VISUALIZANDO LO QUE VARÍA

Eduardo Carrasco Henríquez
Tesista Magíster en Matemática Educativa, Cicata IPM, México
ecarrascr17@yahoo.com

Resumen

Los obstáculos para operar con la visualización por parte de los estudiantes, a la hora de estudiar lo que varía, muestran la importancia de promover el desarrollo de una "inteligencia visual". En especial la construcción de gráficas, dado que es una importante herramienta que permite a los estudiantes realizar una actividad matemática escolar y por tanto desarrollar un pensamiento matemático. Herramienta didáctica que ha ido, desde el surgimiento de la tecnología digital, cobrando mayor importancia en la investigación tanto matemática como en didáctica de las matemáticas. A modo de ilustración en el comportamiento tendencial (Cordero, 2001) de las funciones, un estudiante aprende a "identificar" coeficientes en la función, a "reconocer" patrones de comportamientos gráficos, a "buscar" tendencias en los comportamientos y a "relacionar" funciones. En didáctica de las matemáticas, el uso y articulación del registro algebraico con los otros registros (fenómenos, algebraico, tabular, numérico, entre otros). Sobre la base de mis ideas previas, de las discusiones con colegas y de prácticas de aula, se visualiza como un importante obstáculo, la determinación por parte de los estudiantes de las magnitudes que varían en un fenómeno, principalmente aquellas variables que no son visibles de manera directa, como es el tiempo. Por ejemplo, confundir la variación de la altura con la velocidad del llenado de recipiente. Producciones de estudiantes señalan mayoritariamente que un recipiente más angosto se llena más rápido que uno más ancho, aún cuando la llave vierta la misma cantidad de líquido y ambos tengan igual capacidad. Ello sumado al discurso matemático escolar que aún muestra una matemática estática, dan cuenta de un currículo que no considera el pensamiento variacional (Díaz, 2003). Las producciones de los estudiantes exhiben importantes obstáculos a la hora de trabajar y utilizar la herramienta gráfica en la resolución de problemas matemáticos y de otras ciencias. Este trabajo, que se enmarca en la fase de "análisis preliminar" de una ingeniería didáctica, busca profundizar en la construcción de gráficas de fenómenos de variación en el tiempo. Indaga en relación a los obstáculos para construir, interpretar y trabajar con gráficas y esquemas que requieren al tiempo como variable explicita, con el propósito ulterior de aportar a la construcción de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes construir las herramientas de visualización gráfica de fenómenos de variación, y, reversiblemente, hipotetizar fenómenos desde gráficas, así como articular estos modos de representación con otros registros de representación semiótica matemática.

Antecedentes

Cuantificar lo que varía, dibujando lo que varía

Abordamos el estudio de la visualización desde la socioepistemología, que sustenta que el sistema escolar se constituye por estudiantes, docente y saber, integrados en dimensiones que se interrelacionan y conforman un todo contextual. Estudia el saber al que concibe de naturaleza social y se configura en su formación histórica y cultural y en su producción y reproducción social. Integra en sus análisis las variables epistemológica; cognitiva; la naturaleza de las interacciones a que da lugar el proceso de aprendizaje, interacciones entre los actores estudiantado y docentes, y, las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, rediseños curriculares y didácticos. Dimensiones que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos (Cantoral, 2000; Cordero, 2001, 2002; Díaz, 2001; Cantoral y Farfán, 2002, Arrieta, 2003). En términos de Candela (1999) el conocimiento científico es una construcción social que está sujeta a ciertos procesos discursivos específicos, que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las manera de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras el resultado de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad. Así, las propias investigaciones son consideradas piezas del discurso textual y argumentativo.

Este trabajo se focaliza en la visualización de saberes matemáticos. Herramienta principal para el aprendizaje cuya noción abarca más que la simple imagen de un objeto; se refiere a la construcción mental que hace un individuo sobre una teoría, situación o problema que se desee enfrentar. Hitt (1998) señala *que "La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro"* y que *"investigaciones recientes sobre los sistemas semióticos de representación han puesto de manifiesto la importancia de la articulación entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos para el aprendizaje de la matemática"*. Evidentemente las gráficas son un elemento privilegiado al interior de la visualización matemática. Gráfica que puede ser realizada con lápiz y papel, computador, vídeo, entre otros. Con mayor rigor podemos decir que la visualización considera las relaciones y los cambios que la persona puede realizar en su mente para la búsqueda de los modelos e invarianzas presentes en una determinada situación. Por su parte "*Visualización Matemática trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver un problema, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diferentes presentaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y sobre todo, de la participación de una cultura particular al compartir símbolos y gráficas*" (Cantoral y Montiel 2001).

La psicóloga de Berkeley, Eleonor Rosch, señala que "*el universo no está pre-categorizado: las categorías son humanas. Esto, que superficialmente puede parecer de perogrullo, tiene profundas implicancias que afectan la visión tradicional de la ontología de las cosas. Las categorías, piedra angular de la actividad mental, son creadas por seres con cuerpos en interacción con el medio*" (Núñez, 2003) Más adelante Lakoff y Jonhson demostraron que los sistemas conceptuales humanos, incluso los más abstractos, se organizan en metáforas conceptuales cuyas verdades e inferencias no son sino metafóricas. Adicionalmente asumimos con Lakoff y Núñez, que lo esencial en la construcción de estas metáforas y que está a la base de las ideas y de la construcción conceptual, son las experiencias corporales, tales como experiencias térmicas (ella es un persona fría) o kinestésicas (el dólar subió varios puntos) entre otras. Así una imagen mental o metáfora corporal se integra a un esquema propio del estudiante, el cual será enactado (puesto en acción) en una situación específica que lo requiera. Sostenemos entonces que la determinación de metáforas conceptuales que están presentes tanto a nivel intuitivo y previo en nuestros estudiantes y aquellas que son usadas por la matemática escolar, y su uso en diseños didácticos facilitarán al estudiantado el manejo significativo de las gráficas para su apropiación de nociones variacionales.

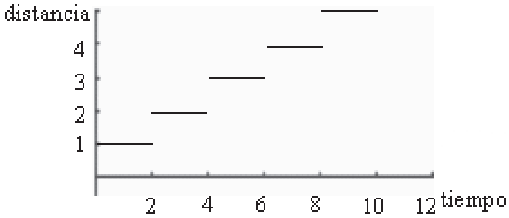
Por otra parte consideramos que la apropiación de nociones científicas se constituye como un proceso de largo aliento que puede significar hasta diez años para la adquisición de un pensamiento matemático (Cantoral, 1999) mientras que el aprendizaje de un concepto puede durar tres años (Artigue, 1989), supuesto en ambos casos una intervención didáctica intencionada (Díaz, op. cit.). El trabajo con la construcción e interpretación de gráficas de fenómenos da la posibilidad de estructurar en torno a una situación problema eje, secuencias didácticas en diversos niveles de la enseñanza básica, media y universitaria que favorezcan a los estudiantes la construcción de aprendizajes necesarios para la predicción y control de situaciones de variación. Tales aprendizajes que están a la base de los requerimientos de la modernidad, son vitales a la hora de enfrentar los desafíos de un mundo globalizado y en cambio autoacelerado. Análisis preliminares de la investigación en marcha *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*, muestran competencias de predicción y control presentes en las representaciones cotidianas de los estudiantes. Análisis de textualidades de estudiantes de octavo año básico y segundo año medio, realizados en el marco del citado proyecto (Diumce 10102 y Fondecyt 1030413) muestran la presencia de facetas estáticas y dinámicas, ilustrando modos de pensar tanto dinámicos como estáticos, siendo los primeros coadyuvantes a la visualización de covariaciones como a manejar cognitivamente la ucronización y la simultaneidad, en tanto los segundos o modos de pensar estáticos favorecen el establecimientos de clasificaciones y determinación de estructuras por parte de sus portadores. Sobre esa base conjeturamos que es posible estructurar secuencias didácticas que varíen en el grado de complejidad de la gráfica a construir, desde un simple esbozo en estudiantes de enseñanza básica que les permita dar cuenta de las magnitudes que varían y aquellas que no, y, conjeturar comportamientos futuros. Lo anterior mediante la construcción de gráficas o más bien figuras iconográficas, como una aproximación al pensamiento variacional. En nivel universitario el análisis de gráficas de movimiento de objetos o gráficas de diversos fenómenos variacionales favorecerán la significatividad de aprendizajes de conceptos del cálculo diferencial, respondiendo más satisfactoriamente a los desafíos de las ideas previas del estudiantado, dado que las personas se enfrentan a situaciones desde sus ideas previas, incluyendo intuiciones, imaginarios colectivos, conformando un complejo de antecedentes que permiten u obstaculizan el reconocimiento, construcción y manejo de situaciones, en especial situaciones de variación (Díaz, 2003). Se sigue la metodología de trabajo dada por la ingeniería didáctica que contempla tres grandes fases (Farfán, 1997): un análisis preliminar, en cuyo inicio se enmarca esta comunicación, la segunda fase que constituye el diseño y elección de las variables macro y micro didácticas y finalmente la puesta en escena y análisis de resultados.

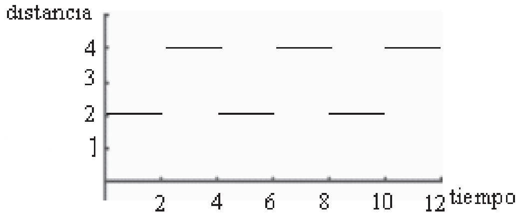
Resultados preliminares

Un estudio exploratorio realizado con estudiantes de primer año de pedagogía en matemática en el que se preguntó por las gráficas de la Fig. 1 - ya usadas por Buendía y Cordero (2003)- que ya habían cursado un primer curso de cálculo, mostró importantes dificultades en la construcción de gráficas altura/tiempo. Evidenció la persistencia de la imagen[21] de un fenómeno por sobre la comprensión de los elementos que variaban, en especial, las variables implícitas como lo es el transcurso del tiempo. Los estudiantes identificaron un gráfico distancia/distancia, pese a estar

[21] Imagen que podríamos llamar *fotográfica* del fenómeno.

escrito en el eje de las abscisas la dimensión de tiempo, como podemos apreciar en la Fig. 1.





Estudiante 1: *"Subir una escalera"* Estudiante 2: *"Marcas de un patinador al avanzar"*

Para estudiar esta dificultad se confeccionó un test (Ávila y Carrasco, 2002), sobre la base del movimiento de un péndulo, debido a que usualmente es tratado como ejemplo de un movimiento periódico y también por lo familiar que resulta al ámbito cotidiano (todos nos hemos balanceado en nuestra niñez). En el test se les solicito explicitar la imagen del fenómeno elegido, dibujando la situación desde tres puntos de vista distintos:

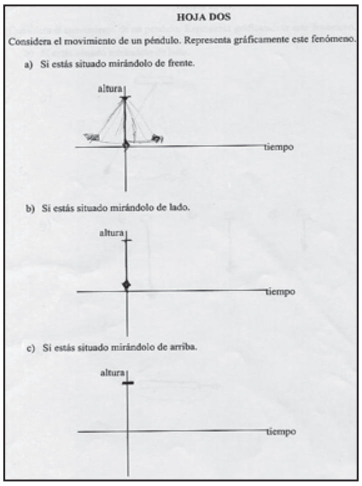


Fig. 2

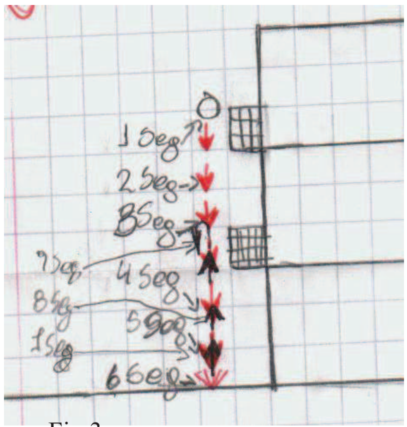


Fig.3

mirando de forma frontal, lateral y superior, con el fin de recabar evidencias del efecto que produce la persistencia de la imagen en la construcción de la gráfica. Posteriormente se les solicitó construir la gráfica altura/tiempo desde los mismos puntos de vista, para explorar si los estudiantes lograban representar el fenómeno cuya gráfica debería ser la misma, independiente del punto de vista desde el cuál se está situado para observar el fenómeno (como imagen mental). Los resultados no variaron del mostrado en la Fig. 2, mostrando que primó - a la hora de graficar - la imagen que se tenia del fenómeno, mostrando la dificultad asociar una gráfica pertinente a un fenómeno cuando se requiere trabajar con variables que no están explicitas a la vista como lo es el tiempo.

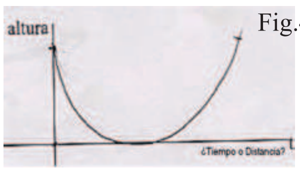
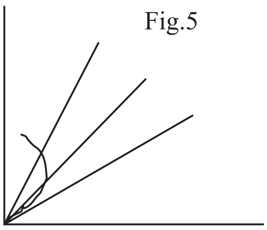


Fig.4

Desde las metáforas conceptuales reconocemos al tiempo asociando "adelante" al futuro y "atrás" al pasado. Metáfora que nos refiere a un eje de longitud unidimensional (una recta) y como señala Núñez y Lakoff (pp 315, 2003): “El tiempo es metafóricamente conceptualizado (por los matemáticos) en términos de distancia”. Luego al dibujar el avance del tiempo en la construcción de un gráfico distancia/tiempo, de la trayectoria de un móvil por ejemplo, la representación del tiempo entra a competir en la representación mental, con la dimensión espacial propia del desplazamiento. Dos dimensiones que refieren a distancia, no pueden ocupar el mismo eje. Podemos reconocer esto en la Fig. 3 que muestra el dibujo de un estudiante de segundo año de enseñanza media, sin estudios formales de graficación, al pedirle que dibuje o grafique la trayectoria a través del tiempo de la caída de una pelota de un tercer piso.

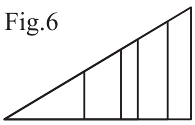
Por otra parte una primera revisión histórica en el manejo de gráficas por matemáticos muestra un salto con Oresme. A pesar de que la construcción de gráficas incorporaba situaciones dinámicas con el tiempo implícito, como lo muestra la construcción de parte de Arquímedes, en su espiral que construye como el lugar Geométrico de un punto en el plano, que partiendo del extremo de una semirrecta se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su extremo (Fig. 5). La construcción de la figura muestra la utilización de movimientos temporales implícitos (desplazamiento de la recta y el punto), pero la gráfica que se analiza es estática, pues es la traza de la trayectoria, sin explicitación del tiempo. Refleja la trayectoria ya completada, es decir posterior al movimiento de la recta y el punto.

Fig.5



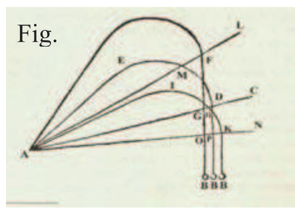
En la Europa medieval nos encontramos con una profunda discusión sobre la cuantificación de las formas variables, y en esta discusión probablemente antes del año 1361, Oresme (Fig. 6) plantea una pregunta brillante: “Por que no hacer un dibujo de la manera en que las cosas varían” (Boyer, 1969), logrando un adelanto sustancial en la construcción de gráficas.

Fig.6



> “Todo lo que varia, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo”

Aquí vemos desde luego una primera sugerencia de lo que hoy conocemos como la gráfica de funciones. Este avance tardó en imponerse. En el año 1537 publica la Nova Ciencia el matemático Nicolo Tartaglia, en la que introduce la balística y trata sobre el análisis de la trayectoria del cañón. Este texto solo presenta gráficas como las de la figura 7 que muestra la trayectoria de la bala de cañón en un gráfico distancia/distancia, mostrando las dificultades que hubo para comenzar a utilizar el tiempo como variable explicita. Las gráfica de la figura 7 hoy la vemos refrendada en los resultados de la exploración descrita anteriormente y que mostramos en la figura 8.



La gráfica de la figura 4 muestra la persistencia de la imagen visual a la hora de graficar el fenómeno del movimiento pendular, graficando el movimiento descrito por el péndulo en que - al igual que la bala de cañón de Tartaglia - se muestra su trayectoria dejando el tiempo implícito. Usando el eje x para representar el desplazamiento lateral del péndulo y no el desplazamiento del tiempo, como lo propone Oresme, más fuertemente como se maneja en un primer curso de cálculo, mostrando en definitiva más cercanía epistémica con Tartaglia que con la usada en el cálculo diferencial y que encuentra su origen en Oresme.

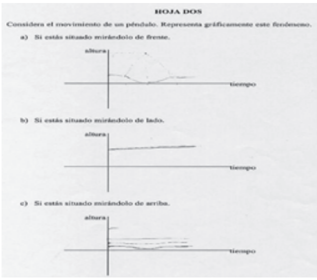


Fig. 8

Sumamos a lo anterior el hecho que nuestro estudio de funciones en la escuela se basó más en la definición de Bourbaky de una función como pares de puntos - programa de aritmetización iniciado por Dedekind y Weierstrass - escondiendo en el trabajo de pares ordenados y funciones que van de puntos a puntos, el movimiento y el espacio. Este reemplazó al paradigma geométrico y que posibilitó a Newton y Leibniz la construcción del cálculo de variaciones (Lakoff y Núñez 2002) permitiendo trabajar con la intuición geométrica. Este paradigma geométrico concibe a una curva con las siguientes propiedades (Pierpont, 1899, p.397). :

- Puede ser generada por el movimiento de un punto
- Es continua
- Tiene una tangente
- Tiene longitud
- Cuando es cerrada, forma una región completamente acotada
- Esta región tiene área
- La curva no es una superficie
- Está formada por la intersección de dos superficies

A modo de cierre

Esta investigación en curso busca profundizar en la construcción de gráficas de fenómenos de variación, más específicamente indagando en relación a los obstáculos para construir, interpretar y trabajar con gráficas y esquemas que requieren al tiempo como variable explicita. Con el propósito ulterior de aportar a la construcción de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes construir las herramientas de visualización gráfica de fenómenos de variación, y reversiblemente poder hipotetizar fenómenos desde gráficas, así como articular estos modos de representación con otros registros de representación semiótica matemática. Las evidencias recogidas en esta primera fase del estudio muestran obstáculos para elaborar gráficas de fenómenos tiempo/distancia por el estudiantado: epistemológicos (deriva de Oresme a Descartes, pasando por Tartaglia), cognitivo-culturales (el tiempo sustentado sobre una metáfora espacial compite con el desplazamiento a la hora de graficarlos juntos) y didácticos (opción curricular que reemplaza el paradigma geométrico de Newton y Liebnitz por el aritmético de Dedekind's y Weierstrass's).

Bibliografía

Avila J., Carrasco E. (2001): Dificultades en la interpretación de Graficas. Ponencia presentada a la XVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. La Habana, Cuba.

Boyer Carl B. (1999): *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid, España.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon, Núm. 42. España.*

Candela, A. (1999) *Ciencia en el aula*. México: Paidós Educador.

Cantoral, R. (1997). Matemática Educativa. Serie *Antologías, N° 1, Área de Educación* Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Relime Vol. 4. Num. 2, pp. 103-128.

Cordero, F. (2002*). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados*. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2001). La incidencia de la socioepistemología en la red de investigadores en matemática educativa. Una experiencia. *Serie Antologías, N° 1*, Clame, Red de Cimates, México.

Díaz, L. (2003).Impactos del cotidiano en los aprendizajes matemáticos: construyendo relaciones benéficas entre nociones culturales y pensamientos matemáticos”. *Actas XI CIAEM*, Blumenao, Brasil 2003.

Díaz, L. (2003). *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos Matemáticos*. Dirección de Investigación, UMCE 2002-2003 y Proyecto Fondecyt 2003-2005. Santiago de Chile.

Lakoff, G. Núñez, R. (2000) *Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Cooks, EEUU.

Núñez R. (2003): *¿Qué idea de mente y cuerpo para el nuevo milenio? Algunas reflexiones sobre el Homo Sapiens y una falacia en cuestionamient*”. http://www.iing.cl/iexplorer/index_activ.html

Tartaglia N.(1998): *La nueva Ciencia*. Colección MATHEMA, Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México.