

REPRESENTACIONES ESTUDIANTILES DE VARIACIÓN. UN ESTUDIO DESDE MEDIACIONES PEDAGÓGICAS

Jorge Iván Ávila Contreras
 Universidad Católica Cardenal Raúl Silva Henríquez. Chile.
jorgedechile@hotmail.com

Resumen

El propósito de esta investigación en curso¹⁸ es indagar sobre las representaciones que tienen estudiantes del nivel medio superior (secundaria y primer nivel universitario) acerca de nociones matemáticas variacionales, prestando especial atención a su forma de aprenderlas y buscando propiciar espacios de reflexión respecto de ellas, con el objeto de aportar información que sirva de base para la elaboración de diseños didácticos tendientes a mediar -en procesos de profundidad creciente- aprendizajes de nociones matemáticas variacionales, por ejemplo, la razón de cambio de una magnitud. Como técnica exploratoria consideramos el uso de bitácoras personales de reflexión de los estudiantes, para luego, en una segunda etapa, derivar en la construcción y aplicación de un cuestionario y la realización de entrevistas para triangular fuentes de información. En este artículo se reportan evidencias de la primera etapa, provenientes de las bitácoras personales, en el contexto de un curso de cálculo inicial.

Introducción

Sobre la base de investigaciones en didáctica de las matemáticas que se han realizado en las últimas décadas podemos señalar -respecto de las prácticas pedagógicas y escolares- que lo supuesto tradicionalmente acerca de que el profesor enseña y el estudiante aprende, con una lectura causa-efecto de la díada enseñanza y aprendizaje, se ha ido develando magro e insuficiente. No obstante, cabe destacar que tanto profesores como estudiantes continúan viviendo prácticas pedagógicas y escolares bajo esa racionalidad. Su arraigo en nuestra sociedad es fuerte. Así, la resistencia al cambio de estilos educativos, se torna predecible. Por otro lado, en lo que respecta a la evaluación de aprendizajes, en las prácticas escolares y pedagógicas se constata el hecho de que las tareas que plantea el profesor al momento de evaluar generalmente deben apuntar al hecho de que *lo que se evalúa es si un estudiante ha logrado o no el aprendizaje de un determinado conocimiento matemático*. Seguir esta dinámica ciertamente priva al profesor de las representaciones estudiantiles que subyacen en la actividad humana cuando los estudiantes se aprestan a abordar y también cuando están abordando el aprendizaje de nociones matemáticas, en el tiempo que cursan la asignatura.

En esta investigación, en su primera etapa, se pretende -desde la práctica pedagógica- obtener información conducente al estudio de representaciones estudiantiles de nociones matemáticas variacionales. Bajo este prisma se aplicó a estudiantes de pedagogía en matemática de primer año, durante un curso de cálculo inicial, una actividad periódica cuyo foco estuvo en promover la reflexión de sus entendimientos respecto a lo que estaban aprendiendo. Dicha actividad consistió en la elaboración de una *bitácora personal de reflexión*. Entendida esta como una entrega periódica -de

¹⁸ Parte de mi proyecto de Tesis de Maestría en Ciencias con mención en Matemática Educativa, CICATA-IPN, México.-

los estudiantes- de un escrito en el que vertían sus entendimientos de las temáticas tratadas en el curso, que ellos escogían libremente, así como sus impresiones de las actividades realizadas, emociones u otras variantes relativas a aspectos temáticos o didácticos (metodológicos) del curso. Se considera a la bitácora personal de reflexión como un instrumento de acercamiento entre el maestro y el estudiante, en una experiencia progresiva que sitúa a ambos actores en un escenario escrito y abierto que busca propiciar el desarrollo de la reflexión del estudiantado respecto de qué es lo que están entendiendo. Su aplicación no estuvo ajena a resistencias estudiantiles en los términos ya mencionados de los estilos educativos. Al respecto escribe por ejemplo un estudiante:

“es eso lo que yo no entiendo, el para qué indagar tanto en la materia, sobre nuestro modo de pensar (...) en mi caso no soy muy bueno para expresar mis ideas por medio de una hoja y un lápiz”

Se optó por esta técnica pensando en obtener evidencia desde la práctica, desde quienes motivan nuestra pregunta de estudio *¿cómo se representan los estudiantes nociones matemáticas variacionales?* y más particularmente *¿cómo conciben, entienden o se vinculan con nociones matemáticas relativas a la variación?* Interesa, a futuro, *develar presencia de epistemes estudiantiles* (Díaz, 2003) respecto de nociones variacionales.

Antecedentes Teóricos

Esta investigación se inscribe, por una parte, en el Programa de Pensamiento y Lenguaje Variacional, entendido como “una línea de investigación que, ubicada al seno del acercamiento socioepistemológico, permita tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos” (Cantoral y Farfán 1998). Y por otra parte considera el Programa de las Ideas Previas en donde “se concibe al aprendiz como “actor”, constructor -en el curso de su historia social, en el contacto de la enseñanza, pero, mucho más aún, a través de todas las informaciones mediatizadas y las experiencias de la vida cotidiana- de una estructura conceptual en la que se insertan y organizan los conocimientos apropiados y las operaciones mentales matrices. Ese ensamblaje es, por un lado, una estructura que permite o no asimilar las nuevas informaciones y, por otro lado, un medio a partir del cual va a determinar sus conductas y negociar sus acciones” (Díaz, 2003).

Entenderemos que el aprendizaje, como cambio de representación, puede estar condicionado por la transformación o no transformación de otros tipos de representación del aprendiz. Por ejemplo, sus representaciones respecto de la educación y de sus propias capacidades. Así como también estarán presentes, interactuando con algún tipo de influencia, las representaciones sociales compartidas por su grupo de pertenencia y/o de referencia, el contexto más amplio de su cultura, las representaciones del formador y aquellas comprometidas en el tipo de saber que considera la situación de formación, tales como sus ideas previas (Díaz, 2003). Por su parte, las representaciones sociales se forman a partir de la lengua, las modas dominantes de la época y los modos de comunicación social, incluyendo las conversaciones cotidianas o "hechos anónimos". Y son sociales tanto por la naturaleza de sus condiciones de producción, como por los efectos que engendran y

por la dinámica de sus funcionamientos. Las representaciones individuales se elaboran parcialmente sobre la base de representaciones sociales, vehiculadas por el grupo de pertenencia y/o referencia de cada sujeto (Burgeois, citado por Díaz, 2003). Otro campo que aporta a nuestra problemática son los estudios del lenguaje que se han abordado desde diferentes aproximaciones. Por ejemplo señala Candela (2001): *“para las nuevas perspectivas socioculturales (apoyadas en Vygotsky y Bakhtin) el concepto del contexto adquiere una gran importancia y la cultura se hace relevante para los estudios de la cognición [...] desde esta perspectiva el lenguaje no es un instrumento para la transmisión de información sino un medio dinámico para la acción social”*. También menciona que *“dentro del campo de la semiótica y con fuerte influencia lingüística, aparecen los trabajos de Krees y Osborn (1998) en donde se estudia el lenguaje como uno de los modos que, en interacción con otras formas modales, permiten conocer la representación de conocimientos y estados mentales y la comunicación en contextos educativos”*.

Adicionalmente, estudios recientes (Lakoff y Núñez, 2000) relevan que toda la actividad mental es de naturaleza corporizada, es decir, que productos de la cognición de alto nivel como son las ideas, los conceptos, la moralidad, los valores, y las teorías (incluyendo las científicas), son corporizadas. En particular, que los sistemas conceptuales humanos, incluso los más abstractos, se organizan en vastos sistemas de metáforas conceptuales cuyas verdades e inferencias no son literales, sino metafóricas. Es decir, verdades e inferencias que heredan su estructura de un dominio para aplicarse a otro totalmente diferente (Johnson, 1993). En suma, con esta sensibilidad teórica, abordaremos la determinación de las representaciones estudiantiles.

El instrumento exploratorio

Durante un curso de cálculo inicial se aplicó el instrumento de la bitácora personal de reflexión a estudiantes de pedagogía en matemática, de primer año¹⁹. Interesaba que profundizaran en sus entendimientos y que desarrollaran una sensibilidad didáctica respecto a lo que sucedía en el aula, en su calidad de estudiantes en formación inicial de pedagogía. Se adoptó una devolución escrita de cada bitácora por parte del profesor. Las retroalimentaciones procuraron poner el énfasis en el diálogo escrito con sus estudiantes, a partir de las características que arrojaba cada bitácora, con el fin de intencionar la apertura para el planteamiento de cuestionamientos que los llevaran a profundizar más sus ideas. Que desde los ires y venires del diálogo interpersonal *docente-bitácora-estudiante*, se fuese estableciendo un diálogo intrapersonal *estudiante-propios entendimientos*.

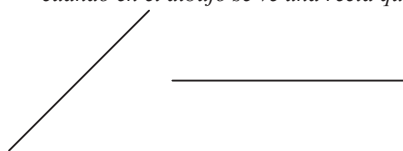
Evidencias recogidas de la aplicación

Presentamos pasajes de bitácoras que brindan información en tres niveles: *¿cómo los(as) estudiantes conciben, entienden o se vinculan con nociones matemáticas relativas a la variación?; relación interactiva durante el proceso; y visualización de estudiantes al final del proceso*.

¹⁹ La experiencia se aplicó a dos cursos distintos en un semestre de 16 semanas. A un grupo se pidió un total de 12 entregas de bitácora y, a otro grupo, 5 entregas. Se cuenta con producciones de una parcialidad de ambos grupos. Quién impartió la asignatura y aplicó el instrumento, en ambos casos, fue el investigador.-

a) *¿Cómo los(as) estudiantes conciben, entienden o se vinculan con nociones matemáticas relativas a la variación?*

“Cuando el dibujo que se muestra en la gráfica es una recta su razón de cambio es constante, cuando en el dibujo se ve una recta que no tiene movimiento, osea no varía. Su razón de cambio es cero.”
 [Extracto bitácora 3]



Aquí una estudiante explicita lo que ella entiende, y con ello devela una representación de la variación por medio de su dipolo (“...no tiene movimiento, osea no varía.”). A la vez, presenta una cadena asociativa del tipo

no tiene movimiento → no varía → su razón de cambio es cero

para evidenciar su entendimiento. Una interpretación tentadora es que la estudiante hizo asociaciones no con un sentido propio sino por repetición de “equivalencias” apreñadas de clases. Se observa que dicha cadena asociativa no la refiere para la variación de una posible magnitud de interés (representada con la gráfica) sino para la gráfica en sí misma. La corporización es fuerte. Da atributos de corporalidad a la recta. Para ella lo que se mueve o no se mueve es la recta, podríamos decir que lo que varía o no varía debe ser algo que ella tiene que “mirar” o “ver”. Por otra parte, analizando este pasaje surgió una reflexión alternativa *¿cómo influye la representación cotidiana en el aprendizaje de los conceptos?* arguyendo que “aquí no hay nada matemático” e infiriendo que “cuando hace la línea recta, esta no tiene razón para cambiar entonces sale recta” podría estar la posibilidad que refiera a “razón como motivo” lo que la hace recurrir a argumentos cotidianos en un esfuerzo por acercarse a conocimientos matemáticos. No se desprende claro, pero es una posibilidad de acción ya que la estudiante podría estar indicando que la primera recta se mueve (*¿sube?*) y que su razón de cambio (*¿motivo de cambio?*) es constante porque “va subiendo siempre igual” (se mueve, varía siempre igual). Siguiendo con la misma idea, la segunda recta no cambia porque “está acostada” “no va subiendo” “no tiene movimiento” y si no tiene movimiento no tiene razón (*¿motivo?*) para cambiar. Al hacer la interpretación que “sube” siempre igual, puede también abrirse la posibilidad de que la estudiante dialogue con una variación de la altura, sin embargo, aunque así fuese pareciera que persiste de todos modos la atribución del cambio a la recta, es decir, lo que está viendo explícitamente: su razón de cambio es constante (en el caso de la primera) y su razón de cambio es cero (en el caso de la segunda).

La presencia de lo cotidiano en el abordaje de la comprensión de lo matemático se manifiesta de modo más directo en la textualidad de otra estudiante cuando expresa en una de sus bitácoras:

“¿Por qué la derivada es una razón de cambio instantánea? He pensado mucho en la respuesta, al principio creí que se refería a instantánea, pues no había que hacer todo el proceso de aproximación a un valor exacto, aminorando Δt sino que se calcula instantáneamente el valor exacto mediante la definición formal de derivada. Luego pensé que era una razón de cambio instantánea pues se deriva en un punto, es decir, en un instante. Finalmente he pensado que se le da esta característica por la última razón, es decir, por que se calcula la derivada de un instante para así poder llegar a un resultado exacto, no es como aproximarse, achicando el Δt , sino que se parte del Δt más pequeño llegando así más eficazmente a la exactitud.” [Extracto bitácora 3]

En este pasaje la estudiante intenta articular en torno al “calcular lo exacto” y “calcular en un instante”. Inicialmente recurre a un esquema cotidiano para su búsqueda de respuesta. Desde su representación de “lo instantáneo” (como algo que se realiza de forma inmediata) se localiza en el aspecto procedimental de evitar “*hacer todo el proceso de aproximación, aminorando Δt* ” y atribuye a la definición formal de derivada el rol de calcular “instantáneamente” lo que antes se hacía mediante un proceso más extenso, en lugar de una herramienta para calcular (cuantificar) el “cambio que se produce en un instante”. Luego reformula su entender corporizando el instante en un punto (“*se deriva en un punto, es decir, en un instante*”). Sin embargo, con su reflexión final, pareciera que de todas maneras sigue prevaleciendo su idea inicial del instante, entendido este como “un proceso más breve (menos cantidad de pasos) en el tiempo” cuando señala “*sino que se parte del Δt más pequeño*” pues ese partir denota el inicio de un proceso que debiera ser menor al inicial, sin lograr capturar la faceta numérica (física) de la derivada en un punto.

Por otro lado, al abordar el aprendizaje de nociones variacionales los estudiantes muestran ciertas valoraciones de facetas matemáticas por sobre otras. A veces, inclusive se ven obligados a usarlas como única vía de comprensión. Por ejemplo, una estudiante señala:

“Con respecto a mi problema con los gráficos es un poco complicado para mí explicarlo, ya que ni siquiera yo me comprendo[...]he llegado a la conclusión que mi problema es que no me logro ubicar en el plano, es decir tengo que recurrir a los números para poder creer que lo que pienso esta bien o no, por ejemplo sin los números no entiendo cuando una función desciende o aumenta y cuando es más lento o más rápido.” [Extracto bitácora 2]

Se aprecia su conflicto con la visualización gráfica y persistencia de la faceta numérica para comprender ideas variacionales. Nos está dando pistas de que distingue clases de variaciones: *rápida y lenta / aumento y disminución*. Pero ambas ligadas a un registro numérico lo que podría dificultar su manejo de nociones variacionales continuas.

b) Relación interactiva durante el proceso

Un mismo estudiante refiere durante sus bitácoras:

“ A mi modo de pensar siento que la bitácora no es de gran importancia, porque usted nos hace reflexionar y profundizar [...]es eso lo que yo no entiendo, el para qué indagar tanto en la materia, sobre nuestro modo de pensar, o el modo de realizar los ejercicios.”

“En mi caso no soy muy bueno para expresar mis ideas por medio de una hoja y un lápiz.” [Extracto bitácora 4]

“A lo mejor a usted, no le va a gustar mi método, ya que me va a decir que me lo aprendí de memoria, aunque no sea así, sino fue algo, que descifré solamente con la vista, al tratar de comprender, cuando se trataba de una pendiente creciente o decreciente.” [Extracto bitácora 7]

“Voy a contarle algo que en un momento no tenía claro, y también le contaré como pude aclarar mi duda que me llevó, a más de un día en el cual, tuve que aplicar no sólo el cálculo matemático, sino la parte de la visión, y esto me ayudó a darme cuenta de lo que era...” [Extracto bitácora 9]

Apreciamos una evolución respecto de la relación que tiene en el escrito con el profesor y de sus aprehensiones frente a la validación de sus ideas. Hay un tránsito por la relación triádica *profesor-estudiante-saber*. Podemos caracterizarlo de la siguiente manera: reclamo y luces de resistencia a reflexionar (es innecesario); alcance de una posible desaprobación del profesor pero de todos modos se anima; y apertura a dejar oír su voz.

c) Visualización de estudiantes al final del proceso.

Entre los estudiantes que completaron la bitácora, destacamos algunos pasajes relevantes:

“... cuando deseaba escribir sobre algo que no entendía, como para poder expresar que era lo que no entendía realmente, debía meterme más aún en el asunto, lo que provocaba que en vez de redactar lo que no entendía, terminaba explicando lo que había entendido y de que manera lo había logrado entender...”

“...me a llevado a preguntarme ¿que realmente es lo que estoy aprendiendo?, y ese es el gran punto a cubrir por este trabajo (bitácora)...”

“ Cuando comenzamos el trabajo debo admitir que me desconcertó (...) no lograba entender que era lo que el profesor quería de ellas. Con el tiempo fui comprendiendo (...) cuando comenzaba a explicar lo que había logrado entender, según yo bien, comenzaban a aparecer los primeros signos de inseguridad sobre lo que sabía y si realmente estaba correcto. Fue en ese momento cuando pensé que ese era el real sentido de realizar dichos trabajos, comprender cuales son mis fortalezas y debilidades en relación a los temas abordados, no solo en cada bitácora sino en conjunto, como un todo, es preciso que esta reflexión no afloro de una bitácora para otra sino mas bien fue un proceso gradual que aun no termina...”

En el primer caso una estudiante discierne que al explicar en su bitácora lo que no entiende se ve obligada a objetivar lo que está entendiendo. Usualmente cuando un estudiante no entiende “algo”, el docente no se involucra en demasía en lo que este está entendiendo sino que se aboca a brindarle distintas explicaciones desde sus hipótesis “en acto”. Por otra parte, la segunda textualidad sintetiza lo que produjo en este estudiante la experiencia y, en el caso de la tercera, tenemos un tránsito desde la incertidumbre a una comprensión de la actividad reconociéndola como un proceso gradual y duradero en el tiempo.

Consideraciones Finales

Con este estudio hasta el momento apreciamos que aspectos relativos a las representaciones que los estudiantes tienen de nociones variacionales distan de lo que suponemos se aprende en el aula. Lo cotidiano y una corporización de los objetos matemáticos pareciera persistir en las reflexiones estudiantiles. El instrumento de las bitácoras de reflexión personal nos situó en una mirada poco explorada: reflexiones de estudiantes al aprestarse a abordar y cuando están abordando el aprendizaje de nociones matemáticas, durante su experiencia de curso. Esperamos que las evidencias obtenidas aporten para la elaboración de diseños didácticos tendientes a mediar aprendizajes de nociones matemáticas variacionales.

Bibliografía

- Brousseau, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques 4(2), pp. 165 – 198.
- Candela, A. (2001). *Corrientes teóricas sobre discurso en el aula*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol.6, Número 12, pp. 317 – 333.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Revista Epsilon, Núm. 42.
- Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F. y otros (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Ed. Trillas, ITEMS. México.
- Cordero, F. (2001). *Las distinciones entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. En Relime, Vol. 4, Núm. 2. Ed. Thompson Learning. México.
- Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos*. Tesis doctoral. Facultad de Educación. PUCCH.
- Díaz, L. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*. Dirección de Investigación, UMCE 2002-2003 y Proyecto Fondecyt 2003-2005.
- Lakoff, G. Núñez, R. (2000) *Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books, EEUU.
- Johnson, M. (1993) Conceptual metaphor and embodied structures of meaning, *Philosophical Psychology*, 6 (4)
- Sierpinska, A. Y Lerman, S. (1996). *Epistemologies of mathematics and of mathematics education*. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. Traducción de Juan D. Godino.
- Vasco, C.E. (2001). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. Conferencia en el Congreso Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia.