

Fronteras en la investigación sobre comprensión en educación matemática

Resumen.

La comprensión del conocimiento matemático constituye un objeto de investigación de interés creciente en Educación Matemática. La elevada complejidad de su estudio y el considerable volumen de conocimientos sobre el tema disponible en la actualidad, justifican la pertinencia de trabajos como el que aquí se presenta, que tiene como principales propósitos delimitar, a través de la reflexión sobre distintas cuestiones abiertas fundamentales, algunos de los principales problemas actuales en torno a la investigación sobre comprensión en matemáticas y trazar, en base a ellos, posibles vías de actuación operativas.

Abstract.

Understanding mathematics has recently become a research topic of increasing interest in Mathematics Education. The high complexity of the study of the understanding and the great volume of knowledge on the subject available at the present time, justify the convenience of works like which it appears here, that it has like main intentions to delimit, through the reflection on different fundamental questions, some of the main present problems in the investigation on understanding in mathematics and to establish, on the basis of them, possible operative answers.

La comprensión como objeto de estudio en Educación Matemática

La comprensión humana suele considerarse uno de los problemas fundamentales en la investigación de áreas tan consolidadas como la filosofía hermenéutica, la epistemología o la psicología. Durante las últimas décadas la preocupación por su estudio también se ha generalizado en el ámbito de la Educación Matemática, al reconocerse de forma mayoritaria la conveniencia de garantizar entre los alumnos un aprendizaje comprensivo de las matemáticas, principalmente porque aporta privilegios y ventajas intelectuales, reduce las dificultades derivadas del carácter jerárquico de la propia disciplina matemática, proporciona experiencias satisfactorias que fomentan actitudes favorables hacia las matemáticas, apoya la autonomía en el aprendizaje futuro y propicia el uso flexible del conocimiento ante nuevos tipos de problemas en contextos diversos (Rico, 1997; NCTM, 2000), entre otras razones. A este reconocimiento hay que unir, de otro lado, la consideración de la especificidad del conocimiento matemático como factor determinante que condiciona su comprensión, lo cual acredita aún más que su estudio se contemple en la actualidad como una labor específica a realizar desde la Educación Matemática.

Al igual que autores como Kieran (1994), somos conscientes de que los cambios producidos durante los últimos años en la investigación en dicho campo muestran una forma distinta de pensar sobre la comprensión del conocimiento matemático. Así, a diferencia de épocas pasadas, la reflexión actual se viene desarrollando a un elevado nivel de precisión y prudencia, en parte como consecuencia de la evolución experimentada por las metodologías de investigación. No obstante, se trata de un ámbito de estudio diverso donde se suelen adoptar perspectivas diferentes, abordar cuestiones parciales y plantear objetivos no comunes a corto plazo. Como referencia específica, los trabajos más recientes pueden situarse en alguno de los siguientes enfoques genéricos de estudio de la comprensión en matemáticas:

(a) Enfoque directo ("principios" de la comprensión). Bajo este enfoque se contempla la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda, centrándose el interés en el estudio de aspectos como su naturaleza, funcionamiento, evolución o valoración. Forman parte de él las diversas teorías y aproximaciones específicas existentes (Hiebert y Carpenter, 1992; Sierpínska, 1994; Pirie y Kieren, 1994; Duffin y Simpson, 1997; Godino, 2000) así como los modelos de comprensión, de categorías y cognitivos (Nakahara, 1994; English y Halford, 1995; Ainley y Lowe, 1999).

(b) Enfoque indirecto ("consecuencias" de la comprensión). Bajo este otro enfoque se sitúan aquellos trabajos preocupados por el desarrollo de la comprensión matemática y por la gestión externa de los efectos que produce. En él se incluyen los estudios curriculares o propuestas de carácter reformista, preocupados por defender argumentos y aportar sugerencias acerca de cómo enseñar y aprender matemáticas con comprensión (Hiebert et al., 1997; Fennema y Romberg, 1999; Goñi, 2000).

En términos generales, podría afirmarse que el panorama actual en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática muestra un carácter atomista con un bajo nivel de cohesión entre los estudios del primer enfoque, un leve predominio de la aproximación representacionista sobre el resto de orientaciones y una limitada articulación entre los estudios posicionados en los enfoques directo e indirecto (Gallardo, 2004).

Delimitando un marco de acción para la investigación sobre comprensión en matemáticas

A pesar de los últimos avances producidos en la investigación sobre comprensión en matemáticas, el carácter multidimensional del fenómeno sigue provocando que su estudio resulte una tarea altamente compleja y un condicionante para los distintos trabajos en curso. Ni tan siquiera puede considerarse resuelta la cuestión epistemológica general sobre si el problema de la comprensión del conocimiento (matemático) admite o no una solución completa, esto es, de si es posible elaborar una teoría coherente y plausible que explique y regule todos los aspectos vinculados a la comprensión. Hoy por hoy, parece ser que no existe tal teoría y cabe la duda de si llegará a elaborarse con carácter definitivo en un futuro. No obstante, a pesar de que la naturaleza de la comprensión imponga un horizonte por ahora desconocido e inalcanzable, se observa cómo la investigación desde la Educación Matemática parece ir superando dificultades importantes en base a resultados contrastados y conclusiones relevantes relacionadas con el problema fundamental que le preocupa, que no es otro que el de desarrollar la comprensión de los alumnos. Tal como se ha venido mostrando en los últimos años, no resulta indispensable entender los principios internos que regulan la comprensión del conocimiento matemático para poder afrontar su valoración y fomentar su desarrollo¹ con cierto éxito entre los individuos. Es más, las soluciones dadas de forma paulatina a estos problemas son de hecho las que podrían ir conformando una caracterización precisa para el fenómeno de la comprensión. En cualquier caso, no parece operativo centrar los esfuerzos en justificar la naturaleza y funcionamiento interno de la comprensión sobre supuestos apriorísticos de los cuales, a pesar de todo lo que se sabe, aún no se encuentran suficientes vestigios en las propias manifestaciones observables de comprensión. Y por otro lado, permanece abierto el debate acerca de si ha de ser labor de la Educación Matemática solucionar el problema de la comprensión en toda su extensión, propósito en el que también vienen fracasando disciplinas con una mayor tradición investigadora.

Por todo ello, somos partidarios de trasladar provisionalmente la atención de los problemas profundos y complejos vinculados con la naturaleza interna de la comprensión, cuyos resultados se han mostrado cuanto menos de poca utilidad práctica inmediata, a las cuestiones más operativas de consecuencias directas para el desarrollo de la comprensión, como las relacionadas con los efectos observables. También nos parece razonable disminuir en la medida de lo posible el énfasis en la investigación por las disputas terminológicas y el discurso retórico. Si bien resulta esencial clarificar el uso dado a los términos y expresiones cognitivas involucrados en toda fundamentación teórica, no lo es tanto dedicar esfuerzos a generar polémicas de carácter nominal. Siguiendo la clásica recomendación humeana, siempre que estemos de acuerdo con el fenómeno es inútil centrar la discusión sobre los términos. De forma que, sin renunciar a la necesaria componente teórica de todo enfoque fundamentado, las aproximaciones a la comprensión del conocimiento matemático deberían mantener, a través de los problemas tratados, un vínculo directo con la realidad que desea mejorar y proporcionar con su aplicación resultados concretos útiles en el desarrollo de la comprensión y en el esclarecimiento desde la práctica empírica del resto de aspectos asociados al fenómeno. Esta perspectiva, aunque no está exenta de dificultades, nos sitúa en una posición alternativa que evita la frontera difusa de la naturaleza de la comprensión, proporciona a priori unas mayores expectativas de éxito y está más próxima a los intereses de la Educación Matemática respecto al estudio de la comprensión.

Simultáneamente, el punto de partida para una investigación sobre comprensión en matemáticas habría que situarlo en todo caso en la base de conocimientos existente ya contrastada y, por ello, consensuada por la comunidad científica², así como en las cuestiones abiertas generadas por el problema fundamental del desarrollo a partir de la base acordada. En principio, no cabe opción más “inocente”, por a-crítica, que ésta, a pesar de las dificultades que supone explicitar tales conocimientos.

¿Qué conocimientos sobre la comprensión de las matemáticas resultan entonces necesarios para afrontar la labor de su desarrollo con garantías de éxito y en consenso con una comunidad científica crítica? El problema radica en configurar el área de investigación intermedia circunscrita a los límites que acabamos de mencionar, teórico-operativa y dinámica que, en su proceder, genere, por un lado, pautas metodológicas concretas y operativas para fomentar la comprensión y, por otro, un conocimiento teórico sólido, respaldado por resultados empíricos sobre otros aspectos del fenómeno susceptible de ser empleado en fases

por resultados empíricos, sobre otros aspectos del fenómeno susceptible de ser empleado en fases posteriores del ciclo investigativo una vez integrado en la correspondiente base referencial de conocimientos. Pero disminuir, a priori y provisionalmente, las pretensiones de entendimiento acerca del fenómeno de la comprensión en toda su extensión sin renunciar a mejorar la comprensión matemática de los sujetos plantea nuevas dificultades. De hecho, el estudio de la comprensión en Educación Matemática constituye en realidad un problema doblemente metodológico. Por una parte, desde un punto de vista práctico permanece aún abierta la cuestión de cómo lograr un procedimiento preciso y eficaz para el desarrollo de la comprensión a un nivel que pudiéramos admitir sin dificultad como aceptable o suficiente³. Por otra, desde una perspectiva teórica queda pendiente la labor de configurar aproximaciones a la comprensión que integren y mejoren a las existentes dando respuesta a dificultades originadas por los demás aspectos de la comprensión al margen del desarrollo. Tal como expondremos, la valoración resulta en este punto una actividad necesaria por el papel relevante que desempeña en el problema del desarrollo.

De modo que, con la referencia de una base inicial de conocimientos consensuada sobre la comprensión en matemáticas, que evitaría cualquier posición escéptica en lo que concierne a la posibilidad de alcanzar algún entendimiento sobre el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, la investigación actual bien podría orientarse en dos sentidos:

- una investigación de primer nivel, teórico-empírica, que incluiría (a) el estudio insistente desde enfoques conocidos de cuestiones, a priori resolubles, ya tratadas pero hasta ahora no resueltas de forma concluyente (por ejemplo, algunas de las derivadas de la perspectiva representacionista) y (b) la búsqueda y desarrollo de nuevas aproximaciones a la comprensión para establecer vías de acceso alternativas a las existentes;
- una investigación de segundo nivel, complementaria a la primera y fundamentalmente teórica, que contendría procedimientos propios de las metodologías cualitativas no-empíricas de carácter meta-analítico como el Análisis Didáctico (González, 1998, 1999), con el propósito de (a) identificar aquellos nuevos conocimientos incorporables a la base admitida de conocimientos exentos de crítica y (b) presentar y caracterizar nuevas cuestiones problemáticas susceptibles de estudio.

Valoración e interpretación: cuestiones presentes en la investigación sobre comprensión

¿Resulta posible el desarrollo de la comprensión del conocimiento matemático sin considerar su valoración entre los sujetos? A nuestro entender, valoración y desarrollo son aspectos que habrían de incluirse y considerarse conjuntamente en toda aproximación a la comprensión, por varias razones fundamentales:

(a) En primer lugar, para desarrollar la comprensión que el sujeto posee sobre un conocimiento matemático concreto se requiere caracterizar la situación comprensiva inicial en la que éste se encuentra, lo cual conduce directamente a la valoración de la comprensión, que ha de entenderse en este caso como una actividad previa al propio proceso de desarrollo. Las conclusiones extraídas de la valoración permiten construir la base de criterios con los que actuar sobre el desarrollo de un modo fundamentado.

(b) En segundo lugar, como la comprensión acontece a nivel interno, su fomento también exige fases regulares de valoración destinadas a contrastar la eficiencia del método empleado, derivándose de ellas las referencias necesarias para sustentar los posibles ajustes y modificaciones a realizar a lo largo del proceso de desarrollo.

(c) Por último, atendiendo a una finalidad práctica, no tendría repercusiones significativas realizar un estudio centrado en la valoración de la comprensión sin consecuencias para su desarrollo.

Profundizando un poco más sobre la cuestión, hemos de reconocer también que si el fomento de la comprensión conduce a la valoración, ésta, a su vez, nos traslada al reconocido problema de la interpretación de las acciones del otro. Así, la valoración de la comprensión la entendemos básicamente como la labor de interpretar productos observables originados por una actividad cognitiva interna. La interpretación, por su parte, supone realizar afirmaciones, caracterizar hechos y extraer resultados y conclusiones de lo observado por los sentidos de acuerdo con una base referencial, propia del observador, de conocimientos, de experiencias previas y de criterios prefijados de antemano y afectados por condicionantes externos (dependencia valorativa). Interesa subrayar que con la interpretación se persigue

consideraciones externas (dependencia valorativa), interesa subrayar que con la interpretación se persigue no tanto la explicación en sentido positivista de las posibles causas de unos efectos constatados como la 'autocomprensión hermenéutica' de lo observado por parte del agente externo que realiza la valoración. Este enfoque provoca el retorno a la problemática de la comprensión, aunque esta vez contemplada desde la perspectiva metodológica que se desprende de la operación de la *Verstehen* en las ciencias sociales (Habermas, 1990), esto es, de la comprensión como modo fundamental de conocimiento social y de la hermenéutica como método de interpretación de toda manifestación marcada por la intención humana (Morin, 1994). En definitiva, dicha circunstancia da razón suficiente de la incompletitud, necesaria por principio, de la valoración, mostrándose de este modo otro de los límites fundamentales en la investigación sobre comprensión.

En el ámbito específico de la Educación Matemática, ¿a qué debe atenerse y qué debe procurar el investigador interesado por el estudio de la comprensión del conocimiento matemático a través de la valoración de lo observable? En principio, resulta inevitable preguntarse por los requisitos a los que en general han de ajustarse todas nuestras interpretaciones sobre lo observado así como por el grado de certeza alcanzado en la interpretación de lo observado. A nuestro entender, constatar o delimitar la certeza de una interpretación sobre un comportamiento observable constituye el problema fundamental originado en la valoración de la comprensión en matemáticas. Este problema va a exigir el desarrollo de planteamientos teóricos operativos y de estrategias metodológicas que permitan, con su aplicación, la obtención de información objetiva con la que garantizar unas descripciones e interpretaciones cercanas a la realidad de las distintas situaciones cognitivas existentes. Entre las posibles vías que garantizan la objetividad del proceso valorativo, siempre entendida en términos no absolutos, podemos destacar como ejemplos la propuesta de Sierpiska (1994) de valorar la comprensión del conocimiento matemático en función de su ajuste o coherencia con el sistema lógico en el que está inmerso, el análisis de los significados praxeológicos de los objetos matemáticos derivado de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2002) o, más recientemente, el procedimiento metodológico basado en el análisis fenómeno-epistemológico del conocimiento matemático desarrollado y aplicado en Gallardo (2004). En cualquier caso, conviene evitar en lo posible todas aquellas referencias apriorísticas de base para la interpretación alejadas del conocimiento matemático y de la interacción visible sobre él del sujeto cuya comprensión interesa estudiar.

Por otro lado, la interpretación comprensiva comporta una exigencia comunicativa entre el sujeto de estudio y el observador de su comprensión, articulada fundamentalmente a través del diálogo (comunicación directa; entrevistas) o mediante el análisis de registros escritos (comunicación indirecta; cuestionarios), que trae consigo claras consecuencias metodológicas en lo referente a los instrumentos de recogida de datos a emplear en la valoración.

En torno a la calidad en la investigación sobre comprensión en matemáticas

Asumiendo la situación descrita en los apartados precedentes, resulta oportuno preguntarse en éste por los requisitos que debieran cumplir en la actualidad las investigaciones sobre comprensión del conocimiento matemático para poder ser consideradas de calidad. De acuerdo con lo subrayado por algunos de los autores que han venido reflexionando sobre esta cuestión en los últimos años (Romberg, 1992; Sierpiska et al., 1993; Coriat, 2001), todo estudio sobre comprensión en matemáticas, al igual que sobre cualquier cuestión de interés para la Educación Matemática, debería manifestar suficientes garantías de validez, racionalidad, originalidad, rigurosidad, reproductibilidad o relevancia, entre otros criterios. Pero además de cumplir con ellos, que caracterizan a la calidad en un sentido clásico, la investigación también habría de garantizar su calidad en el sentido más amplio subrayado recientemente por Simon (2004), sobre todo en lo concerniente a proporcionar conocimiento que permita el avance del área de forma significativa. Como venimos señalando, en el contexto específico de la investigación sobre comprensión del conocimiento matemático esto supone contemplar como propósito de primer orden la elaboración de nuevos constructos en base a antecedentes consolidados, además de la descripción de la realidad comprensiva de los sujetos. Para tal fin apostamos por investigaciones que incluyan desarrollos teóricos sólidos conectados con estudios empíricos descriptivos siempre considerados de forma provisional. Y tales desarrollos deberían proporcionar aproximaciones indirectas sobre la comprensión matemática con la suficiente potencialidad descriptiva y prescriptiva para garantizar su utilidad y efectividad en Educación Matemática (Koyama, 1993).

Asimismo, toda aproximación en torno a la comprensión del conocimiento matemático resultante de una investigación de calidad tendría que ser, en lo posible, integradora. La heterogeneidad del ámbito de estudio recomienda establecer marcos reguladores con los que ordenar y situar enfoques dispares a través del análisis de sus diferencias relativas y puntos comunes, todo ello con el fin de aportar nueva información que permita afrontar el estudio de la comprensión⁴ desde posiciones más aventajadas. El carácter

integrador de toda propuesta implica que deba ser flexible y compatible, con capacidad para asimilar y adoptar información externa a la producida por ella misma y con disposición a ser modificada y mejorada, debiéndose considerar siempre abierta y provisional.

Además de estas características, las aproximaciones habrían de ser operativas para garantizar un grado de aplicabilidad suficiente con consecuencias directas en el desarrollo de la comprensión. Dicha operatividad demandaría, entre otras cosas, precisión de cara a la aplicación de los procedimientos metodológicos generados.

Hemos de subrayar que en la actualidad permanece abierta la discusión en torno a la posibilidad real de una aproximación integradora y operativa así como sobre los aspectos teóricos y metodológicos que la caracterizarían. Entendemos por ello que resulta preciso continuar con el empeño de elaborar nuevos enfoques integradores y sobre todo más operativos que los existentes.

Influencia de las teorías sobre comprensión en la Educación Matemática. El caso del Cálculo Aritmético Elemental

Hasta ahora hemos expuesto algunos de los requerimientos intrínsecos a cumplir por la investigación interesada en el problema de la comprensión del conocimiento matemático. En este apartado nos ocupamos de la repercusión externa o influencia que los planteamientos derivados de ella habrían de tener sobre otros focos de investigación vigentes en el campo de la Educación Matemática.

En esta cuestión consideramos que para llegar a extender de forma significativa el conocimiento en Educación Matemática las teorías sobre comprensión deberían aportar, además de información específica sobre su ámbito de estudio, referencias añadidas con las que mejorar la situación actual de conocimientos (resultados, conclusiones y logros alcanzados) en torno a otras áreas de investigación de interés para el campo, organizando, interpretando, explicando, solucionando o ampliando, en su caso, las distintas problemáticas ya existentes. Como ejemplo de tal influencia, hacemos explícitas a continuación algunas de las contribuciones que distintas aproximaciones a la comprensión del conocimiento matemático podrían realizar sobre el ámbito de estudio que se ocupa de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Aritmético Elemental. En este caso concreto las aportaciones hay que entenderlas fundamentalmente como interpretaciones plausibles realizadas sobre diferentes hechos constatados en dicho ámbito que no encuentran explicación desde su propio campo de investigación:

1. Sobre las propuestas metodológicas y las tareas empleadas en ellas. Se puede apreciar cómo una parte importante de los estudios desarrollados en Cálculo Aritmético Elemental se ha preocupado básicamente por la cuestión de cómo fomentar y ampliar la comprensión entre los alumnos, pero sin antes haber reflexionado lo suficiente sobre otros aspectos importantes de la misma que creemos son previos al diseño de propuestas metodológicas. A nuestro juicio, éste podría ser el principal motivo por el cual los diversos trabajos relacionados con la enseñanza de los algoritmos aritméticos elementales, a pesar de su interés por alcanzar el propósito común de favorecer la comprensión de los estudiantes, sólo llegan a ofrecer prescripciones e ideas no definitivas y de carácter general, tal como subraya Resnick (1992).

Además, entre las distintas propuestas de enseñanza y aprendizaje existentes suele ser usual el empleo reducido, en cuanto a número y tipo, de tareas y situaciones matemáticas con las que afrontar la valoración y el desarrollo de la comprensión⁵. Este hecho pone de manifiesto la escasa importancia dada por la mayoría de estas propuestas a las recomendaciones que se derivan de algunas de las aproximaciones específicas a la comprensión del conocimiento matemático respecto a la necesidad de emplear nuevos grupos de tareas complementarias a las utilizadas tradicionalmente a fin de evitar el aprendizaje deficiente y la comprensión limitada. De igual manera, la valoración en ellas resultaría más fiable y válida si se contemplara un conjunto más amplio de tipos situacionales a los que enfrentar a los alumnos, debiéndose reconocer en este punto la especificidad propia y la naturaleza diferente de las tareas destinadas a la valoración de las dirigidas al desarrollo. Entre los escasos estudios realizados en Cálculo Aritmético Elemental que tienen presentes tales consideraciones metodológicas tomadas de la investigación sobre comprensión en matemáticas cabe destacar, a modo de ejemplo, el reciente trabajo de Gairín y Sancho (2002), donde se pueden apreciar claras alusiones al enfoque representacionista.

2. Sobre los modelos de comprensión implícitos en las propuestas. En contraste con la situación descrita en el punto anterior, suele ser normal entre las propuestas de enseñanza-aprendizaje encontrar indicios ocasionales de la influencia ejercida sobre ellas, a nivel conceptual y de forma implícita, por algunos de los modelos de comprensión más extendidos. Así por ejemplo, podemos

...propuestas, por algunos de los modelos de comprensión más orientados. Por ejemplo, podemos considerar que las propuestas de enseñanza basadas en la comparación de diferentes algoritmos particulares (Philipp, 1996; Mason, 1998) están adoptando en realidad el modelo representacionista de comprensión al justificar la identificación a nivel externo de posibles semejanzas y diferencias entre algoritmos como vía para favorecer la construcción de relaciones internas entre las correspondientes representaciones mentales que los alumnos asocian a esos algoritmos, posibilitando de este modo su comprensión.

Sobre los errores. Los trabajos sobre errores en Cálculo Aritmético Elemental, de amplia tradición en Educación Matemática, constituyen un área de investigación abierta en la que aún quedan pendientes numerosas cuestiones relacionadas con la comprensión deficiente de los sujetos. Por lo general, estos estudios persiguen una justificación a nivel cognitivo y de funcionamiento interno sobre la presencia de errores en los individuos y sobre los motivos que provocan su comprensión defectuosa ante los distintos procedimientos de cálculo (Hennessy, 1993; Hatano, Amaiwa e Inagaki, 1996). Por tanto, centran su atención en las formas insuficientes o incorrectas de comprender y el error es considerado en ellos como una fuente de información para negar la comprensión. De acuerdo con Sierpinska (1994), la continua aparición de trabajos sobre errores sistemáticos, concepciones equivocadas y comprensiones deficientes viene motivada fundamentalmente por el hecho de ser más factible evidenciar que una comprensión no es perfecta que obtener datos objetivos sobre una comprensión adecuada. De hecho, los resultados en Educación Matemática acerca de una buena comprensión suelen ser escasos y a menudo están pobremente justificados.

Ahora bien, el enfoque basado en los errores como vía “negativa” de acceso al estudio de la comprensión del Cálculo Aritmético Elemental podría complementarse con otras perspectivas alternativas centradas esta vez en analizar la contribución positiva que realizan las respuestas incorrectas y los errores en el cálculo al diagnóstico de la comprensión, entendidos ahora como indicadores de modos específicos de conocimiento aritmético. Esto es, el uso del conocimiento matemático en general, siempre que esté tipificado de acuerdo con unas referencias caracterizadoras concretas, puede ser interpretado como muestra positiva de comprensión, con independencia de que tal uso genere o no una solución correcta para una situación dada.

En definitiva, los casos descritos ponen en evidencia los vínculos existentes entre la situación actual en la que se encuentra la investigación en Educación Matemática sobre la comprensión y los avances sobre enseñanza y aprendizaje del Cálculo Aritmético Elemental. En nuestra opinión, la situación en este último ámbito, inmerso en un cuestionamiento permanente acerca de lo que debe y cómo debe enseñarse y aprenderse, así como en el desarrollo continuo de ensayos metodológicos, sugerencias y propuestas de mejora, perdurará sin cambios significativos mientras no se produzcan avances relevantes en la investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático. El conjunto de sugerencias y prescripciones, en general inconexas y a veces contrapuestas, que se extraen de los distintos estudios particulares sobre Cálculo Aritmético Elemental puede entenderse como una consecuencia de los escasos resultados concluyentes que se poseen en la actualidad en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático.

Conclusión

En el presente trabajo hemos expuesto algunos de los principales problemas metodológicos que afectan en la actualidad a la investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático. Aunque no son únicos, los que se han tratado constituyen a nuestro entender un referente con el que justificar la racionalidad de los estudios sobre comprensión en matemáticas así como una guía con la que poder posicionar futuras investigaciones en Educación Matemática. En esencia, a través de las respuestas proporcionadas a las diferentes cuestiones planteadas hemos pretendido poner de manifiesto la pertinencia y la posibilidad de establecer posiciones integradoras y operativas en la investigación sobre comprensión que superen las limitaciones de los enfoques actuales.

La visión en torno a la investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático que se desprende del trabajo no pretende ser definitiva ni tampoco la más adecuada de todas cuantas se puedan elaborar. La problemática aún permanece abierta por lo que resulta conveniente continuar realizando con regularidad reflexiones como las aquí expuestas a fin de no perder la perspectiva sobre un campo de investigación de tanta relevancia para la Educación Matemática.

Notas

1. El término *desarrollo* es empleado en este trabajo en dos sentidos diferentes que no admiten confusión: como promoción o *fomento* de la comprensión pretendido por un agente externo (investigador, profesor,...) para un sujeto, y como *evolución* de la propia comprensión del individuo experimentado en su mente. En este segundo sentido, el desarrollo viene dado tanto por el

propia comprensión del individuo experimentada en su mente. En este segundo sentido, el desarrollo viene dado tanto por el incremento del conocimiento a consecuencia de experiencias con nuevos objetos matemáticos como por la reestructuración cualitativa a nivel cognitivo de conocimientos matemáticos previamente adquiridos.

2. Uno de los problemas centrales en la investigación social, en la que incluimos la relativa a la comprensión del conocimiento matemático, consiste en establecer la base de entendimiento, mediante la aceptación de enunciados básicos, sobre la que poder asentar la crítica y la discusión sin equivocar los términos, propósitos e hipótesis tratados. Este es un hecho que repercute en la validez de la investigación, por cuanto ésta está impregnada de estándares prefijados y criterios de racionalidad que tan sólo pueden ser consensuados en base a un ejercicio de crítica y discusión.

3. Esta exigencia pasa por evitar caer en la retórica persuasiva (Sierpinska, 2000) que se deriva de no contemplar el aprendizaje comprensivo como un problema incluido en el de la comprensión del conocimiento matemático en toda su extensión. Para ello, conviene tener presente la información existente sobre aquellos otros aspectos de la comprensión que puede influir favorablemente en la eficiencia de las correspondientes propuestas para el desarrollo.

4. Entre las aproximaciones integradoras más recientes podemos citar la presentada por Hiebert y Carpenter (1992), de la que a partir de la consideración de la comprensión en términos de representaciones y conexiones internas del conocimiento se han derivado consecuencias significativas que afectan directamente a la investigación actual.

5. Básicamente suelen emplearse problemas de enunciado verbal que simulan situaciones reales y ejercicios de cálculo de los que aparecen normalmente en los libros de texto como actividades clásicas para desarrollar destrezas (Gallardo, 2004).

Referencias bibliográficas

- Ainley, J.; Lowe, A. (1999): "Can written questions differentiate between degrees of understanding?" *Mathematics Teacher*, 168, 32-35.
- Coriat, M. (2001). *Los problemas de un director de Tesis. Anexos*. Ponencia presentada en el Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga (paper).
- Duffin, J.; Simpson, A. (1997): "Towards a new theory of understanding". En: E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.166-173), Lhati, Finland.
- English, L.D.; Halford, G.S. (1995): *Mathematics Education: Models and Processes*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, N.J.
- Fennema, E.; Romberg, T. A. (Eds.) (1999): *Mathematics classrooms that promote understanding*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, N.J.
- Gairín, J. M.; Sancho, J. (2002): *Números y algoritmos*. Síntesis, Madrid.
- Gallardo, J. (2004): *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis Doctoral inédita. Universidad de Málaga.
- Godino, J. D. (2000): "Significado y comprensión de los conceptos matemáticos". *Uno* 25, 77-87.
- Godino, J. D. (2002): "Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática". *La matemática e la sua didattica* 4, 434-450.
- González, J. L. (1998): "Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education". En: I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. II, pp. 245-256). Osnabrück, Germany.
- González, J. L. (1999): "Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática". *III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.14-30). Universidad de Valladolid, Valladolid.
- Goñi, J. M^a (2000): "La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos". En: J. M^a Goñi (Coord.) *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp. 23-57). Grao, Barcelona.
- Habermas, J. (1990): *La lógica de las ciencias sociales*. Tecnos, Madrid.
- Hatano, G.; Amaiwa, S.; Inagaki, K. (1996): "'Buggy Algorithms' as Attractive Variants". *Journal of Mathematical Behavior* 15, 285-302.
- Hennesy, S. (1993): "The stability of children's mathematical behavior: when is a bug really a bug?" *Learning and Instruction* 3, 315-338.
- Hiebert, J.; Carpenter, T. P. (1992): "Learning and Teaching with understanding". En: D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). MacMillan Publishing Company, New York.
- Hiebert, J.; Carpenter, T. P.; Fennema, E.; Fuson, K.C.; Wearne, D.; Murray, H.; Olivier, A.; Human, P. (1997): *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Heinemann, Portsmouth, N. H.
- Kieran, C. (1994): "Doing and seeing things differently: a 25-year retrospective of mathematics education research on learning". *Journal for Research in Mathematics Education* 25, 6, 583-607.
- Koyama, M. (1993): "Building a two axes process model of understanding mathematics". *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 1, 63-73.
- Mason, D. E. (1998): "Capsule Lessons in Alternative Algorithms for the Classroom". En: L. J. Morrow; M. J. Kenney (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 91-98). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.
- Morin, E. (1994): *El Método. El conocimiento del conocimiento*. Cátedra, Madrid.
- Nakahara, T. (1994): "Study of the representational system in mathematics education". *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 2, 59-67.
- NCTM (2000): *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.
- Philipp, R. A. (1996): "Multicultural Mathematics and alternative algorithms". *Teaching Children Mathematics* 3, 128-133.
- Pirie, S.; Kieren, T. (1994): "Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it?" *Educational Studies in Mathematics* 26, 165-190.
- Resnick, L. B. (1992): "From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge". En: G. Leinhardt; R. Putham; R. Hattrup (Eds.) *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 373-429). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.J.
- Rico, L. (1997): "Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática". *Suma* 24, 5-19.
- Romberg, T. A. (1992): "Perspectives on Scholarship and Research Methods". En: D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 49-64). MacMillan Publishing Company, New York.
- Sierpinska, A. (1994): *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press, London.
- Sierpinska, A. (2000): "Book Review". *ZDM* 2, 45-50. [Del libro: Fennema, E.; Romberg, T. A. (Eds.) (1999): *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*. Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, N.J.]

Sierpinska, A.; Kilpatrick, J.; Balacheff, N.; Howson, A. G.; Stard, A.; Steinbring, H. (1993): "What Is Research in Mathematics Education, and What Are its Results?" *Journal for Research in Mathematics Education* 24, 3, 274 -278.

Simon, M. A. (2004): "Raising Issues of Quality in Mathematics Education Research". *Journal for Research in Mathematics Education* 35, 3, 157-163.

DATOS DE LOS AUTORES

Autor 1

Jesús Gallardo Romero. Profesor de Secundaria. gamu@arrakis.es

Dirección y teléfono de trabajo (de referencia para ambos autores):

Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Málaga.

Campus de Teatinos. s/nº.

29071-Málaga

Tel: 952132443 Fax: 952132393

Reseña biográfica

Títulos: Licenciado en Ciencias Matemáticas (1997) y Doctor por la Universidad de Málaga (2004) con la Tesis Doctoral "*Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*".

Líneas de investigación: Pensamiento Numérico; comprensión del conocimiento matemático; enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental.

Trabajos y publicaciones recientes:

-Gallardo, J.; González, J. L. (2002): "Multiplicaciones con cifras desconocidas: problemas para practicar y comprender el algoritmo estándar de la multiplicación". *Epsilon* 54, 469-478.

-Gallardo, J.; González, J. L. (2005): Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. Comunicación aceptada en el IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Córdoba.

-Gallardo, J.; González, J. L. (en prensa): "Valoración de la comprensión del conocimiento matemático: avances hacia un modelo operativo". *Uno*, 40.

Autor 2

José Luis González Marí. Profesor Titular de Universidad del Área de Didáctica de la Matemática. gmari@uma.es

Dirección y teléfono de trabajo (de referencia para ambos autores):

Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Málaga.

Campus de Teatinos. s/nº.

29071-Málaga

Tel: 952132443 Fax: 952132393

Reseña biográfica

Títulos: Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Málaga (1978) y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (1995).

Líneas de investigación: Pensamiento Numérico y Algebraico; comprensión del conocimiento matemático; innovación curricular en la acción.

Trabajos y publicaciones recientes:

Últimas Tesis Doctorales dirigidas:

- "*Derivación e integración de funciones de variable compleja con derive. Un estudio de innovación curricular en segundo curso de ingeniería técnica de telecomunicaciones*" (2004)

- "*Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*" (2004)