados asociados a la continuidad global. La extraña noción, de función continua en *un punto*, parece contravenir las cuestiones apriorísticas de la continuidad global.

La secuencia didáctica

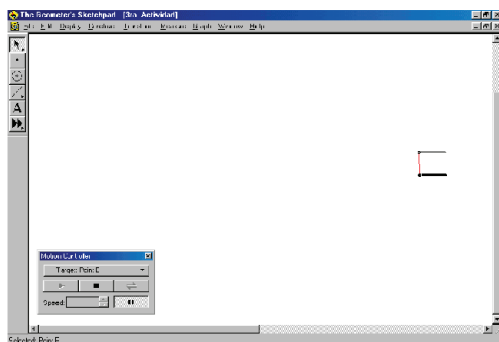
La implementación de la secuencia se llevó a cabo con ocho estudiantes (cuatro mujeres y cuatro hombres) de Ingeniería en Mecatrónica, Telemática y Biónica, la elección se hizo con base en los resultados de una actividad exploratoria aplicada a 30 estudiantes de las mismas especialidades, el requisito básico para la selección consistió en tener un cierto conocimiento de las funciones elementales del cálculo y un adecuado manejo sobre su representación gráfica. El desarrollo de la experimentación se realizó empleando papel, pizarrón y computadora. Con una serie de actividades ante la pantalla de la computadora y de acuerdo a tres fases previamente diseñadas. La fase de preparación para la lectura de las actividades, la fase de desarrollo de la secuencia y la fase de institucionalización de los saberes. En

la primera fase, se buscaba desarrollar las competencias necesarias entre los estudiantes para la adecuada lectura de las actividades planteadas – desarrolladas en una computadora utilizando el programa de geometría dinámica *Sketchpad, 4.0* - . En esta fase, se le presenta a los alumnos una secuencia de proyecciones en una pantalla, mostrándoles una gráfica conocida (la gráfica de la cúbica) y la consideración de tres puntos arbitrarios sobre ella, así como sus respectivas sombras o proyecciones sobre los ejes coordenados (fig. 2).

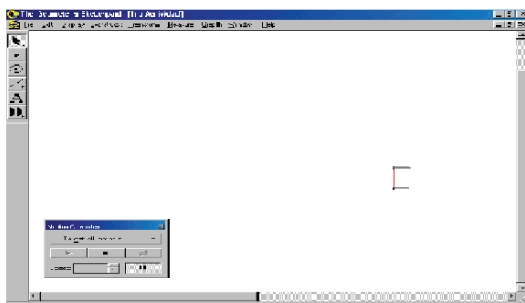


En la segunda fase se establece el escenario donde los alumnos discutirían la noción de continuidad puntual, a partir de la percepción global de la continuidad y la noción de discontinuidad puntual, mediante la explicitación de expresiones funcionales asociadas a las representaciones dinámicas vistas en la pantalla de la computadora. En la última fase, (fase de institucionalización) se planteaba una discusión entre los miembros de los dos equipos y la coordinación del instructor sobre las conclusiones

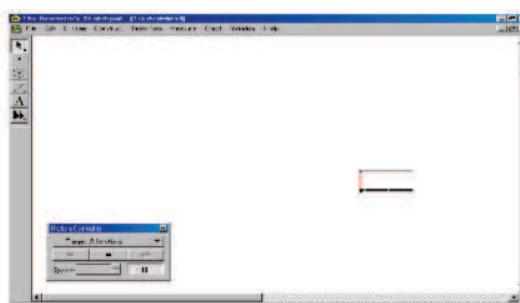
finales obtenidas. La secuencia didáctica estuvo formada por cuatro actividades en la pantalla de la computadora. Por razones de espacio, sólo mostraremos la actividad 1 y la actividad 3. Las actividades 2 y 4 pueden considerarse como similares. Para más detalle consúltese (Aparicio, 2003).



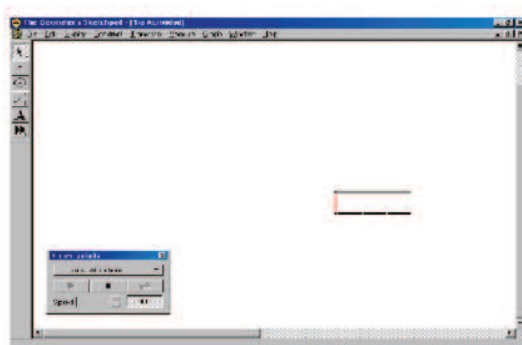
Actividad 1. ¿Existe alguna función real de variable real asociada a lo que observas en la pantalla de la computadora? Recordemos que los alumnos veían en la pantalla una animación, movimiento de puntos y líneas sobre el monitor.



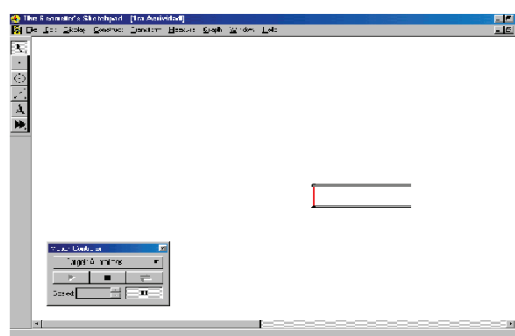
1er. instante



2º. Instante



3er. instante



4º. instante

Qué dicen y cómo gesticulan

A_R: El punto x es igual al punto y , entonces $f(x) = x$

Señala el movimiento de los puntos (verde y amarillo) repasando la línea roja que los une, indicando la relación entre x & y .

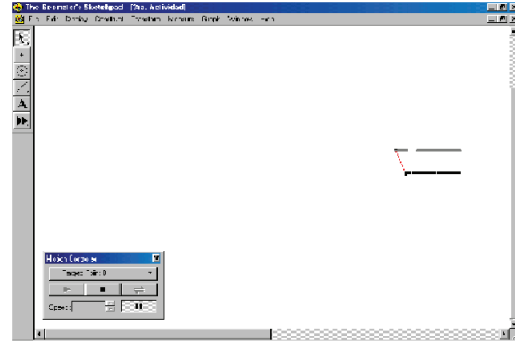
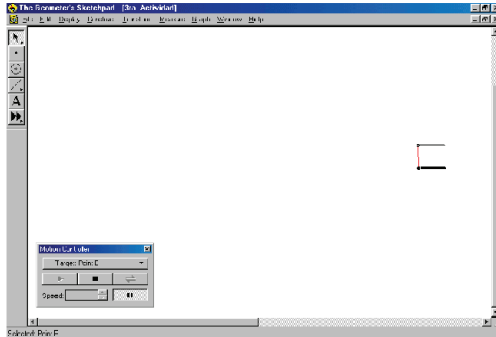
A_S: $f(x) = f(y)$ o el punto x es igual punto y entonces la gráfica será $y = x$,

Comentario del investigador: ¿En qué se basaron para decir o concluir eso?

A_R: Se mueven a la misma velocidad. El mismo punto verde se proyecta en el mismo punto amarillo. La función es $f(x) = x$

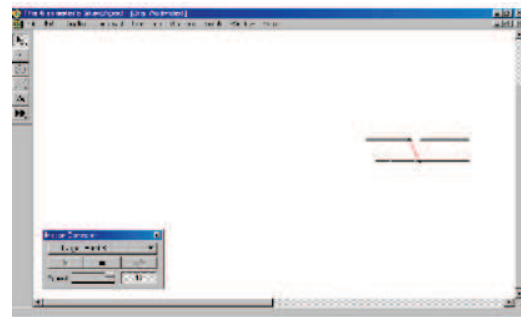
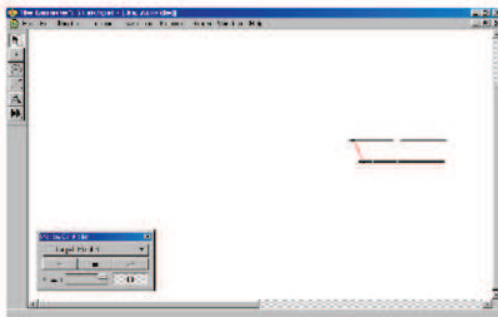
A_R ve detenidamente la representación en la pantalla y simula el movimiento con sus manos y los puños cerrados.

Actividad 3. ¿Existirá una función real de variable real que nos describa lo que se mira en la pantalla siguiente?



1er. instante

2º. Instante



A₀: Mira como aquí se va derecho y aquí se va..., (indica la inclinación de la línea roja que une los puntos de la línea verde con la línea amarilla) señala la primera parte de la línea amarilla de derecha a izquierda con el dedo índice e inmediatamente cuando pasa por el lugar donde deja de pintarse la línea amarilla, inclina la mano de manera suave y sigue el movimiento constante y suave del recorrido.

A_L: Tendría que ser una función definida en dos partes.

Este alumno observa el comportamiento de la línea amarilla e induce su conjetura, su rostro por su parte muestra gran seguridad de lo que dice.

A₀: si ¿no?, no puede ser una sola, yo digo!!!

A manera de conclusión

Apuntaremos que los resultados obtenidos, proporcionan información significativa sobre el aporte del aspecto gesticulativo en el proceso de estabilización del concepto de función continua en un punto. Identificamos algunos elementos esenciales en las formulaciones de las repuestas de los estudiantes tanto a un nivel individual como grupal. Por ejemplo, identificamos que la posibilidad de visualizar y el acto de visualización no se ven reducidos al uso de una herramienta tecnológica, en nuestra opinión diremos que la incidencia de la dimensión gestual es un medio que permite articular las acciones de visualización de conceptos matemáticos, de manera que una representación en la pantalla de la computadora sólo permite fincar un escenario donde el estudiante habrá de ampliar y generar nuevas significaciones, más aun, si

dichas representaciones son articuladas con lo gestual. En nuestro diseño, la noción de continuidad puntual en ningún sentido se refería de manera explícita -esta aparece como el resultado de la interacción entre el alumno, su entorno y el concepto-. El enfrentamiento de los estudiantes con la noción de continuidad global y continuidad puntual les permitió generar argumentos de corte discursivo matemáticos y estabilizar la noción de continuidad puntual. Entre los primeros se encuentra el uso de la analogía, el recurso de la metáfora y lo gestual como antecedentes a los recursos matemáticos. Citemos como casos, aquellos donde los estudiantes utilizan expresiones lingüísticas como “salta”, “brinca”, “se corta” “no se borra” y las hacen acompañar de la dimensión gestual para finalmente ligarlas a un conocimiento escolar. Así, experimentamos la idea de que el ubicar a un estudiante en un escenario donde pueda utilizar expresiones discursivas y gestuales, de suerte que no se vea restringido a su dominio de saber escolar “condicionado” va a permitir que este estudiante resignifique y construya nociones matemáticas. Esto permitirá entender algunas formas en cómo se produce aprendizaje.

Bibliografía

- Aparicio, E. y Cantoral, R. (2002). Visualización y tecnología: un enfoque a las aproximaciones sucesivas. En *Actas de la 16a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica*. Tesis de maestría, Cinvestav, México.
- Cantoral, R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En *el futuro del Cálculo Infinitesimal*. Grupo editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R (2001). La Socioepistemología: Una mirada contemporánea del quehacer en Matemática Educativa. *Antologías*, Núm. 1. Publicaciones de la red de Cimates – Clame.
- Cantoral, R & Montiel, G. (2001). *Funciones : Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice-Hall. México.
- Dolores, C. (2001). Los significados del lenguaje variacional en el aprendizaje de la matemática. *Antologías*, Núm. 1
- Hitt, F. (1994). Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16 (4): 10-20.
- Sierra, M., et al. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(1): 71-85.