Optimización matemática

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen
En este artículo se presenta una síntesis de un curso breve ofrecido en la RELME 15, que a su vez fue un compendio de diversas experiencias del autor en la enseñanza de temas de optimización matemática, no sólo como parte de los cursos de planes de estudios universitarios, sino también como parte de un conjunto de temas especialmente seleccionados para capacitar a profesores de matemáticas o para trabajar extracurricularmente con jóvenes motivados por las matemáticas. En todos los casos, se logró el objetivo principal de estimular una perspectiva intuitiva para resolver problemas, que es fundamental en el quehacer matemático pero que muchas veces no se desarrolla adecuadamente por presentar prematuramente formalizaciones y métodos específicos. Se presentan problemas con diversos enfoques para su solución, se construyen significados con base en formalismos, se hacen contextualizaciones y generalizaciones y se da una idea del cálculo de variaciones y de la teoría de control.

> *En la misma forma en que la deducción debe complementarse con la intuición, el proceso hacia la generalización progresiva debe templarse y equilibrarse con respeto y amor hacia los detalles particulares.(...). La esencia profunda de las matemáticas vivas es el juego recíproco entre lo general y lo particular, la deducción y la construcción, la lógica y la imaginación.*
>
> *Richard Courant*

Introducción

Optimizar es una actividad frecuente en diversas situaciones de la vida corriente: deseamos llegar a algún lugar en el menor tiempo posible; ir a cierto lugar por el camino más corto; comprar algo que más nos convenga; construir algo empleando la menor cantidad posible de material; obtener la máxima ganancia en un negocio, etc. Entonces, si tenemos en cuenta que los conceptos matemáticos están relacionados muy íntimamente con la experiencia humana, resulta natural considerar diversos problemas de optimización para reflexionar sobre el aprendizaje de las matemáticas, sobre la importancia y la oportunidad de la formalización en matemáticas, sobre la interrelación entre la percepción intuitiva y la solución formal de un problema y muchos otros aspectos vinculados con la matemática educativa.
Una de las aplicaciones más conocidas del cálculo diferencial es la obtención de máximos y mínimos de funciones; sin embargo existen muchos problemas que bien pueden resolverse sin recurrir al cálculo diferencial y ellos serán los primeros que tratemos, tanto porque los conocimientos matemáticos que se requieren son sólo los de la secundaria, cuanto porque su visualización y perspectiva intuitiva son muy adecuadas para iniciarse en problemas que requieren matemática universitaria y para reflexionar sobre la transición entre conceptos matemáticos elementales y conceptos matemáticos avanzados.

Optimización con funciones reales de variables reales

Si bien es cierto que se tiene una teoría matemática y métodos conocidos para resolver problemas de máximos y mínimos con funciones reales de una o de varias variables reales, es fundamental que el docente tenga una visión más amplia sobre las diversas maneras de tratar estos problemas, sobre todo utilizándolos para desarrollar las intuiciones de los estudiantes. Usando las clasificaciones de Fischbein, existen intuiciones de conjetura, de anticipación y de conclusión, muy vinculadas con la resolución de problemas, y también intuiciones secundarias, que son obtenidas por influencia del aprendizaje de conceptos y de razonamientos avanzados. Todas estas intuiciones pueden ser utilizadas, estimuladas y desarrolladas empleando problemas de optimización sin recurrir al camino usual de presentar muy pronto los recursos que nos ofrece el cálculo diferencial. Ciertamente es fundamental estudiar, comprender y manejar los conceptos y métodos del cálculo diferencial, pero todo esto se hará de manera más eficiente teniendo conciencia de sus ventajas luego de haber comprendido bien los problemas, de haber resuelto algunos usando recursos intuitivos y algebraicos y siendo conscientes de las limitaciones de estos recursos cuando se hacen generalizaciones o se tratan problemas más avanzados. En este sentido, también es muy importante que el docente tenga muy en cuenta que, como lo recomienda Dubinsky, los estudiantes deben aprender a analizar enunciados matemáticos formales complejos y construir significados con base en tales formalismos, pero también deben aprender a expresar en lenguaje formal los significados que han construido.

Problema 1

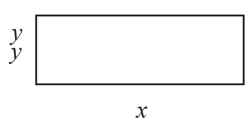
¿Cuáles deben ser las dimensiones de un corral rectangular si se dispone de 30 metros de una malla para cercarlo y de terreno suficiente para que su área sea máxima?

Solución 1

Creando un modelo muy simple de este problema, podemos "ver" la solución, ayudados por la intuición; así, atando los extremos de una cuerda de unos 40 o 50 centímetros, podemos formar con los dedos índice y pulgar de ambas manos, diversos rectángulos, todos del mismo perímetro (la longitud de la cerca metálica), y percibir que el cuadrado es el que tiene mayor área. Ciertamente nada está formalizado y lo que tenemos es sólo una conjetura, o - en la terminología de Fischbein - una intuición de conjetura o una intuición de anticipación, pues hay una sensación de certeza al hacer la afirmación.

Solución 2

Haciendo una representación gráfica del problema y empleando variables (x, y) para representar el largo y el ancho del rectángulo, el dato de la longitud de la cerca y el área correspondiente:



$$2x + 2y = 30$$
$$x\ y \text{ máximo.}$$
Equivalentemente:
$$x + y = 15$$
$$x\ y \text{ máximo.}$$

Observación 1. Habiendo llegado a esta formalización, y como un pequeño ejercicio de construcción de significados a partir de formalismos, podemos enunciar un problema cuya solución sería la misma que la del problema 1 y que la obtendríamos manteniendo lo fundamental del problema concreto del corral y de la cerca metálica:

Problema 1': Determinar dos números cuya suma sea 15 y cuyo producto sea máximo.

En este caso resulta natural hacer una tabla como la siguiente:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
y	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	…
x y	14	26	36	44	50	54	56	56	54	50	44	…

Resulta evidente que los valores 7 y 8 para x y para y (o para y y para x), respectivamente, serían una solución si sólo se consideraran números enteros. Esta es una solución a la que llegan muchos niños que no conocen los números decimales y – en tal caso – la solución es válida.

Solución 3*a*

Empleando la notación funcional. Representamos por $f(x, y)$ al área del rectángulo cuyos lados miden x e y metros. En tal caso, teniendo en cuenta la simplificación hecha en la Solución 2, tenemos:

$$f(x,\ y) = x\ y \quad ; \quad x + y = 15.$$

Como $y = 15 - x$; es decir y es una función de x, definimos la nueva función h cuya única variable es x

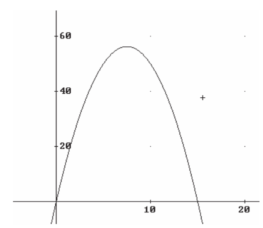
$$h(x) = f(x, y\,(x)) \ = x(15 - x) \ = 15x - x^2 \ = -\left(x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{15}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{15}{2}\right)^2$$

Observamos que al número $(15/2)^2$ se le está quitando un número mayor o igual que cero, para cualquier valor de x; en consecuencia $h(x)$ es máximo cuando $x = \frac{15}{2}$, y el valor máximo es $\left(\frac{15}{2}\right)^2 = 56{,}25$.

Esto significa que el corral debe ser cuadrado, con lados de 7.5 metros cada uno, lo cual es coherente con las intuiciones de conjetura y de anticipación expuestas en la solución 1.

Observación 2. Graficar la función h permite visualizar claramente el punto de máximo y el comportamiento de las variables, ya mostrado en el cuadro de la solución 2; en particular, comparar la simetría en la tabla con la simetría del gráfico de h.



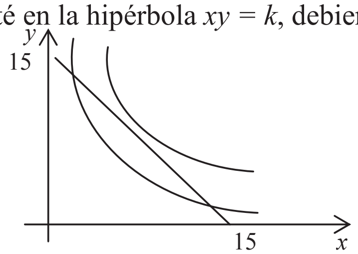
Solución 3*b*

Empleando el cálculo diferencial con funciones de una variable. Se ve fácilmente que 15/2 es el valor de x que maximiza la función $h(x)= 15x - x^2$, pues $h'(x) = 15 - 2x$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15/2$ y $h''(x) = -2 < 0$ para todo valor de x.

Observación 3. Es bueno notar que si bien esta solución es rápida y sencilla, utilizarla como primer recurso ante el problema planteado puede llevar a mecanizar al alumno y sería perder la oportunidad tanto de emplear los conocimientos previos como de ejercitar y estimular la intuición y la visualización ante un problema.

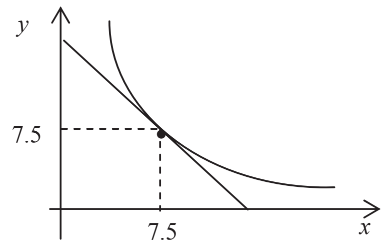
Solución 3 *c*

Usando una representación gráfica del problema de maximizar el producto $x\ y$, con la condición $x + y = 15$. Se trata de encontrar un punto de la recta $x + y = 15$, que también esté en la hipérbola $xy = k$, debiendo tomar k el mayor valor posible.



Observación 4. Se puede ver (intuición operatoria geométrica, en la terminología de Piaget), que lo dicho anteriormente se cumple con una hipérbola que sea tangente a la recta. El punto de tangencia se puede obtener sin necesidad de recurrir al cálculo diferencial.

De $x\,y = k$ y $x + y = 15$ obtenemos $x^2 - 15x + k = 0$. La tangencia se dará si y sólo si el discriminante de esta ecuación cuadrática es cero; esto es $225 - 4k = 0$; o sea $k = 56{,}25$; así $x = y = 7{,}5$.



Solución 3*d*

Considerando el problema como el de maximizar una función de dos variables, con una restricción de igualdad, y usando el método de los multiplicadores de Lagrange para resolverlo:

De *max* $x\,y$, *sujeto a* $x + y = 15$, usando la función lagrangiana $L(x, y, \lambda) = x\,y + \lambda\,(15 - x - y)$ y las correspondientes condiciones necesarias y suficientes, obtenemos $x^* = y^* = 7{,}5$ (los valores optimizantes de x e y).

Observación 5. También es pertinente un comentario similar al hecho en la solución 3b, cuando utilizamos el método del cálculo diferencial para funciones de una variable. La ventaja adicional del uso de este método es la interpretación del valor óptimo del multiplicador de Lagrange (En este caso se obtiene que $\lambda^* = 7{,}5$) que permite estimar la sensibilidad del valor óptimo de la función, al modificarse ligeramente la constante de la restricción.

Solución 3 *e*

Usando la desigualdad $\sqrt{x\,y} \le \frac{x+y}{2}$. En esta conocida relación entre media geométrica y media aritmética, es claro que $\sqrt{x\,y}$ es máximo cuando se cumple la igualdad; es decir, cuando alcanza el valor $\frac{x+y}{2}$. Como la igualdad se cumple únicamente si $x = y$, y como $x + y$ es 15, $\sqrt{x\,y}$ es máximo cuando $x = y = 7{,}5$. Ciertamente los valores que maximizan $\sqrt{x\,y}$ también maximizan $x\,y$, que es el área del rectángulo.

Observación 6. Como otro ejercicio de construcción de significados a partir de formalismos, examinando $\sqrt{x\,y} \le \frac{x+y}{2}$ también podemos concluir que de todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el que tiene menor perímetro.

Cambiando de contexto y haciendo generalizaciones

Es interesante mostrar a los estudiantes tanto otros contextos en los cuales se pueden ubicar los razonamientos y análisis hechos, como algunas generalizaciones. Todo ello contribuye a estimular la intuición y a comparar las ventajas de los métodos disponibles para resolver los problemas. A continuación enunciamos un problema en el contexto de la teoría económica para los productores y otro en la de los consumidores:

Problema 1”

Una empresa produce un bien empleando los factores de producción L y K. Si utiliza x unidades de L e y unidades de K produce x y unidades del bien. Si cada unidad de L y

K la compra a un dólar y dispone de 15 miles de dólares; ¿qué cantidades debe comprar para maximizar su producción?.

Problema 1"'

Considerar los bienes A y B y que la función de utilidad de un consumidor es u(x, y) = x y, donde x representa la cantidad del bien A e y representa la cantidad del bien B. Si cada unidad de estos bienes cuesta un dólar y el consumidor dispone de 15 dólares, ¿cuántas unidades de A y B debe adquirir para maximizar su utilidad?

Generalizaciones

Una primera generalización interesante es considerando tres variables:

$$\begin{aligned} &max\ \ x\,y\,z \\ &s.a\ \ \ x + y + z = 15 \end{aligned}$$

- *Reinterpretación geométrica del problema*

Cuáles deben ser las dimensiones de un paralelepípedo recto si para su armazón (aristas) se dispone de 60 metros de alambre y su volumen debe ser máximo?.

- *Reinterpretación económica del problema*
  Empresa : 3 factores de producción, precios unitarios \$1, presupuesto \$15.
  Consumidor: 3 bienes, precios unitarios \$1, presupuesto \$15.

Se puede pasar entonces a generalizar para *n* variables y a pensar en las correspondientes reinterpretaciones geométrica y económica

$$\begin{aligned} &max\ \ x_1\ x_2\ \ldots x_n \\ &s.a\!: \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i\ = C \end{aligned}$$

Hacia el cálculo de variaciones y la teoría de control

A partir del problema de encontrar la distancia más corta del punto (5, 0) a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que ciertamente es trivial, se puede ir modificando el problema, introduciendo cada vez un mayor grado de dificultad que permita ejercitar la intuición y el manejo de los conocimientos de cálculo, hasta llegar a plantearse problemas más generales, considerándolos en el marco del cálculo de variaciones y mostrando que sus métodos son más poderosos y permiten resolver problemas mucho más generales, en los cuales ya no se busca un número o un vector que optimiza una función, sino una función que optimiza una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

Al pensar en resolver el problema

Determinar la distancia más corta del punto C(6, 25/4) a un punto de la parábola de ecuación $y = 1 - x^2$,

es natural intuir la búsqueda de un segmento de recta perpendicular a la parábola, como consecuencia de haber trabajado problema similar con la circunferencia. Se puede demostrar esta perpendicularidad considerando el problema, de manera más general, con una función derivable. Un problema aún más general es el siguiente:

Determinar la curva $y = y(x)$ *que una el punto* (x_1, y_1) *con un punto del gráfico de la función derivable* $y = f(x)$, *de modo que la longitud de la curva sea mínima.*

El planteamiento formal, ya en el marco del cálculo de variaciones, es:

$$min \int_{x_1}^{x_T} \sqrt{1+[y'(x)]^2}\ dx\ ,\ \textit{sujeto a}:\ y(x_1) = y_1,\ \ y(x_T) = f(x_T).$$

donde x_T representa la abscisa del punto terminal de la curva que se busca y se está usando la fórmula de la longitud de una curva suave.

Conociendo los métodos del cálculo de variaciones, se pueden resolver adecuadamente problemas cuya "solución intuitiva" no coincide con la experimental, como el problema de la curva *braquistócrona*, planteado por Johan Bernoulli en 1696:

¿Qué forma debe tener un alambre sin fricción, uniendo los puntos A y B de un plano vertical, con B más abajo que A, pero no en la misma vertical, para que una cuenta que se deslice por el alambre descienda, por su propio peso, desde A hasta B, a la mayor rapidez?

Con este enfoque de la optimización, en la segunda mitad del siglo XX se creó la teoría del control óptimo, introduciendo lo que se denomina una variable de control y considerando entre las restricciones una ecuación diferencial. En este marco se pueden resolver problemas como el siguiente, que nos dan idea de sus aplicaciones:

Determinar cómo deben variar en el tiempo los niveles de consumo $C(t)$ de cierto bien y de la polución ambiental $P(t)$ que se ocasiona al producir tal bien con la cantidad de trabajo $L(t)$, para que se maximice el bienestar $U(t)$ de la sociedad en el período $[0, T]$, sabiendo que $C(t) = \alpha\, L(t)$, $\alpha > 0$; $P'(t) = C^2(t) - \gamma\, P(t)$, $\gamma > 0$; $U(t) = \ln\, C(t) - \beta\, L^2(t) - \mu\, P(t)$; $P(0) = P_0$; $P(T) = P_T$ (por determinar).

La polución es la "variable de estado", y el consumo la "variable de control".

Estos problemas se resuelven aplicando las condiciones necesarias dadas por el *"principio del máximo de Pontryagin"*, en el que se usa la función hamiltoniana y una variable de coestado para plantear el sistema hamiltoniano de ecuaciones diferenciales.

Comentarios finales

- Escogiendo problemas apropiados, trabajando en grupos y orientando adecuadamente, es posible obtener en el aula soluciones y observaciones como los expuestos para el problema 1, lo cual estimula la intuición, ejercita la construcción de significados a partir de formalismos y amplía la visión acerca del uso de los conocimientos previos para el análisis, la visualización y la solución de problemas.
- Es muy formativo, trabajando interactivamente con los estudiantes, ir modificando y generalizando problemas sencillos y llegar a situaciones que requieren matemática avanzada, que usa y formaliza las percepciones intuitivas.

Referencias bibliográficas

Chiang, A. (1992). *Elements of Dynamic Optimization.* New York, USA: McGraw Hill.

Courant & Robbins (1963). *What is mathematics?.* N.Y.,USA: Oxford University Press.

Dubinsky, E.(1998). *Meaning and formalism in mathematics.* Georgia State University.

Malaspina, U. (1994). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Lima, Perú: Fondo Editorial PUCP.

Malaspina, U. (1997). Aprendizaje y formalización en matemáticas. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp. 228-232, México.

Simmons, G. (1977). *Ecuaciones diferenciales.* México: McGraw Hill.