

## ESTABILIDAD Y CAMBIO DE CONCEPCIONES ALTERNATIVAS ACERCA DEL ANÁLISIS DE FUNCIONES EN SITUACIÓN ESCOLAR

Crisólogo Dolores; María del Socorro Valero  
 CICATA – Instituto Politécnico Nacional – México  
[paraklet@prodigy.net.mx](mailto:paraklet@prodigy.net.mx)

### Resumen

El presente trabajo se inscribe dentro de la línea de investigación denominada *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, trazada por el Dr. Cantoral. Esta línea de investigación estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio. El contexto general en el que se ubica el presente trabajo es el programa de investigación desarrollado por el Dr. Crisólogo Dolores cuyo objetivo principal se centra en el estudio de los procesos de desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en condiciones escolares (Dolores, 1996). En particular nuestro interés se enfoca en el estudio de la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas relativas al análisis del comportamiento de funciones a través de sus gráficas, pues existen evidencias de que esas interpretaciones primarias se arraigan en la mente de los estudiantes e interfieren en el desarrollo del pensamiento variacional. De hecho, asumimos que parte importante del desarrollo de esta forma de pensamiento consiste en el dominio de los procesos de franqueo o superación de esas concepciones alternativas.

### Introducción

Dolores (2002) destaca la importancia del análisis de funciones dentro de la matemática de la escuela media y superior, estableciendo que es justamente en este análisis en donde se sintetiza el objetivo primordial de la matemática de las variables que se estudia en los niveles medio y superior. Los conceptos, relaciones y procedimientos relativos a las funciones, a sus límites, su continuidad y sus derivadas, fueron creados para poder analizar el comportamiento de las funciones. No tiene sentido poder sólo calcular límites de funciones, poder determinar su continuidad o poder calcular derivadas, si no se es capaz de integrar y utilizar (o aplicar, como lo dicen los programas) estas herramientas para analizar el comportamiento de las funciones que modelan situaciones de variación y cambio. Como las funciones modelan procesos de cambio, es necesario para el estudio de esos procesos, indagar si crecen o decrecen, cómo y cuánto crecen o decrecen, qué tan rápido lo hacen, cuáles son sus puntos máximos o mínimos, si es que los tienen, etc. Históricamente el problema de la determinación de los máximos y mínimos de las funciones fue el principal motivo que dio origen a la creación del *calculus*. Lo anterior permite evidenciar la necesidad de investigar la estabilidad o cambio de las concepciones alternativas acerca del análisis de funciones bajo condiciones determinadas de enseñanza.

### Problemática y objetivo de la investigación

Los programas de matemáticas de la educación media y superior, principalmente para quienes estudiarán ciencias, ingeniería o contabilidad, prevén el que los estudiantes puedan analizar funciones incluso usando los criterios asociados a la derivada. Una de las habilidades necesarias para tal fin es poder *leer* o *interpretar* el comportamiento de funciones a través de sus gráficas usando, además, el lenguaje analítico o verbal. Sin duda que la interpretación de las gráficas pasa necesariamente por su

visualización, aunque muchos estudiantes son renuentes a aceptarla (Einseberg & Dreyfus, 1991). En la práctica escolar los profesores de matemáticas utilizan gráficas cartesianas o las representaciones figurales para la enseñanza de las funciones y el análisis de su comportamiento. Pero hay evidencias de que existen muchas concepciones que se generan en la mente de los estudiantes que son inaceptables para la matemática. Varias investigaciones han reportado que los estudiantes no pueden usar las gráficas para comunicar o extraer información (Wainer, 1992), y que otros no pueden aplicar lo aprendido sobre gráficas en las clases de matemática a la física o a otras materias (Mc Dermot / Rosenquist / Van Zee 1987). Cantidades mayoritarias de estudiantes, aún después de haber cursado Cálculo Diferencial, no relaciona a la derivada con la velocidad en un  $t_0$  determinado, en cambio la asocian con la ordenada  $s(t_0)$  (Dolores, 1998). Esta concepción ha sido encontrada cuando los estudiantes relacionan (a partir de gráficas) la derivada de una función y la función primitiva (Dolores/ Guerrero / Medina, 2001).

En los profesores de cálculo del bachillerato también se encontró una gran variedad de concepciones alternativas, además de las concepciones aceptables, cuando hacen lecturas sobre el comportamiento de funciones a través de sus gráficas (Dolores / Guerrero, 2002). Una cantidad significativa asocia la condición:  $f(x+h)-f(x) = 0$ , con  $f$  continua y  $h > 0$  preferentemente *pequeño*, con los puntos de corte de la gráfica con el eje de las  $x$ , es decir con las  $x$  donde  $f(x) = 0$ ; análogamente existe tendencia a asociar la condición:  $f(x+h)-f(x) > 0$ , con la región donde la gráfica de la función está por arriba del eje de las  $x$ , región donde se cumple que  $f(x) > 0$ , y  $f(x+h)-f(x) < 0$  con la región donde la gráfica de la función está por debajo del eje de las  $x$ , región donde se cumple que:  $f(x) < 0$ . Los profesores parecen no diferenciar entre condiciones de comportamiento y condiciones de ubicación de la gráfica en el plano cartesiano. La mayoría asocia consistentemente las condiciones de crecimiento y función positiva, dadas simultáneamente y en forma verbal – escrita, con las regiones correspondientes de las gráficas, sin embargo, asocian las condiciones creciente y negativa (dadas en la misma forma) por un lado, y decreciente y negativa por otro, con aquellos sectores de la gráfica donde sólo es positiva y negativa respectivamente. Para ellos las condiciones de crecimiento y *positividad* o decrecimiento y *negatividad* de la función parecen ser condiciones concomitantes.

Ahora bien, la problemática antes expuesta tiene serias implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Por nuestra parte, suponemos que esas concepciones pueden ser removidas de la mente de los estudiantes para acercarlas a concepciones aceptables, mediante un proceso sistemático de enseñanza. De esto trata fundamentalmente este trabajo. Por todo lo anterior, el problema de la presente investigación se sintetiza en el siguiente cuestionamiento: ¿Son estables o cambiantes las concepciones alternativas acerca del análisis de funciones mediante un proceso sistemático de enseñanza?

Este trabajo de investigación tiene como objetivo fundamental analizar la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los estudiantes respecto al análisis de funciones bajo condiciones determinadas de enseñanza.

### Elementos teóricos básicos

Referente fundamental en nuestra investigación es el trabajo de Pozo (2000) relativo al origen de las concepciones alternativas respecto de los fenómenos científicos. Pozo afirma que, las concepciones espontáneas tienen su *origen* en la actividad cotidiana de las personas. Surgen en la interacción espontánea con el entorno cotidiano y sirven, ante todo, para predecir la *conducta* de ese entorno. Están además determinadas en cuanto a su contenido por las limitaciones en la capacidad de procesamiento en los humanos. Como consecuencia de su origen en la actividad espontánea y de su organización en teorías, estos conceptos resultan muy *resistentes al cambio*, ya que persisten incluso tras una larga instrucción científica. Se ha comprobado que no se abandonan por simple exposición a los conceptos científicos correctos. Ello ha obligado a desarrollar modelos de cambio conceptual en los que, mediante estrategias didácticas diseñadas con ese fin, se intentan trocar los conceptos espontáneos y erróneos (concepciones alternativas, de acuerdo a Confrey (1990), (Mevarech & Kramarsky, (1997)) en conceptos científicamente correctos.

De acuerdo a Pozo el cambio conceptual se produce en las condiciones siguientes:

- a) El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética entre la teoría espontánea del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir.
- b) Para que el alumno pueda comprender la superioridad de la nueva teoría, es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas. En otras palabras, el alumno ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, en las que conduce a predicciones que no se cumplen.
- c) A partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del alumno es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos espontáneos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

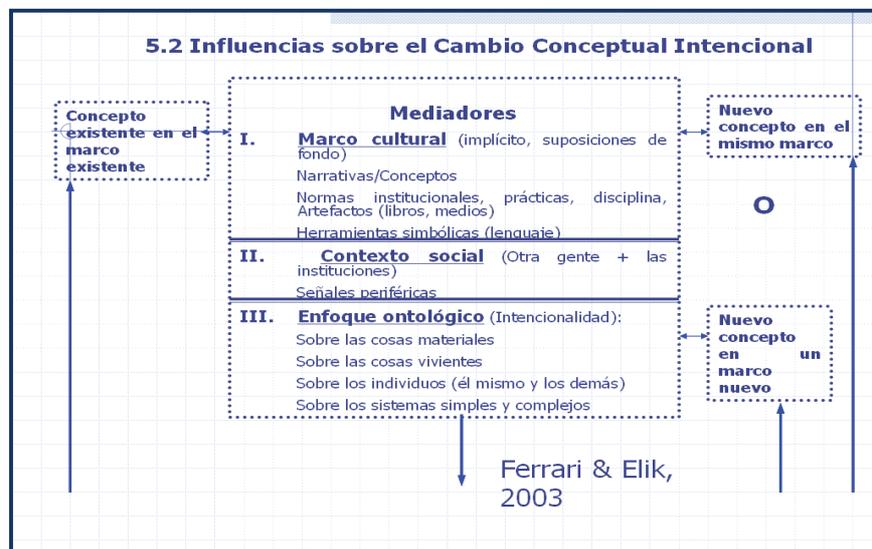
Por otra parte, nuestra postura respecto del planteamiento de las situaciones conflictivas que permitan explicitar las concepciones alternativas de naturaleza implícita la adoptamos de acuerdo al trabajo de Majmutov (1983) dentro de la *enseñanza problémica* para quien el desarrollo es lucha de contrarios. Esta ley de desarrollo mediante la superación de las contradicciones, se refleja en el conocimiento, que se caracteriza también por sus contradicciones específicas. En la enseñanza problémica se plantea que la contradicción entre las tareas señaladas por el curso de la enseñanza y las fuerzas cognitivas que tienen los alumnos, llega a convertirse en la fuerza motriz de su aprendizaje solo cuando se cumple:

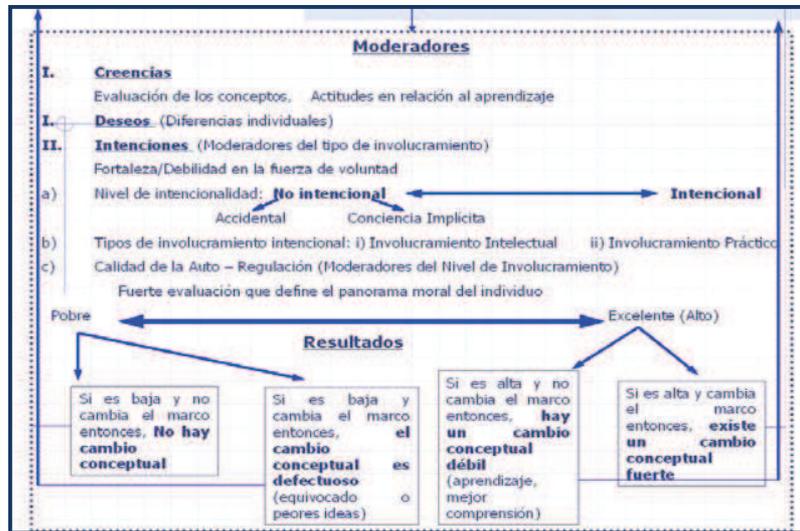
- a) Que los alumnos comprendan las dificultades y la necesidad de superarlas.
- b) Que las dificultades se correspondan con las posibilidades cognitivas de los alumnos
- c) Que las contradicciones estén condicionadas y preparadas por el curso del proceso docente y su lógica.

- d) Que se separe del campo visual del alumno en la primera etapa de estudio del material nuevo, todo lo que pueda distraer la búsqueda de la solución de la tarea cognitiva.
- e) Que una condición decisiva para la formación de la contradicción, es que adquiere un carácter interno y pasa a ser una contradicción en la conciencia del propio escolar, en su conciencia en general y se interpreta como una dificultad.

*El otro elemento teórico, fundamental en nuestro proyecto es el trabajo de Ferrari & Elik (2003) relacionado con el cambio conceptual intencional. De acuerdo a estos autores, una persona, no es solo parte de su cultura en el macro nivel sino que es también parte de la dinámica de las relaciones alrededor de ella en el micro nivel, en donde las emociones son significantes para el cambio conceptual intencional y éste puede ser logrado cuando los sentimientos son tan extremos que rompen los patrones o estructuras existentes.*

Ferrari & Elik sugieren que el cambio conceptual intencional involucra el intento deliberado de una persona por un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual. Desde su perspectiva, bajo condiciones del mundo real los nuevos y viejos conceptos son influenciados por los moderadores y mediadores del cambio conceptual. Los mediadores estructuran el enfoque completo que alguien posee de un concepto en particular; los moderadores determinan que tan fácil o difícil el individuo intentará cambiar los conceptos existentes.





### Metodología

La investigación se planificó para ser desarrollada siguiendo el esquema metodológico siguiente:

**Diagnóstico.** El diagnóstico consistió en el diseño de tres cuestionarios y su aplicación a los estudiantes que participaron en la experiencia con el fin de explorar sus concepciones alternativas. El diseño del cuestionario se hizo con la idea de explorar las concepciones que acerca del comportamiento variacional de funciones elementales tienen los estudiantes, mediante la conversión y tratamiento de diferentes sistemas semióticos de representación, a saber, gráfico, verbal y analítico. Estas exploraciones fueron realizadas justo antes de iniciar con la preparación de las condiciones de nivel de partida de los estudiantes; se trató de conocer sus concepciones previas libres de las posibles influencias que se pudieran ejercer con el curso que se trabajó en un plan experimental. Los cuestionamientos incluidos en este instrumento exploratorio consistieron en la determinación de las zonas o intervalos de crecimiento, decrecimiento, estabilización y la coordinación de propiedades simultáneas tanto de ubicación en el plano como de comportamiento.

**Formación de las condiciones de partida del curso.** En esta etapa el interés estuvo dirigido hacia el estudio del concepto de variable, dominio, rango, y graficación de puntos sobre el plano cartesiano.

**Diseño de situaciones didácticas.** Para el diseño de situaciones didácticas se buscó crear un ambiente gráfico de tal suerte que los estudiantes pudieran adquirir la habilidad de analizar gráficas de funciones. Para ello, el diseño de las situaciones didácticas se llevó a cabo bajo los siguientes criterios:

- Que los estudiantes utilizaran el registro gráfico y verbal
- Que posibilitaran la transición del ambiente gráfico al verbal y viceversa
- Que plantearan contradicciones entre sus concepciones previas y las concepciones aceptables
- Que generaran condiciones para poder trascender sus concepciones alternativas

Puesta en escena de las situaciones didácticas. La puesta en escena de las situaciones didácticas se llevó a cabo durante la impartición del curso de Matemáticas I, Cálculo Diferencial e Integral a estudiantes de primer semestre de la carrera de Licenciado en Matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. El curso fue estructurado siguiendo un enfoque variacional, considerando al estudio de la variación como una especie de *eje rector* del que se desprende el contenido matemático a tratar. No se trata de enseñar la derivada porque es un concepto matemático *interesante* sino porque resuelve muchos problemas de la variación (Dolores, 2000). Bajo estas consideraciones, el contenido matemático no se ciñe necesariamente a la estructura lógico-formal del Análisis Matemático, más bien se trata de una introducción intuitiva e informal que tiene como punto de partida las necesidades de la práctica. Siguiendo la línea indicada por Wenzelburger E. 1993, tres nociones físicas son las fundamentalmente tratadas: la *variación*, la *rapidez promedio* de la variación y la *rapidez instantánea* de la variación. De aquí que el curso se estructuró en tres fases: la *fase preparatoria*, la *fase de formación del concepto*, la *fase de ampliación* y la *fase de fijación*. En la *fase preparatoria* se pretendió crear las condiciones mínimas del nivel de partida para acceder al proceso de formación del concepto en cuestión. En esta fase se parte de la modelación de problemas sencillos de la física de donde se abstraen las nociones de *variable* y *función*, de éstas se estudian sus propiedades básicas y se resuelven problemas. En la segunda fase la formación del concepto se inició a través la *rapidez de la variación*, particularmente de la velocidad y aceleración promedio. Después se arribó a la rapidez instantánea mediante un acercamiento intuitivo al límite y mediante la utilización de los infinitesimales. En la tercera fase se amplió la extensión del concepto a funciones que no necesariamente dependen del tiempo introduciendo la definición de *derivada*, se introdujo la noción de función derivada, se dedujeron (por medio de los diferenciales) y utilizaron las fórmulas y reglas básicas de derivación, pero sobre todo en esta etapa se resolvieron problemas tendientes a la fijación del concepto. En la cuarta fase se incluyó una etapa de *formalización* en donde se abordó la demostración de algunos teoremas del cálculo.

Las formas metodológicas básicas de organización de la enseñanza mas utilizadas en el curso fueron los métodos de elaboración conjunta, los de dirección del trabajo independiente y algunos métodos expositivos. El trabajo docente se organizó en clases prácticas, clases de repaso y las clases de control o evaluación. Las clases prácticas fueron destinadas a la resolución conjunta de los ejercicios y problemas más representativos planteados en el cuaderno de trabajo *Una Introducción a la Derivada a Través de la Variación* y el esclarecimiento de dudas sobre las tareas asignadas para realizar en casa. Dado que se pretendía desarrollar habilidades en los estudiantes, el trabajo con la resolución de ejercicios y problemas ocupó alrededor de las tres cuartas partes del tiempo destinado al curso, inclusive las tareas extraclase fueron sistemáticamente revisadas y evaluadas con el objetivo de contribuir a la calificación de los estudiantes y así estimular su realización. En las clases de control o evaluación se aplicaron cuestionarios de control o de sistematización y los exámenes fueron elaborados con fines investigativos. Las actividades realizadas trataron acerca de:

- El signo de las funciones  $f(x)$
- El comportamiento de la función  $f(x)$ , su crecimiento, su decrecimiento y su estabilización
- Trabajo simultáneo sobre los dos puntos anteriores para intentar coordinar el trabajo sobre la ubicación y el comportamiento de una  $f(x)$  dada

Las actividades que comprendieron las situaciones didácticas consideraron que el trabajo de los estudiantes incluyera tres fases: observación de gráficas, elaboración de gráficas y ejercicios de generalización.

Análisis de los resultados y análisis comparativo pre – post. La población con la que se desarrolló el proyecto fueron inicialmente 30 estudiantes. A estos 30 estudiantes se les aplicó el Pre – Test el primer día de clases, 1º de Septiembre del 2002 de lo que fue su curso de Cálculo Diferencial e Integral. El Pre – Test estuvo constituido por 3 cuestionarios. Meses después, el 13 de Enero del 2003, aproximándose el cierre del curso, cuando ya solo quedaban 23 estudiantes de los 30 iniciales, se volvieron a aplicar los mismos instrumentos exploratorios en lo que constituiría el Post – Test. Las entrevistas se aplicaron los días 17, 18 y 19 del mismo mes. El día 17 se entrevistaron a los primeros 7 estudiantes, el día 18 a los siguientes 8 y el día 19 a los últimos 8. Como era de suponer, para cuando se entrevistaron a los estudiantes los días 18 y 19, toda la información de las entrevistas ya había sido comentada por los estudiantes entrevistados el primer día, de manera que estas 16 entrevistas no fueron de utilidad para nuestra investigación pues estos quince estudiantes manifestaron una fuerte contaminación de las ideas de los primeramente entrevistados. Por lo anterior, solo desarrollamos 7 análisis longitudinales, mismos que incluyen los resultados del Pre – Test, la entrevista y el Post – Test de 7 estudiantes. En cada uno de estos 7 análisis, se hace un minucioso seguimiento de la evolución de las ideas de los estudiantes intentando identificar la permanencia o cambios de las concepciones que inicialmente manifestaron estos estudiantes respecto del análisis de funciones. Posterior a los análisis longitudinales, se desarrollará un análisis global. Finalmente, estableceremos una discusión teórica sobre los resultados obtenidos, en la búsqueda de explicaciones generales acerca de los cambios conceptuales que se hubieran presentado en los estudiantes.

### **Bibliografía**

- Cantoral R. y Farfán R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Contenido en *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8*; Sevilla, España. Grupo Editorial Ibero América, pp. 69-91
- Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. Grupo Editorial Iberoamericana. México D. F. pp. 54-61
- Dolores, C. y Guerrero L. A. (2002). Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato. Artículo aceptado para la RELME 16, a celebrarse en la Habana, Cuba, en Julio del 2002.
- Dolores, C. (2002). Concepciones alternativas que afloran en los estudiantes, cuando analizan el comportamiento de funciones a través de sus gráficas. En prensa
- Ferrari M. & Elik N.(2003) *Influencias sobre el Cambio Conceptual Intencional*; Ed, Sinatra G. Pintrich, P, Intentional conceptual change, Mahwah, NJ: LEA.
- Majmutov M. I. (1983); *La enseñanza problémica*; Pueblo y Educación; La Habana Cuba
- Pozo, J. I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata, S.L.