ANÁLISIS DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO DEPENDENCIA/INDEPENDENCIA LINEAL EN R^2

Víctor Manuel Castilla Navarro
Universidad Autónoma de Yucatán. México.
vcastillan@hotmail.com

Resumen

En este trabajo de investigación se analizaron los diversos modos de pensamiento que un grupo de estudiantes de nivel superior utilizaron para resolver problemas que involucraron el concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal, y se trató de descubrir si lograron conectar los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético al resolver los problemas relacionados con dicho concepto. Para ello se aplicaron dos pruebas: la primera (fase exploratoria) consistió en 9 reactivos y tuvo como objetivo conocer los niveles de conocimiento que los estudiantes tenían sobre el concepto; con base en los resultados obtenidos, en la segunda prueba (fase final) se diseñó una situación de aprendizaje con 5 reactivos que indujeran el uso de distintas representaciones del concepto dependencia/independencia lineal provocando la conexión entre los modos de pensamiento analítico y sintético, provocando el uso de las gráficas (pensamiento sintético-geométrico) sobre los procedimientos algebraicos o aritméticos (pensamiento analítico-aritmético). Todo lo anterior con el fin de que el estudiante actúe, reflexione, evolucione su propio conocimiento y lo conduzca a construir dicho concepto. Finalmente se reportaron los resultados obtenidos del análisis detallado de los diferentes modos de pensamiento utilizados para la resolución de los problemas. Se identificaron las dificultades que los estudiantes presentaron para la comprensión del concepto dependencia/independencia. Se mostró que el valor del debate, el uso de distintos modos de pensamiento y la incorporación de gráficas como parte de una actividad matemática, favorecen notablemente el proceso de aprendizaje y comprensión del concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal.

Objetivos del trabajo

Diseñar una situación de aprendizaje que favorezca el uso de distintas representaciones del concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal, para que el estudiante actúe, reflexione, evolucione su propio conocimiento y que lo conduzcan a construir dicho concepto. Analizar la naturaleza de las dificultades que presentan estudiantes de nivel superior para entender el concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal, y estudiar los procesos cognitivos de aprendizaje y las estrategias que utilizan en la resolución de problemas matemáticos. Mostrar que el uso de distintos modos de pensamiento y la incorporación de gráficas como parte de una actividad matemática, favorecen la comprensión del concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal y ayudan a desarrollar la algoritmia, la intuición y la argumentación.

Justificación o marco teórico

En la actualidad, el Álgebra Lineal tiene un importante papel en el desarrollo científico y tecnológico, de igual manera resulta de suma importancia en las carreras de economía y áreas de las ciencias sociales. Esta influencia motiva a la investigación de sus conceptos básicos, al origen, desarrollo y evolución de los mismos, a analizar las dificultades que muestran los estudiantes para aprenderlos y a encontrar estrategias de enseñanza que superen tales dificultades. El aprendizaje memorístico es un recurso usado frecuentemente al buscar una significación de lo que se aprende. Sin embargo, para que la memoria opere de un modo eficiente son importantes la repetición y el repaso, pero se retiene mejor el conocimiento si se almacena como parte de una red de conocimientos. A pesar de que el maestro siempre trata de dar a los estudiantes algoritmos para resolver problemas matemáticos, los alumnos sólo retienen los conocimientos y no profundizan el significado. En un nuevo modelo de enseñanza, el apoyo de actividades prácticas, el uso de instrumentos y equipos, la importancia de integrar el conocimiento de un modo significativo, el valor del debate y la necesidad de atender a las diferencias individuales de los estudiantes, deberían ser considerados dentro del aula de clases para facilitar y fortalecer dicho aprendizaje.

Con este trabajo se pretende fomentar el uso de diversos modos de razonamiento (analítico-aritmético y sintético-geométrico) en los estudiantes a través de un conjunto de actividades llamadas "situaciones de aprendizaje", buscando robustecer el concepto matemático dependencia/independencia para vectores en R^2; es decir, se busca que los estudiantes hagan propio ese concepto al pensarlo en diferentes modos y así fortalecer el aprendizaje significativo.

En los últimos años Anna Sierpinska (investigadora en la Universidad de Concordia en Montreal, Canadá) ha desarrollado trabajos de investigación acerca de la evolución del pensamiento matemático en los estudiantes. Ella distingue tres modos de pensamiento en álgebra lineal: sintético-geométrico (se basa en el uso de figuras geométricas), analítico-aritmético (las figuras geométricas ahora pueden ser escritas como ecuaciones o desigualdades) y analítico-estructural.

En su tesis de maestría, Bonifacio Mora desarrolló una metodología que permite analizar las dificultades que los estudiantes experimentan con sistemas de ecuaciones lineales y con determinantes (íntimamente ligados al concepto dependencia/independencia lineal), analizando las ideas erróneas, los procesos mentales y las cogniciones intuitivas. El trabajo incluye también el diseño de actividades que favorecen en el alumno el uso de diversas representaciones del mismo concepto matemático, analizando su desempeño analítico y su interpretación geométrica.

Procedimientos: materiales y métodos

El trabajo se desarrolló básicamente en tres etapas.

PRIMERA ETAPA. Se hizo una revisión de bibliografía para analizar la evolución y desarrollo históricos que giran en torno al concepto dependencia/independencia en Álgebra Lineal. Al mismo tiempo se trabajó con un grupo de estudiantes de nivel superior que ya habían recibido un curso de Álgebra Lineal, a ellos se les aplicó una serie de problemas (FASE EXPLORATORIA) relacionados con el concepto dependencia/independencia lineal con el fin de conocer sus nociones acerca del mismo tema. Ellos trabajaron de manera individual y entregaron por escrito todas sus respuestas a las cuestiones matemáticas planteadas, permitiendo ésto un mejor y detallado análisis.

SEGUNDA ETAPA. Se hizo un análisis de la fase exploratoria: se realizó una confrontación entre lo esperado (análisis a priori) y lo sucedido (análisis a posteriori).

Con base en los resultados obtenidos en la fase exploratoria, se diseñó una situación de aprendizaje o situación-problema (FASE FINAL) para aplicarla al grupo de estudiantes de nivel superior. Ellos trabajaron, igual que en la fase exploratoria, de manera individual, luego compartieron sus opiniones en pequeños grupos para obtener una conclusión del problema; entregaron por escrito todas sus respuestas a las cuestiones matemáticas planteadas; además, se registró el desarrollo de la sesión de aplicación de la situación de aprendizaje usando una videocámara permitiendo apreciar el proceso de socialización que experimentaron los estudiantes, todo lo anterior para permitir un mejor y detallado análisis. Finalmente, se analizaron los modos de pensamiento manifestados por los alumnos para obtener así las conclusiones.

TERCERA ETAPA. Se escribió y revisó el documento que integra los resultados de la investigación.

Fase exploratoria.
Los ejercicios que se aplicaron en la fase exploratoria son:

1. Grafique los vectores (2, 1) y (4, 2).
2. Grafique los vectores (2, -1) y (4, 2).
3. Compare las gráficas de los problemas 1 y 2. Escriba sus conclusiones.
4. Exprese al vector (3, -1) como combinación lineal de los vectores (1, 1) y (1, -1).
5. Grafique los vectores (1, 1), (1, -1) y (3, -1). Interprete geométricamente el problema 4.
6. Determine si el conjunto {(1, 0), (0, 1), (1, 1)} es linealmente independiente o linealmente dependiente. Justifique su respuesta.
7. Grafique los vectores (1, 0), (0, 1), (1, 1). ¿Existe alguna relación gráfica entre estos vectores?
8. Usando los vectores (1, 2, -3) y (-1, -3, 2), exprese a (1, 1, - 4) como una combinación lineal de esos dos vectores.
9. Determine si el conjunto {(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)} es linealmente independiente o linealmente dependiente. Justifique su respuesta.

Los vectores del reactivo 1 son linealmente dependientes, pues uno de ellos se puede ver como múltiplo del otro; por lo tanto, al graficarlos sobre un plano, el vector (4, 2) será la prolongación del vector (2, 1); es decir, estarán sobre una misma línea recta. Con este reactivo se pretende que el alumno observe que dos vectores linealmente dependientes quedan sobre una misma línea recta, ya sea que queden con la misma dirección o no. Los vectores del reactivo 2 son linealmente independientes, ya que ninguno es múltiplo del otro; por lo tanto, al graficarlos sobre un plano no estarán sobre una misma línea recta. Con este reactivo se pretende que el alumno observe que dos vectores linealmente independientes no quedan sobre una misma línea recta. En el reactivo 3, el alumno se deberá dar cuenta que en el reactivo 1 los vectores quedan sobre una misma línea recta (son colineales), ya que un vector es múltiplo del otro (linealmente dependientes). En el reactivo 2 los vectores no son colineales.

En el reactivo 4 se pretende medir el concepto de combinación lineal y conocer las herramientas que tienen los estudiantes para obtener dicha combinación. Con el reactivo 5 se pretende que los estudiantes interpreten geométricamente una combinación lineal, al analizar la gráfica de tres vectores linealmente dependientes.

En el reactivo 6 se pretende medir el concepto de conjunto de vectores linealmente independiente o dependiente y conocer las herramientas que tienen los estudiantes para justificar su respuesta. Con el reactivo 7 se pretende que los estudiantes interpreten geométricamente un conjunto de vectores linealmente independientes o dependientes.

En el reactivo 8 se pretende medir el concepto de combinación lineal en R^3 y conocer las herramientas que tienen los estudiantes para obtener dicha combinación. Con el reactivo 9 se pretende medir el concepto de conjunto de vectores linealmente independiente o dependiente en R^3 y conocer las herramientas que tienen los estudiantes para justificar su respuesta.

En este reporte de la investigación no se presentan detalladamente los resultados obtenidos en la fase exploratoria, pues su único objetivo fue medir el nivel de conocimientos que los estudiantes tenían sobre el concepto dependencia/independencia lineal.

Diseño de problemas para la fase final

Con este trabajo de investigación se pretende diseñar una colección de problemas para la fase final que contenga una secuencia mejor estructurada de problemas que en la fase exploratoria, diseñada con base a los resultados obtenidos. En esta fase se pretende que los estudiantes a los que se les aplicó utilicen los modos de pensamiento analítico-aritmético y sintético-geométrico, y que sus respuestas provoquen una interacción entre estos modos.

Los problemas propuestos son los siguientes:

1. Traza los vectores $\vec{u}_1 = (2, 8)$, $\vec{u}_2 = (1, 4)$ en una sola gráfica.

   a) ¿Qué tipo de ángulo forman los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$?¿Un ángulo nulo, un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso, un ángulo llano?

   b) ¿Son colineales los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$?

   c) Obtén un número real k tal que $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$.

   d) Encuentra una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ igualada al vector nulo. Es decir, encuentra números reales α_1 y α_2 **diferentes de cero** tales que $\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$.

   e) ¿Es el conjunto $\{(2, 8), (1, 4)\}$ linealmente independiente?¿Por qué?

f) Obtén un vector $\vec{u}_3$ diferente de $\vec{u}_2$ tal que $\vec{u}_3$ sea un vector linealmente dependiente con el vector $\vec{u}_1$. Justifica tu procedimiento.

2. Traza los vectores $\vec{v}_1 = (2, 8)$, $\vec{v}_2 = (-1, 4)$ en una sola gráfica.

a) ¿Qué tipo de ángulo forman los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?¿Un ángulo nulo, un ángulo agudo, un ángulo recto, un ángulo obtuso, un ángulo llano?

b) ¿Son colineales los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$?

c) Obtén un número real n tal que $\vec{v}_1 = n\vec{v}_2$.

d) Encuentra una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ igualada al vector nulo. Es decir, encuentra números reales β_1 y β_2 **diferentes de cero** tales que $\beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$.

e) ¿Es el conjunto {(2, 8), (-1, 4)} linealmente independiente?¿Por qué?

f) Obtén un vector $\vec{v}_3$ diferente de $\vec{v}_2$ tal que $\vec{v}_3$ sea un vector linealmente independiente con el vector $\vec{v}_1$. Justifica tu procedimiento.

3. Con base en los resultados obtenidos en los ejercicios 1 y 2, completa la siguiente tabla:

	PROBLEMA UNO VECTORES $\vec{u}_1$ Y $\vec{u}_2$	PROBLEMA DOS VECTORES $\vec{v}_1$ Y $\vec{v}_2$
¿Qué tipo de ángulo forman los vectores?		
¿Son colineales los vectores?		
¿Uno de los vectores es múltiplo del otro?		
¿Son linealmente independientes?		

4. a) Describe algún procedimiento geométrico para encontrar vectores linealmente dependientes en R^2.
b) Describe algún procedimiento geométrico para encontrar vectores linealmente independientes en R^2.
c) Describe algún procedimiento algebraico para encontrar vectores linealmente dependientes en R^2.
d) Describe algún procedimiento algebraico para encontrar vectores linealmente independientes en R^2

5. Sean los vectores $\vec{w}_1 = (1,2)$ y $\vec{w}_2 = (-1,1)$.

a) Calcula los vectores $2\vec{w_1}$ y $3\vec{w_2}$.

b) Encuentra el vector $\vec{w_3}$ tal que $\vec{w_3} = 2\vec{w_1} + 3\vec{w_2}$.

c) En un mismo sistema de ejes, graficar los vectores $2\vec{w_1}$, $3\vec{w_2}$, $\vec{w_3}$.

d) Efectúa gráficamente la suma de vectores $2\vec{w_1}$ + $3\vec{w_2}$ utilizando el método del paralelogramo. ¿Cuál es el vector resultante?

e) Expresa el vector $\vec{w_3}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$.

f) Expresa el vector $\vec{w_4} = (0,6)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$. Es decir, encuentra números reales λ_1, λ_2 tales que $\vec{w_4} = \lambda_1 \vec{w_1} + \lambda_2 \vec{w_2}$.

g) ¿Qué relación geométrica tienen los vectores $\vec{w_4}, \lambda_1 \vec{w_1}, \lambda_2 \vec{w_2}$?

Resultados, discusión y conclusiones

Durante la aplicación de las dos pruebas se trató de descubrir si el grupo de estudiantes de Nivel Superior lograba conectar los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético al resolver problemas relacionados con los conceptos dependencia/ independencia lineal. Para esto se les aplicó dos pruebas, la FASE EXPLORATORIA y la FASE FINAL. Al diseñar la situación de aprendizaje (FASE FINAL) se trató de provocar la conexión entre los modos de pensamiento analítico y sintético, induciendo el uso del pensamiento sintético-geométrico sobre los procedimientos algebraicos o aritméticos. Las gráficas de los vectores en R^2 que se pidieron tenían la intención de mostrar con figuras los conceptos dependencia/independencia lineal, de manera que al observar las gráficas los estudiantes pudieran describir algunas características para dichos conceptos. Con los resultados obtenidos en las dos series de problemas que se aplicaron, es notable el uso constante de parte de los estudiantes del pensamiento analítico-aritmético al aplicar largos procedimientos algebraicos o algorítmicos, como si estuvieran siguiendo al pie de la letra una serie de instrucciones que finalmente resolverán el problema, todo lo anterior por el hecho de ser fomentado, este tipo de pensamiento, en el aula de clases como recurso privilegiado al momento de enfrentarse con algún problema; el resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, calcular el determinante de una matriz, transformar una matriz a la escalonada reducida, entre otros, fueron los recursos más utilizados por los estudiantes. Inclusive, algunos de ellos introdujeron en sus soluciones algunos conceptos de Cálculo Vectorial (funciones vectoriales, derivadas) y Geometría Analítica (pendiente de una recta, ecuación de una recta). El método de aplicación de la fase final favoreció notablemente la discusión, el debate y el intercambio de ideas entre los estudiantes participantes dentro del proyecto. Se obtuvo la conclusión de que los estudiantes no lograron una conexión clara entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y sintético-geométrico, por lo que se considera necesario el desarrollo de nuevos proyectos de investigación que promuevan la relación entre ambos modos de pensamiento con el propósito de beneficiar los procesos de aprendizaje de conceptos algebraicos en estudiantes de nivel superior, diseñando actividades mejor estructuradas que los conduzcan a completar dichas conexiones.

Bibliografía

Davidoff, L.L. (1990). *Introducción a la Psicología*. Tercera edición pp. 261-268.

Dorier, J.L. (1991). *Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algebre linéaire á l'université. Recherches en didactique des Mathématiques.* Vol. 11 (2/3) pp. 325-364.

Mora, B. (2001). *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales.* Tesis de maestría. DME. Cinvestav-IPN.

Saldanha, L.A. (1995). *The notions of linear independence/dependence: a conceptual analysis and students difficulties*. Tesis de maestría. Concordia University. Montreal, Québec, Canadá.

Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students'thinking in linear algebra*. Research on the teaching and learning of linear algebra conducted at the Concordia University by A. Sierpinska and J. Hillel. Montreal, Canadá.