Matemática y Física Cuántica

Cristina Ben
Buenos Aires. Argentina
bencristina@hotmail.com

Resumen
Dar a conocer nociones básicas de física cuántica en el último año de la enseñanza media puede ser una experiencia enriquecedora que nos permite cerrar y relacionar temas de matemática que es bueno darles un toque final para que queden bien asimilados. Este trabajo toma como eje a la física cuántica y desde sus nociones básicas, va tomando temas de matemática. Es un tema que se debe introducir como divulgación científica y que es importante darlo porque la física moderna ha salido de la concepción mecanicista y tiene un enfoque de la realidad que es distinto al empleado hasta ahora.
Este trabajo permite observar el nivel de abstracción que han alcanzado los alumnos al finalizar la enseñanza media y les otorga a los más curiosos la oportunidad de profundizar e investigar.

Introducción

La física es una ciencia altamente matematizada cuyas teorías una vez construidas pueden resumirse en un conjunto de axiomas matemáticos. Entonces, ¿porqué no utilizarla para desarrollar algunos temas difíciles de matemática?. La física cuántica es esencialmente probabilística y estadística, en sus conceptos fundamentales están implícitos temas de matemática que encuentran en esta ciencia una aplicación real que permite cerrar temas y afianzar conceptos importantes en nuestra área. Propongo trabajar este tema al finalizar 5° año, presentándolo como divulgación científica, con la intención de explorar temas que cada día tienen más vigencia y la meta de presentar conceptos básicos e impulsar a los más curiosos para que investiguen y profundicen.
Además, nos permite abordar temas como fractales y geometrías no euclidianas donde podemos inspeccionar qué nivel de abstracción han alcanzado nuestros alumnos en 5° año y empezar a ver que debemos modificar si no nos satisface lo que observamos.
Creo que en la enseñanza media presentamos la geometría de un modo inconcluso, damos toda la importancia a la geometría euclidiana y no nos queda tiempo para más, pero un alumno de 5° año debe tener nociones que le permitan formarse una idea más completa de la geometría. En realidad, debe preguntarse qué es la geometría y lograr responderse.
Considero importante no pretender que nuestros alumnos dominen un tema tan vasto y complejo y aprovechar la ocasión para cerrar y fijar conceptos como consistencia, iteración y dimensión y repasar y ampliar temas trabajados como probabilidad y estadística, números complejos y análisis matemático.

Desarrollo

La materia tiene una estructura granular, está compuesta de partículas elementales, de cuantos elementales de materia, también poseen estructura granular la carga eléctrica y la energía. Si consideramos la estructura infinitamente granular de la materia que plantea la teoría atómica, la posibilidad de aplicar a la realidad el concepto matemático riguroso de continuidad sufre un revés. Pero hay un límite, una unidad fundamental de medida, no hay nada más pequeño y es la llamada constante de Planck.

Erwin Schrödinger y Werner Heisenberg escribieron las ecuaciones que rigen la teoría cuántica. El principio de incertidumbre de Heisenberg expresa las limitaciones de nuestros conceptos clásicos de una forma matemática y precisa pues establece que en el mundo subatómico, no se puede saber el curso de una partícula. Nunca podemos saber con precisión ni la posición ni el momento de una partícula.
El teorema de Gödel afirma que en toda axiomática no contradictoria que contenga la teoría de números hay enunciados verdaderos aunque indemostrables, la física cuántica contiene tales enunciados.
La física de los cuantos posee leyes que rigen multitudes y no individuos, no describe propiedades, sino probabilidades y resume tres elementos: probabilidad, onda y partícula en un solo objeto teórico: la función de onda, que tiene un valor determinado en todo punto del espacio y en todo instante de tiempo. Las funciones de onda (también llamadas ondas de probabilidad) son cantidades matemáticas abstractas (si los alumnos han construido algunas funciones de probabilidad, pueden llegar a captar la idea de función de onda).
La onda de probabilidad no nos da la posición y la velocidad de un electrón en un instante pero nos da la probabilidad de encontrar un electrón en un lugar del espacio o nos indica dónde existe la máxima probabilidad de encontrarlo. La teoría de los cuantos creó nuevas y esenciales características de la realidad. La discontinuidad reemplazó a la continuidad, en lugar de leyes que valgan para los casos individuales, aparecieron leyes de probabilidad.
Desde Newton se utiliza el método diferencial para expresar los fenómenos físicos con ecuaciones: se descompone un objeto complejo en sus partes más simples. Esta simplicidad permite una descripción local, diferencial, que, tras la integración, aporta las propiedades globales de un objeto. Este método pierde toda su eficacia si las partes, en vez de más simples, son diferentes o más complejas que el objeto del que se ha partido. Esto es lo que pasa en la física de las partículas, donde las trayectorias de las partículas no son diferenciables, pues no tienen una pendiente (o velocidad) bien diferenciada en todas partes. Se nos presenta ahora la oportunidad de revisar lo que hemos trabajado de análisis matemático para fijar el concepto de diferencial. Aunque las funciones diferenciables son las más simples y más fáciles de manejar, son una excepción. Hablando en términos geométricos, lo normal son las curvas sin tangente, mientras que las curvas regulares son casos interesantes pero muy particulares. Para explicitar el tema podemos estudiar algunas curvas no diferenciables y reconstruirlas mediante aproximaciones sucesivas.

La ecuación de Schrödinger parece establecer que el comportamiento cuántico es la manifestación del carácter no diferenciable y fractal del espacio-tiempo.
Pero ¿qué es el espacio-tiempo? Supongamos que hubiese un espacio de naturaleza tal, que se necesitara cuatro números, o cinco, o dieciocho, para localizar un punto fijo el él. Sería un espacio cuadridimensional, o de cinco dimensiones, o de dieciocho dimensiones respectivamente. Tales espacios no existen en el universo ordinario, pero los matemáticos sí pueden concebir estos “hiperespacios” y calcular qué propiedades tendrían las correspondientes figuras matemáticas, e incluso llegan a calcular las propiedades que cumplirían para cualquier espacio dimensional: lo que se llama “geometría n-dimensional”.
Pero si lo que estamos manejando son puntos, no fijos, sino variables en el tiempo, por ejemplo, si queremos localizar la posición de un mosquito que está volando en una habitación, tendremos que dar los tres números que ya conocemos pero luego tendríamos que añadir un cuarto número que represente el tiempo, porque el mosquito habrá ocupado esa posición espacial sólo durante un instante y ese instante hay que identificarlo. Lo

mismo vale para todo cuanto hay en el universo. Tenemos el espacio, que es tridimensional, y hay que añadir el tiempo para obtener un “espacio-tiempo cuadridimensional”, por lo tanto, el tiempo es una cuarta dimensión diferente de las otras tres. Pero, ¿qué significa dimensión?
La palabra viene de un término latino que significa medir completamente. En la geometría clásica un segmento tiene dimensión 1, un círculo tiene dimensión 2, una esfera tiene dimensión 3.

¿Nuestros alumnos, se acordarán de los logaritmos?

Dimensión= log(n° de pedazos/log(aumento)
Segmento d= log(n)/log(n)=1
Cuadrado d=log(n^2)/log (n)=2
Cubo d=log(n^3)/log(n)=3

¿Qué dimensión tiene un punto?
En la física de Newton, todos los fenómenos físicos se reducen al movimiento de cuerpos materiales en el espacio, movimiento que es originado por su mutua atracción, para fundamentar su teoría Newton tuvo que inventar técnicas y conceptos matemáticos completamente nuevos: el cálculo diferencial, ello supuso un logro intelectual tremendo y fue elogiado por Einstein como quizá *“el mayor avance en el pensamiento que jamás un solo individuo haya tenido el privilegio de hacer”.*
Las tres primeras décadas de nuestro siglo cambiaron radicalmente todo el panorama de la física. La teoría de la relatividad fue construida casi en su totalidad por Einstein, en cambio la teoría cuántica fue elaborada por todo un equipo de físicos (Böhr, de Broglie, Schrödinger, Pauli, Heisemberg y Dirac).
La física de Einstein es perceptible a grandes velocidades, tales velocidades han sido observadas en las partículas subatómicas.
El espacio en los campos gravitacionales más fuertes que el de la tierra tiene una estructura que difiere de la estructura de la geometría de Euclides, pero en campos gravitacionales débiles las diferencias son poco perceptiles o imperceptibles, entonces, a diferencia de las conclusiones que durante 2000 años la matemática y la física habían establecido, el espacio matemático correspondiente a la realidad física es de naturaleza no euclideana.

Espacio geométrico euclideano	Física de Newton
Espacio geométrico no euclideano	Física de Einstein

Las cuatro fuerzas básicas de la naturaleza son la nuclear débil, la nuclear fuerte, la electromagnética y la gravitatoria.

Gravitación

Teoría de Newton	Teoría de Einstein
Describe como funciona	Explica porqué existe
Espacio-tiempo plano(Euclideano)	Espacio-tiempo curvo (No euclideano)
Campo gravitatorio débil	Campos gravitatorios más fuertes.

Podemos dar algunos ejemplos de geometrías no euclideanas apuntando a que nuestros alumnos construyan el concepto de consistencia (por ejemplo la de Riemann se puede trabajar con esferas de telgopor) hay que destacar que los distintos sistemas no hablan de lo mismo (cuando dicen recta, plano, etc.) no se está hablando acerca del mismo ente porque los postulados en los distintos sistemas son distintos, por lo tanto, definen entidades distintas, pero cada uno de los sistemas internamente es consistente.

Retomando la ecuación de Schrödinger, que establece que el comportamiento cuántico es la manifestación del carácter no diferenciable y fractal del espacio-tiempo, queda por presentar la geometría fractal. Las trayectorias de las partículas cuánticas son curvas fractales.

La palabra fractal significa fracturado, roto. El fractal es, matemáticamente, una figura geométrica que es compleja y detallada en estructura a cualquier nivel de magnificación. No tiene dimensión 1, 2 o 3 como la mayoría de los objetos a los que estamos acostumbrados, tienen una dimensión que no es entera, pueden tener una dimensión menor que 2 (pues no llenan toda la porción del plano).

Los fractales se generan por iteración, que es repetir el mismo proceso infinidad de veces.

por ejemplo: Si sobre cada lado de un semihexágono regular se construye otro semejante con razón ½ y en posición alternada , iterando lo operación sucesivamente se obtiene un fractal de dimensión $s= \log 3/\log 2= 1{,}5849...$ o en vez de expresar las transformaciones del plano real en sí mismo es más práctico introducir los números complejos $Z= x + iy$ (x, y reales) y estudiar las transformaciones de la forma $Z = f(Z)$ siendo $f(Z)$ una función de la variable compleja. De esta forma una expresión matemática tan inocua como una ecuación cuadrática $Z= Z^2 + c$, iterada en el plano complejo, muestra tal complejidad, que aparecen formas conectadas o fragmentadas variando c.

$Z = Z^2 + c$ c es un a constante

Para iterar $Z^2 + c$ comenzamos con una “semilla”, esto es, un número (real o complejo) que representamos por Z_0.

$Z_1 = Z_0 + c$ c es una constante

Ahora, iteraremos usando el resultado del cálculo anterior.

$Z_2 = Z_1 + c$

$Z_3 = Z_2 + c$

$Z_4 = Z_3 + c$

$Z_5 = Z_4 + c$

Y así sucesivamente. La lista de números Z_1, Z_2, Z_3, Z_4,... generada por ésta iteración se denomina “órbita de Z_0 bajo la iteración de $Z^2 + c$.

Ejemplos

c=1 y $Z_0=0$	c= 2i y $Z_0=0$
$Z_1 = 0^2 + 1 = 1$	$Z_1= 2i$
$Z_2 = 1^2 + 1 = 2$	$Z_2= (2i)^2 + 2i = 4 + 2i$
$Z_3 = 2^2 + 1 = 5$	$Z_3= (4 + 2i)^2+2i=12 - 14i$
$Z_4 = 5^2 + 1 = 26$	$Z_4=(12-14i)^2+2i=52-334i$
Z_5 = número grande	Z_5= grande
Esta órbita tiende a infinito.	Ésta órbita tiende a infinito en el plano complejo.

La iteración de funciones de esta forma fue objeto de estudio de los matemáticos franceses G. Juliá y P. Fatou aproximadamente en 1920 pero como no disponían de computadoras no pudieron seguir avanzando en sus trabajos. Hacia 1980 Mandelbrot retomó el tema pues la computadora disparó las posibilidades de exploración. Según Mandelbrot la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo infinitesimal. Él afirma *"Yo no creé los fractales, sólo los descubrí"*.

Los fractales materializan el sueño de la ciencia: algo tan complicado se puede explicar con fórmulas simples. Es importante reconocer que los fractales verdaderos son una idealización, ninguna curva en el mundo real es un fractal verdadero. Todavía hay muchas propiedades que se sospechan pero aún no se han podido demostrar. El crecimiento en la naturaleza está vinculado a modelos fractales, se pueden encontrar formas fractales en hojas, montañas, costas, nubes, sistema circulatorio, etc.
Los objetos fractales aparecen en relación con dos circunstancias , una situación de frontera, donde entran en contacto dos medios o superficies (riberas de ríos, medios químicos, etc.) y la otra situación es la del árbol: árboles, tejidos arteriales, redes pulmonares, etc. En esta geometría los objetos se presentan muy irregulares y los sucesos poco o nada predecibles (La teoría del caos nació en 1960 y trata el comportamiento de sistemas no lineales).

Diferencias fundamentales entre la Geometría Euclideana y la Geometría Fractal

Euclídea	**Fractal**
Tradicional (más de 2000 años)	Moderna(aprox. 10 años)
Dimensión entera	Dimensión fractal
Trata objetos hechos por el hombre	Apropiada para formas naturales
Descripta por fórmulas	Algoritmo recursivo(iteración).

Otro aspecto interesante de la teoría cuántica, tal vez el más interesante y profundo, es el principio de complementariedad de Böhr. La frase de Böhr: *"Los opuestos son complementarios"* significa que partícula y onda son dos descripciones complementarias de la misma realidad, también introduce la visión de unidad como fundamento de las partes, cuando afirma que existen variables locales y no locales que pueden estar determinando el comportamiento de las partículas, el todo aporta un principio de racionalidad, disminuye el poder del azar e incorpora un principio de razón y vuelve inteligible la acción de componentes individuales aislados. En los experimentos modernos, las partículas resultan difícilmente aislables de la acción del observador, todo el proceso de preparación y medición de las partículas subraya la presencia del observador y resulta difícil distinguirlo de lo observado. Esta nueva visión de la realidad origina enormes consecuencias.

La física cuántica aporta una concepción distinta del universo, se acerca al misterio y se esfuerza por describirlo, partícula y onda, movimiento y reposo, existencia y no existencia son algunos de los conceptos opuestos y contradictorios que son trascendidos en la física moderna.

Finalmente, parece oportuno citar las siguientes palabras de Jean Guitton (filósofo), que sintetizan el cambio de paradigma que está provocando la nueva física: *"La ciencia rectora, la que nos hace penetrar en el interior de los secretos del cosmos, no es tanto la física como la matemática o la física matemática, considerando el orden matemático que se revela en el corazón de lo real, ese desconocido oculto detrás del cosmos es por lo menos una inteligencia hipermatemática, calculante y relacionante (fabricante de relaciones) de manera que debe ser de tipo abstracto y espiritual"*.

Conclusiones

Es un trabajo extenso pero integrador. Presenta dificultades, pero, también existe la posibilidad de abordarlo en conjunto con profesores de otras áreas: Física, Informática (fractales), Filosofía (desde el conocimiento) y el hecho de presentarlo a modo de divulgación permite que no tengamos que ser expertos en cada tema para transmitirlo al aula.

Una vez expuesto, se le puede pedir a los alumnos que formen grupos y preparen un trabajo práctico (profundizando e investigando) sobre uno de los temas que le haya interesado más: fractales (se puede trabajar también con el profesor de informática), geometrías no euclideanas (se puede trabajar con esferas de telgopor la geometría de Riemann), mecanicismo (es interesante para los que les gusta la historia), El principio de incertidumbre, la posición de Böhr y sus consecuencias filosóficas, qué es la geometría, etc.

Evaluar el tema de este modo puede ser más productivo y se puede preparar un cuestionario para evaluar cuánto han comprendido en general y poder presentarlo mejor el año siguiente.

No es un tema que figure en los programas pero su riqueza de contenido y posibilidades permite repasar y cerrar temas (continuidad, derivada, diferencial, probabilidad, números complejos y logaritmos) y además, nos permite medir el nivel de abstracción con que egresan nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

Einstein, Albert; Infeld, Leopold. (1939). *La física, aventura del pensamiento*. Buenos Aires: Editorial Losada.

Asimov, Isaac: *Preguntas básicas sobre ciencia*. Buenos Aires: Biblioteca Página doce.

Massuh, Víctor. *La flecha del tiempo*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Capra, Fritjof. *El tao de la física*. Editorial Sirio.

Mandelbrot, Benoit. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Editorial Tusquets.

Santaló, Luis. (1976). *Geometrías no Euclideanas*. Buenos Aires: EUDEBA.

Paulos, John. (1993). *Más allá de los números*. Barcelona: Editorial Tusquets.

Guitton, Jean. *Dios y la Ciencia*. Emecé.

Sagan, Carl. (1985). *Cosmos*. Barcelona: Editorial Planeta.

Nottale, Laurent. (1997). *El espacio tiempo fractal*. En Revista Investigación y Ciencia. Julio/97.

http://www.quanta.net.py/zfractal/iter.htm