¿CÓMO ENTENDER LA REGLA DE LA CADENA?: UN ACERCAMIENTO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Ramón Flores Hernández
Universidad Autónoma de Coahuila-Instituto Tecnológico de Saltillo, México
rnfloresh@hotmail.com

Resumen

Este trabajo presenta la fase de "concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas" (Artigue, 1995) correspondiente a una Ingeniería Didáctica sobre la regla de la cadena. La fase del Análisis Preliminar se presentó en la RELME 16. El marco teórico utilizado se ubica en la aproximación basada en las practicas humanas produciendo conocimiento matemático, llamada "Aproximación Socioepistemológica" (Cantoral y Farfán, 2000). El objetivo general es: favorecer la construcción de la regla de la cadena bajo la actividad de encontrar elementos de orden epistemológico que expliquen las dificultades vividas en su apropiación, utilizando las prácticas humanas para provocar la relación; epistemología-generación de conocimiento. La secuencia se estructuró sobre las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización; y se compone de 7 actividades generales divididas en tareas diversas, donde las primeras 3 se refieren a la reconstrucción de significados de la función compuesta y, las restantes a la reconstrucción de la regla de la cadena bajo la noción de predicción utilizada como una actividad humana. El diseño permitirá que los estudiantes puedan evitar el obstáculo de función compuesta al interactuar bajo contextos variacionales, enfrentándose con la predicción como actividad humana.

Conclusiones Acerca del Análisis Preliminar

Del análisis preliminar se puede señalar que se observa una transposición didáctica débil localizada en un saber a enseñar ubicado en los textos escolares; lo que significa que éstos no hacen una explicación clara de la regla de la cadena, su base de la explicación se fundamenta en la función compuesta, misma que funciona como un obstáculo para el estudiante. Además, en la mayoría de los libros examinados no hay una presentación en contexto. Los estudiantes cuando la manejan sólo hacen su algoritmo; no pueden aplicarla en contextos sociales ni matemáticos. En algunos casos la confunden con la regla de la potencia.

Por otra parte, Newton hace un tratamiento distinto al que ahora hacen los textos escolares: utiliza un cociente de cambios instantáneos y un cambio de variable; es aquí donde se observa que el origen social de la regla de la cadena se ubica en el estudio del movimiento, bajo la utilización de razones de cambio relacionadas a través de un cociente con el fin de cambiar la variable tiempo. Así que, se puede decir que en esta transición de épocas y de sociedades ocurre un cambio de epistemología, detectándose tres conflictos en el conocer: uno, en el concepto de función compuesta; otro, en el doble papel que asume una variable en una situación problema, como variable independiente y como variable dependiente; y otro más, en la ligazón intrínseca de las razones de cambio que conforman la regla de la cadena.

Finalmente se dirá que, el diseño se circunscribe en los tres conflictos arriba señalados, pero además, bajo tres direcciones que influyen en la actividad del estudiante en relación con el conocimiento; estos son: textos escolares (el estudiante interactúa con fenómenos físicos que los libros no presentan); cambio de epistemología (se conoce experimentando) y; mirar al estudiante como parte de una sociedad (hay una interacción entre iguales resignificando o reconstruyendo un

conocimiento). Así que el diseño tomará como eje central los tres conflictos señalados, bajo la intención de que la actividad que desarrolle el estudiante sea con el fin de reconstruir la función compuesta y la regla de la cadena.
De manera general se puede mencionar que, cuando la regla de la cadena es puesta en la escena educativa, su problemática deviene en tres direcciones: una, relacionada con su apropiación (construcción, desarrollo y cambio de estructuras de conocimiento); otra, relacionada con las matemáticas aplicadas (cómo y dónde se aplica); y la última relacionada con el consenso y didáctica (es el medio actual que se utiliza para decidir cómo enseñarla).

Situación Didáctica Inicial y Análisis a Priori
Con base en el análisis preliminar se diseño una situación didáctica, teniendo un carácter de referencia, pues dependiendo del análisis a posteriori se podrán diseñar nuevas exploraciones. Los objetivos que persigue este diseño son los siguientes:
Proporcionar contextos sociales que permitan introducir la transición de variables y así ver aparecer la función compuesta
Proporcionar contextos sociales que permitan aparecer en el estudiante la regla de la cadena ligada a la función compuesta, bajo el doble papel que asume una variable y la fusión intrínseca que se origina entre razones de cambio.
Confrontar la presentación de la regla de la cadena como un cociente de cambios instantáneos, con la de un producto de cambios instantáneos.
Inducir al estudiante a transitar dentro de tres registros de representación que posibiliten la construcción social de la regla de la cadena: registro gráfico, numérico y algebraico; bajo la predicción y la construcción de consensos (Cantoral, 2001).
También se identificaron las siguientes variables didácticas:
La relación existente entre las variables independiente y dependiente y, sus contextos.
Los contextos de ubicación de la regla de la cadena: matemático (gráfico, numérico y algebraico) y social (dentro de la vida cotidiana, dentro de la ingeniería o dentro de otra rama de la ciencia).
La formación de la función compuesta bajo la necesidad de utilizar una tercera variable

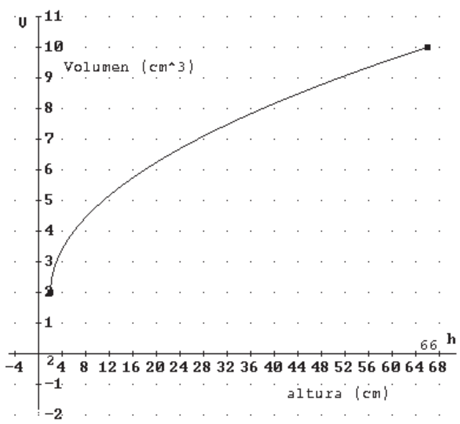
El Diseño
En seguida se presenta la secuencia didáctica conformada por siete situaciones problema (actividades), compuestas por veintisiete tareas. Las siguientes tres actividades deberán facilitar la reconstrucción de la función compuesta mediante la movilización de variables dentro de diferentes representaciones, utilizando la predicción como actividad humana.

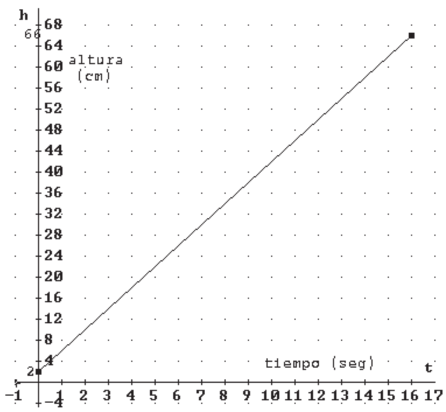
Actividad 1 (situación adidáctica de acción). El hombre lo que más aprecia es su propia vida, pero para tener una vida larga entra en juego un elemento muy importante: la salud; sin embargo, en todos los seres humanos conforme envejecen, su salud se deteriora, es decir, conforme transcurre el tiempo su salud se va perdiendo.
En este párrafo hay una relación importante entre tres variables, indica cuáles variables están involucradas

Además, indica cuáles son variables independientes y cuáles variables dependientes

Actividad 2 (situaciones adidácticas de acción, formulación e institucionalización). En el párrafo inicial hay una variable que tiene doble papel; es decir, el de ser variable independiente y variable dependiente,
¿Cuál es?,
Genera un ejemplo ubicado en tu especialidad donde una de las tres variables tenga un doble papel

Actividad 3 (situaciones adidácticas de: acción, formulación, validación e institucionalización). Se llena con agua un recipiente pequeño de forma irregular y medio vacío, donde el flujo de volumen de entrada varía a través del tiempo. El comportamiento secuencial de 3 variables involucradas en este fenómeno variacional se registra mediante las siguientes gráficas:





Contesta las siguientes interrogantes:
1. Al inicio del llenado:
¿Qué volumen de agua tenia el recipiente?
¿Qué altura tenia el agua en ese momento?
¿En qué tiempo ocurre esto?
2. Al final del llenado:
¿Qué volumen de agua se obtuvo?
¿En qué tiempo ocurre?

3. Para cada uno de estos comportamientos variacionales (graficas) escribe su correspondiente relación funcional (función)
4. Con base en la variación de las tres variables involucradas en las gráficas anteriores y su representación algebraica o funcional, encuentra una fórmula (función) para representar el volumen de agua respecto al tiempo transcurrido en el llenado del recipiente.
5. Si el recipiente hubiese estado vacío completamente, al inicio del proceso,

cómo esperarías que fuera:
la gráfica que relaciona las variables **V** y **h**
la gráfica y función que relacionan las variables **h** y **t**
la gráfica y función que relacionan las variables **V** y **t**
Mediante las siguientes tres actividades se considera que el estudiante de ingeniería reconstruya significados acerca de la regla de la cadena, bajo la actividad humana de predicción al considerar diferentes razones de cambio relacionadas a través de un producto y de un cociente con base en representaciones numéricas.

Actividad 4 (situaciones adidácticas de : acción, formulación y validación). Se tiene un globo de forma esférica que se infla manualmente. Queremos predecir el crecimiento del globo respecto al tiempo; es decir, queremos examinar el cambio continuo de volumen que experimenta el globo cada instante, o sea $\frac{dv}{dt}$. Donde

$$v = \frac{4}{3}\pi\ r^3 \qquad (1)$$

es la función que relaciona el volumen con el radio y,

$$r = 9 - 7e^{-2t} \qquad (2)$$

es la función que relaciona el radio con el tiempo. Si sabemos que el radio mide 2 centímetros cuando el tiempo es de cero segundos, realiza lo siguiente:
Completa la siguiente tabla

t	0	1	2					
r	2							

Auxiliándote de la tabla anterior completa la siguiente tabla que, permitirá mirar la variación del volumen respecto al radio:

r	2							
$\frac{dv}{dr}$								

Realiza lo mismo con la siguiente tabla que, permitirá mirar la variación del tiempo respecto a la variación del radio:

r	2							
$\frac{dt}{dr}$								

a) De acuerdo a las tablas de los incisos a), b) y c), y además considerando que el radio varía de igual forma; esto es, como variable independiente en $\frac{dv}{dr}$ y en $\frac{dt}{dr}$, encuentra finalmente lo solicitado en esta actividad: el cambio instantáneo del volumen respecto al tiempo ($\frac{dv}{dt}$) bajo el objetivo de predecir en qué tiempo reventará el globo (justifica tu respuesta). Para esto completa la tabla siguiente:

b)

t	0	1						
$\frac{dv}{dt}$								

Actividad 5 (situaciones adidácticas de: acción, formulación y validación). Basándote en el mismo problema, busca otro camino para encontrar $\frac{dv}{dt}$ y el tiempo en que reventará el globo; en consecuencia, realiza las siguientes actividades:

1) Completa la siguiente tabla

t	0	1						
r	2							

2) De acuerdo a la tabla anterior, completa la tabla siguiente, misma que nos muestra la variación del volumen respecto a la variación del radio:

r	2							
$\frac{dv}{dr}$								

3) Basándote en la primera tabla de esta Actividad, completa la siguiente tabla. Ésta nos muestra la variación del radio cuando transcurre el tiempo.

t	0	1						
$\frac{dr}{dt}$								

4) Basándote en las tablas anteriores y haciendo notar que r varia, en este proceso, como variable independiente y como variable dependiente y; que las variaciones t y r mantienen una dependencia funcional; además, que queremos predecir el tiempo en el cual el globo reventará. Encuentra el crecimiento del globo respecto al tiempo; esto es, encuentra $\frac{dv}{dt}$ al completar la tabla que a continuación se proporciona. Justifica tu respuesta.

t	0	1						
$\frac{dv}{dt}$								

La siguiente actividad permitirá la generalización y unificación de las nociones función compuesta y regla de la cadena

Actividad 6 (situaciones didácticas de: validación e institucionalización).

A. De acuerdo a la Actividad 4, cómo escribirías en forma general el procedimiento seguido para encontrar $\frac{dv}{dt}$; es decir, encuentra una fórmula que represente la cadena de variaciones estudiadas en el crecimiento de volumen del globo. Principalmente básate en el proceso utilizado para encontrar el inciso d)
B. De acuerdo a la Actividad 5**,** generaliza el procedimiento seguido para completar la tabla del inciso 4); esto es, escribe una fórmula para $\frac{dv}{dt}$.

En la siguiente actividad se pretende usar el conocimiento reconstruido transitando bajo diferentes contextos: uno social y dos matemáticos; bajo el fin de ampliar el significado de la regla de la cadena.

Actividad 7 (situaciones adidácticas de: acción, formulación, validación e institucionalización)

I. Encuentra, a través de la fórmula de la Regla de la Cadena obtenida en la Actividad 6, una fórmula para la variación del volumen del globo ($\frac{dv}{dt}$) planteada en la Actividad 4**.** También, si $t = 6$ segundos, encuentra $\frac{dv}{dt}$.

Sea la siguiente ecuación diferencial: $2y\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y^2 = 2x$, donde $v = y^2$. Se pretende cambiar $\frac{dy}{dx}$ por $\frac{dv}{dx}$. ¿Cómo derivarías $v = y^2$ para lograr lo solicitado? Realiza tal cambio.

De acuerdo a la discusión anterior y a la introducción de las variables $y = f(x), \quad z = g(y), \quad u = h(z)$,

¿Cómo escribirías una cadena de cambios instantáneos en las variables z e y, con el fin de encontrar $\frac{du}{dx}$? Esto generaría una fórmula similar a la encontrada en la Actividad 5.

Bibliografía

Albert, A. (?). *Introducción a la Epistemología*. Serie: Antologías, N°2. Área de Educación Superior, DPM. Cinvestav del IPN

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Gómez, P. (ed.). Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica. México., pp. 33-59

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. Vol 7, N°2, pp. 33-115

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las Matemáticas. Revista *Educación Matemática.* Vol. 12. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 5-38

Bunge, M. (1980). *Epistemología*. Ed. Ariel. Barcelona, España

Cantoral, R., *et al.* (2000a). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Ed. Trillas. México

Cantoral y Farfán. (2000b). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.), *El Fututo del Cálculo Infinitesimal. ICME-8. Sevilla, España.* México: Grupo Editorial Iberoamérica., pp. 66-91

Cantoral, R. (2001). Sobre la Articulación del Discurso Matemático Escolar y sus Efectos Didácticos. En G.L. Beitia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 14. Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición, pp. 64-75

Cordero, F. (2001). La formación y distinción de construcciones en la didáctica del Cálculo y del Análisis: una visión sociocultural. En G.L. Beitia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 14. Grupo Editorial Iberoamérica. Primera Edición, pp. 53-59

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Klineberg, O. (1973). *Psicología Social*. Biblioteca de Psicología y Psicoanálisis. Fondo de Cultura Económica.