¿A.B=0 $\Rightarrow$ A=0 $\vee$ B=0? REFLEXIONES E IMPLICACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Cristina Ochoviet
Liceo "Juan Zorrilla de San Martín", Uruguay
princesa@adinet.com.uy

Resumen
Se reporta una investigación sobre pensamiento algebraico realizada con estudiantes de Uruguay de 3er. del Ciclo Básico de enseñanza secundaria, 3er. de Bachillerato y 3er. año de Profesorado de Matemática, en torno a la propiedad que da título a este trabajo.
Se situó la atención principalmente en tres puntos: qué estrategias usan los estudiantes para resolver ecuaciones del tipo *(ax+b)(cx+d)=0*; en un error que aparece con frecuencia al verificar las raíces de las ecuaciones antes mencionadas que consiste en la sustitución simultánea de la variable por dos valores distintos; y si los estudiantes generalizan esta propiedad a estructuras donde no es válida aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto.

Breve reseña sobre los estudios exploratorios realizados
De acuerdo a los estudios exploratorios que realizamos con alumnos de enseñanza secundaria[1] y terciaria[2], pudimos apreciar que existe una marcada tendencia a generalizar la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde esta propiedad no es siempre válida.

Propiedad Hankeliana

Esta tendencia puede apreciarse aún cuando los alumnos hayan recibido instrucción específica al respecto. Los alumnos aplican esta propiedad a diferentes situaciones problemáticas, sin mediar un análisis de la situación, sin reflexionar que las propiedades no son siempre válidas, que están relativizadas a un contexto. Por ejemplo, se le presentó a los estudiantes la siguiente actividad:
D y B son dos matrices. Se sabe que D.B=O, es decir que el producto de ambas matrices es la matriz nula. ¿Qué puedes deducir sobre las matrices D y B a partir de esta información?
Muchos estudiantes contestaron que *D* o *B* eran la matriz nula, aun cuando en sus cursos de álgebra habían observado que esto no era cierto.

[1] En Uruguay la Enseñanza Primaria abarca seis años de instrucción y la Secundaria otros seis que se dividen en dos ciclos. El primer ciclo tiene una duración de tres años (1º, 2º, 3º) y se denomina Ciclo Básico (alumnos de 12 a 14 años aproximadamente). El segundo ciclo, también de tres años (1º, 2º, 3º), se llama Bachillerato Diversificado (alumnos de 15 a 17 años aproximadamente).
[2] Los alumnos de nivel terciario estaban cursando tercer año de profesorado de matemática. Esta carrera se cursa en el Instituto de Profesores Artigas y tiene una duración de cuatro años.

También hemos detectado que muchos alumnos no la aplican en el contexto de la resolución de ecuaciones, aún cuando sea la única herramienta disponible y hayan recibido instrucción sobre su aplicación a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero[3]. También hemos observado un tipo de error que cometen algunos estudiantes al momento de verificar las raíces de una ecuación dada en esta forma y nos cuestionamos si es consecuencia directa de la aplicación de esta propiedad. Este error consiste en realizar una sola verificación, usando simultáneamente las dos raíces que se han encontrado. Con esto queremos decir que, dada la ecuación *(ax+b)(cx+d)=0* con dos raíces distintas, en lugar de realizar dos verificaciones, una para cada raíz, es frecuente que el alumno sustituya la *x* presente en el primer factor, por la raíz que obtuvo al resolver *ax+b=0* y en el segundo factor, sustituya la *x* por la raíz que obtuvo al resolver *cx+d=0*. En este procedimiento el alumno está asignando a *x* dos valores distintos a la vez.
Por ejemplo, los estudiantes resolvieron la ecuación *(2x-6)(5x+10)=0* y encontraron las raíces 3 y -2. Podemos observar en la parte izquierda del siguiente cuadro cómo hicieron la verificación gran parte de ellos y a la derecha lo que en realidad deberían haber hecho:

3 y –2 son las raíces de la ecuación (2.**3**-6) (5(**-2**)+10)=0	**VS**	*3 y –2 son las raíces de la ecuación* (2.**3**-6)(5.**3**+10)=0 y (2.(**-2**)-6)(5(**-2**)+10)=0

Preguntas de investigación
Las preguntas que surgen a partir de los estudios exploratorios realizados son muchas, pero en la presente investigación nos concentramos principalmente en los siguientes tres puntos y haremos más tarde mención a ellos de acuerdo a la numeración que les asignamos a continuación:

1. Observaremos las estrategias que utilizan los estudiantes que conocen la propiedad Hankeliana de los números reales cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero
2. Examinaremos el error que cometen los estudiantes cuando sustituyen a la incógnita por dos valores distintos en forma simultánea, al verificar las raíces en una ecuación polinómica que está dada en forma factorizada e igualada a cero y formularemos posibles explicaciones del mismo
3. Buscaremos elementos para destacar en relación a los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto.

[3] Nos referimos concretamente a ecuaciones de la forma *(ax+b)(cx+d)=0* con *a* y *c* diferentes de cero y con dos raíces **distintas**.

Los estudiantes con los que trabajamos

La investigación se realizó con estudiantes de tres niveles:- 3er. año de Ciclo Básico de enseñanza secundaria. Último año de bachillerato. 3er. año de profesorado de matemática

Para conocer las diferencias en cuanto a las estrategias de resolución elegidas
Para observar la aparición del error, en relación al nivel de los estudiantes.
Para ver la versatilidad de pensamiento según el nivel que cursaban, ante evidencias de que la propiedad no era válida en determinadas situaciones.

- Para observar la evolución del universo de representaciones para a y b en a.b=0, cuando no se especifica qué representan *a* y *b*.

Consideraciones teóricas

Para formular posibles explicaciones a los fenómenos en los que nos hemos centrado tuvimos en cuenta diversos marcos teóricos: la noción de *Imagen conceptual* presentada en (Vinner, 1991), el concepto de *compartimentalización* (Vinner, 1990), la *Teoría de la Intuición* (Fischbein, 1987) y la noción de *Autonomía de los modelos mentales* presentada en (Fischbein, Tirosh, Stavy & Oster, 1990). Como marco téorico específico del pensamiento algebraico usamos el *modelo 3 UV* presentado por Trigueros y Ursini (Por aparecer).

Vinner (1991) modela la estructura cognitiva de un individuo asumiendo la existencia de dos celdas. Una celda es para la definición y la otra para la imagen conceptual. Una o las dos pueden estar vacías. La celda de la imagen conceptual se considera vacía hasta que algún significado se asocie al nombre del concepto.

Cuando introducimos un concepto por primera vez a través de su definición, la celda de la imagen conceptual está vacía en un principio, pero luego de varios ejemplos y explicaciones se va llenando. No necesariamente refleja todos los aspectos de la definición del concepto. Por ejemplo, la *imagen conceptual* podría contener la información de que si *a.b=0* entonces *a=0* o *b=0*, pero no contener la información de lo que representan *a* y *b*. Esto permitiría explicar la generalización que los estudiantes realizan de esta propiedad a estructuras donde no es válida. Con esto queremos decir que los estudiantes recuerdan la propiedad como regla y pierden de vista qué objetos matemáticos representan *a* y *b*. Con esto dan validez universal a la propiedad y cometen errores.

También podría ocurrir que la imagen conceptual de los estudiantes tuviera solamente la regla pero no aplicaciones de ella, como ser la resolución de ecuaciones factorizadas e igualadas a cero.

¿Pero cómo podríamos explicar el hecho de que el alumno aun teniendo conocimiento de la propiedad Hankeliana no la aplica a la resolución de ecuaciones, no solo cuando es la herramienta más adecuada, sino también, cuando es la única herramienta disponible?

Para explicar este fenómeno usaremos el concepto de *compartimentalización* que presenta Vinner (1990):

"By "compartmentalization", I refer to situations in which two pieces of knowlodge (or information) that are known to an individual and that should be connected in the person´s thought processes nevertheless remain unrelated". (Vinner, 1990)

Se habla de *compartimentalización* cuando esperamos que cierto detalle específico sea evocado en la mente de cierta persona, porque ese detalle es relevante en lo que la persona está pensando, pero resulta que éste no es evocado.
En el caso que estamos estudiando, de alguna manera, el conocimiento (la propiedad) está en algún lugar de la mente pero lo que no siempre se produce es una evocación del mismo para poder aplicarlo. Muchos alumnos conocen la propiedad pero no todos la aplican, aun cuando sea la herramienta óptima. Parecería que la ecuación factorizada e igualada a cero no constituye un estímulo suficiente que les permita evocarla. Entonces no se produce una asociación que se supone debería realizarse y el alumno no obtiene éxito en la actividad que enfrenta, ya sea porque no relaciona el contexto de las ecuaciones con la propiedad y ésta es la única herramienta disponible o porque usa otras herramientas más costosas a nivel de la operatoria involucrada y comete errores.
Vinner (1990) nos habla de que los estudiantes pueden tener ideas inconsistentes. Una persona difícilmente pueda decir que p y *no* p pueden verificarse simultáneamente, sin embargo, hay situaciones que pueden derivar contradicciones.
Pudiera ser que en cierto momento t_1 un estudiante creyera en la validez de cierta proposición p y en otro momento diferente t_2, creyera en la validez de *no* p, sin darse cuenta de que en t_1 pensó que p era verdadera. Este autor señala que esta situación puede verse como un caso especial de *compartimentalización*. También puede suceder que un estudiante tenga ideas inconsistentes, pero una idea no sea la negación de la otra, con esto queremos decir que un estudiante podría tener las ideas p y q y que de ellas se derivaran ideas como r y *no* r.
Ejemplifiquemos esta situación tomando el caso del error en la verificación que hemos observado. Se le pide a un alumno resolver y verificar la ecuación $(x-5)(x-6)=0$. Supongamos que calcula las raíces 5 y 6, y realiza el siguiente planteo (incorrecto) como verificación de las mismas:

$$(\mathbf{5}-5)(\mathbf{6}-6)=0$$
$$0 \,.\, 0 = 0$$

Obsérvese que el estudiante está implícitamente aceptando que $x \neq x$, ya que para él, simultáneamente, una x vale 5 y la otra vale 6. Pero no es el estudiante el que se da cuenta de este error lógico sino que seguramente sea su docente, que bien sabe que x es igual a x. Por otra parte, si al estudiante se le preguntara si $x=x$, es bastante seguro que conteste que sí. Con esto queremos decir que, el estudiante no puede percibir la contradicción en el planteo que hace, aun cuando de alguna manera sabe que x debe ser igual a x. Posiblemente, lo que no hace el estudiante es la conexión. No se da cuenta que sustituir dos valores distintos equivale a utilizar dos diferentes x en la misma situación. Pero aún así, no tenemos la certeza si de evocarse estos dos comportamientos el alumno se daría cuenta de su error.
Según Trigueros y Ursini (Por aparecer):
"The development of algebraic language and its use for different purposes requires the development of the concept of variable as a single multifaceted concept that includes different aspects".

Desde su punto de vista, la enseñanza debería hacer énfasis en la distinción entre los diferentes usos de la variable con el objetivo de que los estudiantes pudieran integrarlos en una única entidad conceptual: la variable. Reconocen diferentes usos de la variable que están relacionados a diferentes concepciones del álgebra, por ejemplo, aritmética generalizada, resolución de problemas, estudio de relaciones y funciones, estudio de estructuras. Estas diferentes concepciones del álgebra y los diferentes usos de la variable aparecen comúnmente mezclados en la enseñanza del álgebra escolar. Parecería que las prácticas docentes no hacen énfasis en la distinción entre cada uno de los usos y por tanto se hace difícil para los estudiantes diferenciarlos. Trigueros y Ursini señalan que en la enseñanza del álgebra elemental, los aspectos más usados del concepto de variable son: como una incógnita, como un número genérico, y como variables en una relacional funcional.

Algunos resultados en relación a las preguntas de investigación

1. Se ha observado que aun cuando los estudiantes sepan que si $a.b=0$ entonces $a=0$ o $b=0$, siendo a y b números reales, no todos lo aplican a la resolución de una ecuación polinómica de segundo grado, factorizada e igualada a cero, aun cuando este procedimiento sea el más económico para aplicar en esta situación y en muchos casos el único disponible. Los estudiantes aplican otras técnicas más costosas al nivel de la algoritmia implicada, como la fórmula cuadrática, y cometen errores. Por ejemplo, para resolver $(x-5)(x-6)=0$, desarrollan obteniendo $x^2-11x+30=0$ y aplican la fórmula cuadrática: $x=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4.1.30}}{2.1}$ deduciendo las raíces 5 y 6. Nos preguntamos por qué conociendo la propiedad antedicha no plantean directamente $x-5=0$ o $x-6=0$, obteniendo las raíces 5 y 6.

Algunos estudiantes creen que los docentes les requieren procedimientos complejos para resolver las situaciones, o por lo menos, procedimientos de alto costo algorítmico. Los estudiantes de bachillerato todavía no poseen la autonomía suficiente como para valorar qué es lo más económico, en muchos casos "les da igual" uno u otro procedimiento. Los de nivel terciario aplican la propiedad en su inmensa mayoría, argumentando, en este nivel sí, razones de economía.

También hemos observado que los estudiantes tienen dificultades para interpretar en $(x-5)$ y $(x-6)$ números reales, razón por la cual, la propiedad tampoco es evocada y los estudiantes terminan aplicando la fórmula cuadrática.

2. Observamos que algunos estudiantes, al momento de verificar las raíces de una ecuación como por ejemplo $(x-5)(x-6)=0$, cometen un error que fue observado en todos los niveles (medio, bachillerato, terciario). Como ya explicamos, este error consiste en la sustitución simultánea de la x por valores diferentes. Esto es $(\mathbf{5}-5)(\mathbf{6}-6)=0$, haciendo una sola verificación y no dos, una para cada valor de x hallado. Como la ecuación igual "verifica" ya que 0.0=0, los alumnos no se dan cuenta del error.

Parecería que se trata de un error lógico. Los estudiantes creen que como la ecuación tiene dos raíces, deben estar "ambas presentes" al momento de verificar. El conflicto estaría en que las raíces son 5 **y** 6 pero en la expresión algebraica $x=5$ **o** $x=6$. Los alumnos parecerían no comprender la lógica de la expresión algebraica donde la variable *x* admite "un valor a la vez". Por otra parte, si bien los alumnos explicitan que alcanza con que uno de las factores sea cero para que el producto sea nulo, existe una fuerte tendencia a creer que ambos factores deben ser cero. Esto pudo evidenciarse cuando se sustituyó la incógnita, por papelitos que tapaban números:

Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? $(\square -5)(\square -6)=0$

Observamos que existe una fuerte tendencia a creer que detrás de los papelitos están los números 5 y 6, respectivamente. Podría estar sucediendo que esta creencia fuera luego llevada al contexto de resolución de ecuaciones, provocando errores.

3. Parecería que algunos estudiantes generalizan la propiedad: A.B=0 entonces A=0 o B=0, válida en los anillos que no admiten divisores de cero, a diferentes contextos donde no es válida. Entre ellos el producto de matrices o el producto de funciones de dominio real. Esto se observó aun cuando los estudiantes habían recibido instrucción específica al respecto.

No poseemos evidencias aún, pero hemos formulado la hipótesis de que las respuestas de los estudiantes podrían estar respondiendo a la aplicación de un modelo mental que preserva las características sintácticas de la propiedad sin atender a la semántica de los objetos matemáticos involucrados.

Posible prototipo

$\cong \times \leq = \mathbf{0} \Rightarrow \cong = \mathbf{0}$ **o** $\leq = \mathbf{0}$

Bibliografía

English, L. & Halford, G. (1995). *Mathematics Education. Models and Processes*. Mahwah, New jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Dortretch: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. Tirosh, D., Stavy, R. & Oster, A.(1990). *The Autonomy of Mental Models*. For the Learning of Mathematics, 10, 23-30.

Trigueros, M. & Ursini, S. (Por aparecer). "Starting college students' difficulties in *working with different uses of variable"*. En Research in Undergraduate Mathematics Education. American Mathematical Society. Vol. 5

Vinner, Sh. (1990). *Inconsistencies: Their Causes and Function in Learning Mathematics*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 12 (3 & 4), 85-98.

Vinner, Sh (1991). *The role of definitions in teaching and learning*. En Tall, D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer. Dordretch/Boston/London Pp. 65-81.