# SIGNIFICATIVIDAD PARA LA PROPORCIONALIDAD INVERSA EN ESTUDIANTES DEL DÉCIMO AÑO DE ESCOLARIDAD

Fidel Ledesma Bruce
Tesista Magíster en Educación – UMCE, Chile
fledesmabruce@yahoo.com

## Resumen

La preocupación por indagar en el tema de la Proporcionalidad Inversa se origina buscando un encuentro entre la visión de un estudiantado "constructor de su propio conocimiento" inspirado en el Proyecto Educativo Institucional, PEI, de un liceo municipalizado, con las prácticas pedagógicas de aula y sus ulteriores consecuencias en la devolución de razonamientos "razonados" por parte de los estudiantes. Los lineamientos constructivistas, inspiradores de la Reforma en el marco curricular, inserto en el sector de matemática son asimilados y sugeridos administrativamente, pero no se visualizan en las prácticas de aula en el intercambio de epistemes del estudiante y del profesor. Estas se evidencian en la recopilación de antecedentes - con los instrumentos de cuestionario y pruebas -. La forma tradicional de pensamiento tiene predominio de lo memorístico y con clara tendencia a la mecanización algebraica. Se trató de conocer y comprender algunos elementos relevantes y propios de una situación de aprendizaje en aula, donde intervienen en forma recurrente estrategias usadas por los estudiantes. La finalidad del estudio es superar la mecánica algebraica al abordar los desafíos impuestos por la epistemología del saber, mediado por su profesor en aula sobre la base de la Resolución de Problemas en Segundo Año de Enseñanza Media (décimo año escolar).. Para tal efecto, se trató de pesquisar otros elementos aledaños socio-culturales y cognitivos en el marco socio-epistemológico de la investigación para contribuir a una propuesta que permita avanzar en las representaciones estudiantiles en el contexto del Pensamiento Variacional.

## Antecedentes

El marco curricular de la enseñanza media diseñado a través del decreto 240 de 1998 del Mineduc, considera al sector de matemática organizado en torno a tres ejes temáticos: Álgebra y Funciones; Geometría; Estadística y Probabilidad. El aprendizaje de la matemática está asociado específicamente al desarrollo de un conjunto de habilidades referidas a: Procedimientos estandarizables, Resolución de Problemas, Estructuración y generalización de los conceptos matemáticos. Este decreto recomienda que *"el proceso de aprendizaje en el aula se cimiente en contextos significativos y accesibles para los jóvenes, favoreciendo la comprensión por sobre el aprendizaje de reglas y mecanismos sin sentido" (Mineduc, 1998).* La Proporcionalidad Inversa se inscribe en el primer eje temático, es decir en "Álgebra y Funciones" y desea promocionar en el estudiante las habilidades prescritas anteriormente, y además, como al incorporar el uso de convenciones apropiados por el joven pasan a ser procedimientos rutinarios y algorítmicos. Sistematización del ensayo y error, aplicación y ajuste de modelos, y formulación de conjeturas. Incorporar relaciones entre los distintos temas y conceptos, y algunos antecedentes relativos a su evolución histórica. La Proporcionalidad Inversa en NM-2 se inscribe en los Objetivos Fundamentales de:

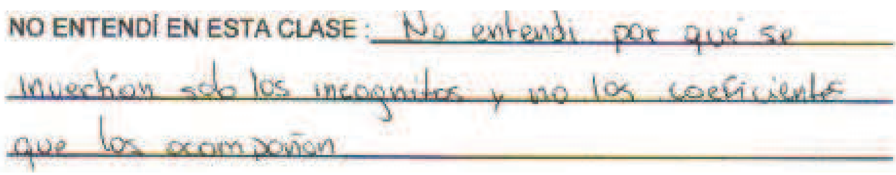
- Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.
- Percibir la relación de la matemática con otros ámbitos del saber.

En los Contenidos Mínimos, corresponde al Lenguaje Algebraico y en ellos se destacan las siguientes habilidades cognitivas:

- Expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador). Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples.
- Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números.

Se deja ver en estos enunciados una perspectiva estático –algebraica que dotará de sentido a la proporcionalidad inversa. Este marco epistémico raya una cancha muy difícil de remontar para una actividad de educación matemática de la proporcionalidad inversa que aporte significatividad a los estudiantes. Nobles aspiraciones educacionales no siempre son coherentes con las epistemes que les subyacen y menos con el darse cuenta de sus actores de ellas. Por su parte, tampoco estará en consonancia con las prácticas pedagógicas más comunes en matemática, pues la estructura formal[20] de la disciplina muchas veces impide durante la enseñanza de conceptos, la diversidad de aperturas de razonamientos al interior de la propia disciplina así como su vinculación con otras áreas de saberes disciplinares. Por su parte, hace ya más de cuarenta años que Kuhn (1963) develara modos de elaboración propios de las disciplinas mostrando su devenir tiempos de normalidad seguidos de "revoluciones científicas" (…) "con estructura que reaparece regularmente" apareciendo conjeturas que tradicionalmente no son asimiladas en una perspectiva interdisciplinaria, conjeturamos la presencia de "anomalías" al decir de Kuhn. Esto nos anima a revisar conceptos y procedimientos asociados a los saberes comprendidos bajo la Proporcionalidad Inversa en su deriva histórica, epistemológica y sociocultural.

Evidencias desde las prácticas de aula. A continuación se presentan textualidades de los estudiantes, luego de haber resuelto de manera tradicional un problema con enunciado en la pizarra, por medio del grupo disertante, en el marco de contenido de la Proporcionalidad Inversa:


NO ENTENDÍ EN ESTA CLASE: No entendi por que se inviertan solo las incognitas y no los coeficiente que las acompañan

Otros comentarios de los estudiantes, luego de trabajar problemas de enunciado verbal de proporcionalidad inversa, son los siguientes:

*"Por qué había que dar vuelta una parte del sistema inverso"*
*"Cuando se invierten las incógnitas en las ecuaciones de 3x3 indirectas"*
*"El último problema ya que era muy largo y no supe como seguir"*
*"Por qué dar vuelta una parte de la ecuación en la variable inversa"*
*"Me quedó una duda respecto a un problema 3x3 inverso el cual el inverso de 2c, es 2/c según nuestro compañero, lo que creo que está bien, pero también podría ser*

[20] Podemos, en principio, distinguir perspectivas formalistas, logicistas y empiristas de entender la matemática con su subsecuente trasposición al aula de cada una de ellas.

*1/2c. Lo que debo hacer para comprender lo anterior es tratar de resolver el ejercicio de esta forma, y si no me resulta, preguntar a los que más sepan."*

Estas textualidades muestran como las prácticas operatorias mecanicistas dejan a los estudiantes con un sinnúmero de preguntas en un registro algebraico lejano de la significatividad que requiere el tema de la proporcionalidad inversa.

**Propósito del estudio**

Se presenta en este artículo, elementos concomitantes principales que llevan a los estudiantes a usar determinadas estrategias recurrentes de aprendizaje conducentes a la mecanización algebraica en la resolución de problemas con enunciados verbales escritos, relativos a la Proporcionalidad Inversa y relevar aspectos de una enseñanza que favorezca la significatividad de los aprendizajes en el estudiantado. Posteriormente se espera levantar secuencias didácticas que recurran a diversidad de registros: gráficos, numéricos, tabulares, iconográficos, simbólicos y que muestren al discurso curricular sobre la proporcionalidad como un cuerpo de saberes coherente y consistente al interior del currículum de la Educación Matemática y que promueven aprendizajes reflexivos. Más específicamente se procuran los objetivos de:

- Estudiar e interpretar las representaciones que exponen los estudiantes a la hora de explicar sus producciones relativas a la Proporcionalidad Inversa. En particular determinar los que entienden por "estrategia de solución de problemas", en su uso cotidiano en aula.
- Determinar representaciones de Proporcionalidad Inversa en los estudiantes.
- Estudiar la Proporcionalidad Inversa en su devenir histórico y su evolución socioepistemológica.
- Diseñar alternativas de aprendizaje, con sustento en la micro ingeniería didáctica, para abordar la enseñanza de la Proporcionalidad Inversa.
- Validar localmente una secuencia didáctica en pequeños grupos.
-

**Hallazgos de la primera fase del estudio: Corporalizar la Proporcionalidad Inversa**

Ejemplos ilustrativos: El sobre pastoreo o el relato de la "tragedia" causada por las ilimitadas necesidades del ser humano, en un mundo limitado por su naturaleza, planteado por el biólogo Garret Herdin en el marco de una sensibilidad ecológica. En esta ilustración el proceso "inverso" adquiere autonomía. También se observa esta autonomía en otra ilustración, a saber, la actividad agrícola en las civilizaciones remotas, y que es totalmente distinta a la anterior: "Un campesino sabe que, en un surco de 33 m de largo debe arrojar 15 semillas por cada metro que avanza. Para anticiparse y aprovisionarse, resuelve mentalmente de la siguiente manera, con 15 semillas en cada metro que avanzo, es parecido a que si fuera la "mitad" del largo del surco, pero el doble de la cantidad de semillas (16 y 30); si ahora considero la mitad de 16 entonces, será el doble de semillas 8 y 60; luego, la mitad de este y el doble de la cantidad de semillas que tengo, se tiene 4 y 120; pero efectuando el mismo razonamiento recursivo se tiene 2 y 240 semillas, hasta finalmente lograr representar el 1 con 480 semillas, pero para mayor seguridad le agrego 15 semillas más, así que la cantidad total de semillas que debo llevar es de 495".

Esta forma de resolver empíricamente encierra un proceso de Proporcionalidad Inversa, ya que se manifiestan dos conceptos (relación dual) reiteradamente que son "mitad" y "doble" respectivamente. Es decir, el $\frac{1}{2}$ y 2 serán números recíprocos con respecto de la unidad.

Actualmente, esta situación planteada queda resuelta de inmediato usando la multiplicación 33 x 15 = 495. Pero se trata de rescatar las cualidades de razonamiento autónomos que se presentan en la vida diaria y que se puedan desarrollar en forma independiente de otros contenidos. Así, la interpretación aritmética que representa la situación antes descrita es:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Primer nivel | 33 y 15 | | |
| Segundo nivel | 16 y 30 | anulado | |
| Tercer nivel | 8 y 60 | anulado | + |
| Cuarto nivel | 4 y 120 | anulado | = 495 |
| Quinto nivel | 2 y 240 | anulado | |
| Sexto nivel | 1 y 480 | | |

Las instrucciones para llegar al total son simples:

- Se anulan o eliminan todos los niveles donde aparecen "mitades" ó Nº par de la primera columna.
- Los otros niveles que quedan representados por impares, se suman los "dobles" ó $N^{os}$ de la segunda columna.

Una práctica ancestral. Este proceso tiene sustento en la génesis del pensamiento matemático en el siglo XX A. C. en Babilonia y Egipto. En los papiros de esa época aparecen "tablas de los recíprocos" con números regulares sexagesimales que se aprovechaban también para la división, como se fundamenta de acuerdo a la historia (Katz, 1998). Profundizando el análisis aritmético en los niveles "anulados" se puede establecer la siguiente relación algebraica:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2º nivel | 16 y 30 | , entonces | $16 \cdot 30 = 480$ | El resultado |
| $3^{ER}$ nivel | 8 y 60 | " | $8 \cdot 60 = 480$ | es una |
| 4º nivel | 4 y 120 | " | $4 \cdot 120 = 480$ | constante |
| 5º nivel | 2 y 240 | " | $2 \cdot 240 = 480$ | (k) |

Esto permite identificar, según esta práctica originaria en matemática, un modo de operar "inverso" que combina a la multiplicación tradicional con la preservación de una constante (k).

Ampliando este modo de operar o mejor dicho, transfiriéndolo al decir de la matemática contemporánea, se puede decir que dos variables o magnitudes se comportan inversamente, si los productos sucesivos por nivel se mantienen constantes. Además, es posible afirmar el sentido contrario, que si dos variables o magnitudes son inversas, entonces el producto entre ellas por nivel es constante. Esto es posible ampliarlo más allá de los números naturales y establecer la igualdad en los números reales,
$m \cdot n = k$ (constante).

Recientemente se afirma en el libro Where mathematics comes from (2001): "*que incluso un cuerpo de conocimientos tan abstracto, objetivo, preciso, efectivo, y que aparentemente transciende a la naturaleza humana, como son las matemáticas, resulta ser un producto originado por la complejidad de nuestra unidad mente-cuerpo*" (…) "*Lo esencial es que en la base de las ideas y de la construcción conceptual se encuentra las experiencias corporales, tales como experiencias térmicas ("ella es una persona fría"), dinámicas ("el dólar subió varios puntos"), kinestésicas ("me llenó la cabeza con ideas estúpidas"), olfativas ("esta situación me huele mal"), etc. Todo sistema conceptual, incluso los más abstractos, como aquellos que constituyen las matemáticas, se crean y se realizan gracias a mecanismos cognitivos elementales, entre ellos las metáforas conceptuales*" (Núñez y Lakoff, 2000).

Desde esta perspectiva, "corporalizamos" el modo de operar de la proporcionalidad inversa: buscar la manera de interpretar las cualidades propias de "dimensiones o variables" que se relacionan de forma polar, aceptándose y reconociéndose mutuamente, de acuerdo a un mismo referente, con comportamientos "inversos" en el dinamismo que se desea describir. Es decir, no se busca la aparición de una tercera dimensión o variable distinta como resultado, sino cambios de comportamientos que tienen lugar al interior de esta dualidad. Sería el tipo de "corporalidad" implícita en culturas de épocas remotas expresadas en las "tablas de los recíprocos" babilónicas con sistema numérico de base 60. Sería plausible conjeturar entonces la posibilidad de dar significatividad - a la luz de estos hallazgos - de "manera natural" a un encuentro del concepto de "inverso" con el significado cultural de "reciprocidad" en las representaciones estudiantiles. No sería entonces un modo de operar "inverso" de otro modo de operar - de una "proporción directa" como se plantea desde la perspectiva formalista de la matemática - sino que más bien se refiere a un modo de operar con un sentido en sí mismo, el que tiene que ver con un modo de pensar asociado a la cualidad de la "reciprocidad".

Articulando una concepción de Pensamiento Variacional Recíproco, PVR. Tendiente a favorecer aprendizajes en estudiantes que hoy entendemos deben lograrse sobre la base, y desde de la *complejidad de nuestra unidad mente-cuerpo.* En suma se propone entender por PVR:

> "Esquemas enactados que ponen en acción los estudiantes, a propósito de estudiar situaciones de covariación, que tienen el desafío de un producto constante"

donde se entiende por "esquemas enactados" a las representaciones personales - en el sentido señalado por Bourgeois (Díaz, 2003), las cuales se elaboran parcialmente sobre la base de representaciones sociales, vehiculadas por el grupo de pertenencia y/o referencia de cada estudiante - que trae a la mano el estudiantado al abordar la actividad escolar en una temática particular. Estas representaciones comprenden dos tipos de estructuras cognitivas, a saber: Esquemas Operatorios y Representaciones Proposicionales, aludiendo la primera a un modo de operar y teniendo la segunda dos componentes, la cognitiva propiamente tal y la normativa. Por su parte se entiende por "situaciones de covariación" en el dominio de la didáctica matemática, aquellas situaciones en que hay una variación conjunta de dos cantidades, cantidades que responden a una relación "polar" entre ellas. A su vez, el desafío de un "producto constante" refiere a un desplazamiento cognitivo coherente, sobre la base de asociar invariantes, cualidades a preservar en el dominio de saberes ecológicos y cantidades constantes en el dominio de una variación proporcional reciproca.

**A modo de conclusión**

La temática de la Proporcionalidad Inversa muestra carencias de entendimientos en las producciones estudiantiles, producciones que se remiten al registro algebraico y un sinnúmero de dudas del sentido de las mismas. Lejos queda la aspiración por un estudiantado "constructor de su propio conocimiento" de los Proyectos Educativos Institucionales. Este estudio se planteó iluminar prácticas pedagógicas favorecedoras de operatorias razonadas entre los alumnos. Se dirige a determinar y comprender algunos elementos relevantes y propios de una situación de aprendizaje en aula que apunte a superar la mecánica algebraica al abordar los contenidos de proporcionalidad inversa. En su primera fase se pesquisó en la génesis de estos modos de operar en la historia. Sobre la base del análisis de tablas babilónicas, el modo de reflexionar la proporción entre surcos y semillas del campesino de la edad media y el desastre ecológico de la sobre-explotación del sembradío actual, por una parte, y, por la otra, de los avances en el campo del lenguaje y las neurociencias para entender los procesos de construcción de saberes, se relevan las nociones de las metáforas corporales y las metáforas conceptuales como herramientas principales para resignificar la enseñanza de la proporcionalidad inversa en las prácticas docentes, en el marco socio-epistemológico de la investigación para contribuir a una propuesta que permita avanzar en las representaciones estudiantiles en el contexto del Pensamiento Variacional.

**Bibliografía**

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática* Ed. Alianza. Madrid

Cantoral, R. Y Farfán, R (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon, Num 42.*

Cantoral, R et al. (2000). *Desarrollo del pensamiento Matemático*. Ed Trillas México.

Cantoral y Reséndiz (2003). El papel de la variación en las explicaciones del profesor: un estudio en situación escolar. *Revista Relime* Vol.6 (pp. 133 – 154) México.

Cofré, A. y Russell, A. (2002) *Educ. Matemática 7º año básico* Ed. Mc Graw Hill. Chile

Cofré, Cortés y González (2002)*Matemática activa* Ed. Mare Nostrum. Chile

Díaz, L. (1999). Concepciones del Aprendizaje del Concepto de Límite. Un estudio de casos. Tesis Doctoral, P. U. C. Santiago de Chile.

Díaz, Leonora (2003) *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*. Dirección de Investigaciones, UMCE 2002-2003. y proyecto Fondecyt 2003-2005. Chile

Flavell, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition, *en Weinert y Kluwe. Metacognition, motivation and understanding*, 21 – 29, Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum.

Fischer, J. (2002). *Prácticas Docentes Universitarias*. Ed. Universidad del Biobío, Chile.

Kast, Víctor (1998) *A History of Mathematics* Ed. Addison Wesley. USA

Núñez y Lakoff (2000) *Where Mathematics Comes From.* Ed. Basic Books. New York.

Soto, Isabel (1994) *Enseñanza de las Matemáticas: Algunos problemas y Desafíos* Ed. CIDE Stgo.-Chile