El comportamiento periódico de una función como un argumento contextual. La manifestación del movimiento fuera del instante

Francisco Cordero Osorio, Enrique Jaime Martínez Capistrán
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN; México
fcordero@mail.cinvestav.mx emartine@mail.cinvestav.mx

Resumen
En el campo de la matemática educativa, el concepto de periodicidad es un tema muy poco explorado, a pesar de encontrarse inmerso prácticamente en la curricula escolar de la matemática. Este concepto es ampliamente utilizado en diversos tópicos de matemáticas, sin embargo, solo existe poco trabajo de corte epistemológico al respecto, donde se encuentra el trabajo de Shama (1998), este estudio cognitivo nos plantea una problemática sobre la comprensión del estudiante, cuando éste concibe la periodicidad como un proceso y no puede transformarla en objeto. Esto conduce al estudiante a relacionar fenómenos no periódicos como periódicos y a tener preferencia por identificar un periodo de un fenómeno periódico que no es necesariamente en forma correcta. La problemática es retomada para la investigación, considerando los contextos discreto y continuo del concepto. El objetivo es diseñar una situación de tal forma que el estudiante de una nueva explicación sobre la concepción de proceso y pueda alcanzar su transformación al objeto del concepto de periodicidad. Para tal propósito se ha formulado una epistemología de la periodicidad, donde se han hallados ciertos elementos (repetición regular, desplazamiento lineal como el argumento de los fenómenos periódicos, y el comportamiento periódico de una función como un argumento contextual, la manifestación del movimiento en un todo y no en un momento, que permitan la construcción de la periodicidad. El concepto de periodicidad generalmente es tratado en la currícula como una propiedad de cierta clase de funciones llamadas periódicas. Sin embargo es factible pensar la orientación del concepto de periodicidad a través de la noción de comportamiento tendencial de las funciones, donde la epistemología del concepto esté basada en situaciones de tendencia de un comportamiento periódico. De la epistemología de la periodicidad tiene como propósito ser la base de una descomposición genética que incluya los elementos y su relación. Nuestro marco teórico en la investigación es el de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y el diseño de actividades, su implementación y la recolección de datos con estudiantes de precálculo y cálculo, a través de la metodología que señala la propia teoría, el ciclo ACE. Los resultados se presentan en la presentación de la investigación.

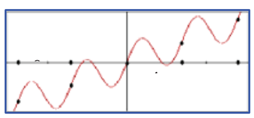
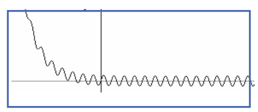
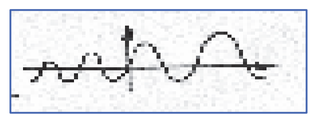
Introducción

La periodicidad es un concepto ampliamente utilizado en la enseñanza de la física y la matemática. Sin embargo, este concepto no llega a ser comprendido por los estudiantes en su totalidad, sólo es entendido en un nivel proceso (Shama, 1998), es decir, identificar fenómenos no periódicos como periódicos y tener preferencia para identificar periodos de un fenómeno periódico que no necesariamente es en forma correcta. *El concepto que surge de nuestra practica social ordinaria, y la enseñanza de tópicos relacionados a la periodicidad tienen influencia directa en como es entendido el concepto.* En Shama (1998) se encuentra que en el entendimiento del concepto aparecen ciertas nociones como: la repetición regular, el movimiento y el tiempo. *Estos elementos nos ha conducido a analizar tres movimientos básicos (Movimiento Circular Uniforme, Péndulo Simple y un Sistema Masa-resorte) con el fin de hallar nuevos elementos epistemológicos. En ellos hemos encontrado ciertas características comunes, que obedecen 2^a ley de Newton (sistema de predicción local): la descripción del movimiento es a través de proyectarlo en una línea fase, su ecuación de movimiento es* $(d^2y/dt^2) + \omega^2 y = 0$ (ecuación diferencial autónoma), donde ω es una caracterización local que está relacionada con el periodo y la frecuencia (caracterizaciones globales), la solución de la ecuación conduce al modelo matemático $y(t) = A \sin (\omega t + \alpha)$, función caracterizada por ser periódica, que es un sistema de predicción global, donde *la periodicidad es una representación integral que está caracterizada por lo local y lo global en una relación dialéctica*. Por tanto, se trata pues de organizar un conjunto de relaciones que establece la actividad humana para construir lo periódico*: movimiento repetitivo (repetición regular), manifestación del movimiento en un todo (periodo) y no en un momento (instante), el desplazamiento lineal como argumento de los fenómenos periódicos, y el comportamiento periódico de una función como un argumento contextual.*

Problemática y objetivo de la investigación

Respecto a trabajos relacionados con el concepto de periodicidad, encontramos el de Shama (1998), en el que investiga el entendimiento del concepto en estudiantes de 3º a 12º grados, en las clases de matemáticas y física, a través de dos cuestiones: la definición y el concepto imagen del concepto de periodicidad. Se reporta que los estudiantes sólo tienen un entendimiento en un nivel proceso y como consecuencia relacionan fenómenos no periódicos como periódicos y tienen preferencias por identificar periodos de un fenómeno periódico que no necesariamente es en forma correcta.

Algunas de las gráficas que no son periódicas, que cumplen con algunas de las características de la periodicidad, mas sin embargo, son identificadas por los estudiantes como periódicas son las que mostramos a continuación:

Las causas de entender el concepto de periodicidad en un nivel proceso son diversas: los estudiantes transfieren las propiedades del proceso, o sea, tienden a relacionar el producto de un procedimiento periódico como periódico, relacionan un fenómeno periódico que resulta de la repetición de un algoritmo o patrón periódico.

De las preferencias por identificar periodos de un fenómeno periódico Shama reporta que los señalan entre dos puntos extremos, entre dos puntos discontinuos, en el inicio de la representación, entre los ceros de una función, le asignan una dirección a partir de un punto y señalan los periodos fundamentales. Algunos de los errores que son cometidos por los estudiantes son debido a que tienen la concepción de que los extremos de un periodo deben ser idénticos, tendencia a identificarlos en el extremo de la representación, pues algunos no reconocen periodos que no empiezan en el extremo de la representación.

El concepto que surge de nuestra practica social ordinaria, y la enseñanza de tópicos relacionados a la periodicidad tienen influencia directa en el entendimiento del concepto.

Si bien Shama nos reporta que el concepto es sólo entendido en un nivel proceso, no nos dice cómo alcanzar el nivel objeto. Por tanto, en esta investigación retomamos la problemática, el entendimiento de la periodicidad en un nivel proceso, con el fin de conducir a los alumnos a un nuevo entendimiento, en un nivel objeto, a través de identificar más elementos epistemológicos de la periodicidad. Para ello, se considera la aproximación socioepistemológica (Cordero, 2001), la cual consiste considerar la actividad del humano que lleva a lo periódico. Esto formula una epistemología que será la base para diseñar una situación de periodicidad que conduzca el paso del nivel proceso al nivel objeto. Las actividades pasan a ser argumentos contextuales en el diseño de la situación. Estos argumentos reflejan lo cognitivo de los que intervienen. Entonces, conviene usar aspectos de la Teoría APOE (Dubinsky, 1998), como el de la descomposición genética. Ahí, se encontrarán las coordinaciones de las construcciones mentales necesarias para alcanzar el nivel objeto en la argumentación contextual a la luz de la epistemología de la actividad humana.

Los movimientos periódicos básicos y la búsqueda de elementos epistemológicos

En el entendimiento de concepto aparecen ciertas nociones: movimiento, repetición y tiempo. Esto nos ha llevado a analizar tres movimientos periódicos, que consideramos básicos para la búsqueda de hallar nuevos elementos epistemológicos y que sirvan de base para nuestra descomposición genética. Los movimientos analizados son el movimiento circular uniforme, el péndulo simple y el movimiento de un sistema masa-resorte. Las fuentes que se utilizaron fueron libros de texto de física y matemáticas que se emplean en los cursos universitarios (Kline, 1998 y Resnick-Halliday, 1983).

Se han identificado ciertas similitudes, entre las más significativas están: la segunda ley de Newton como un sistema de predicción local, la ecuación de movimiento como una ecuación diferencial de 2º orden y el modelo matemático, como la función periódica seno. En todos los movimientos se define la posición, velocidad y la aceleración como caracterizaciones locales del movimiento. Mientras que en los tres movimientos señalados anteriormente, se define la amplitud, el ángulo de fase, el periodo y la frecuencia en las soluciones, como caracterizaciones globales, que dan significados a ciertos parámetros de la función $y(t) = A \sin(Bt + C) + D$. La velocidad, que es una caracterización local, se relaciona directamente con el periodo y la frecuencia, que son caracterizaciones globales. Todas estas características comunes aparecen en la tabla I.

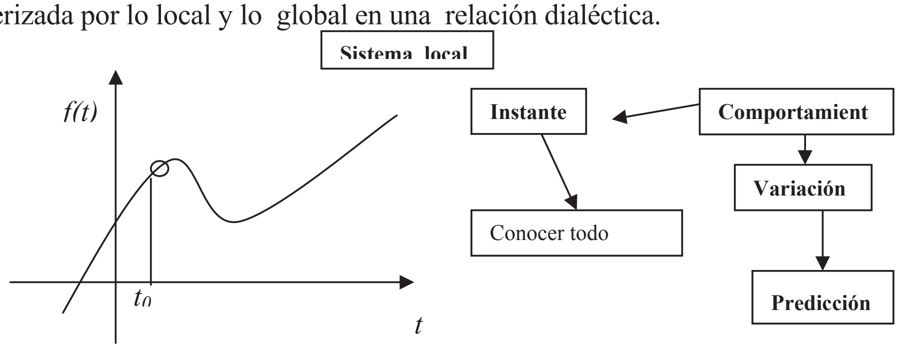
La ecuación diferencial por la cual están modelados los tres movimientos es una ecuación autónoma $\{(d^2y/dt^2) + \omega^2 y = 0\}$, esto significa que no aparece el tiempo explícitamente en la ecuación, pero el tiempo está presente. Esto genera un espacio de fases, que permite ver las caracterizaciones de predicción del sistema local simultáneamente, o sea, permite ver en un momento dado t , la posición y el campo de velocidades.

Movimiento	*Ecuación diferencial*	*Velocidad angular (ω)*	*Periodo (T)*	*Modelo matemático*
M.C.U.	$(d^2y/dt^2) + \omega^2 y = 0$	$2\pi / T$	$2\pi / \omega$	$A\sin(\omega t + \phi)$
Péndulo	$(d^2x/dt^2) + (g/l)\, x = 0$	$(g/l)^{(1/2)}$	$2\pi\,(l/g)^{1/2}$	$A\sin(\omega t + \phi)$
Masa-resorte	$(d^2x/dt^2) + (k/m)x = 0$	$(k/m)^{(1/2)}$	$2\pi\,(m/k)^{1/2}$	$A\sin(\omega t + \phi)$

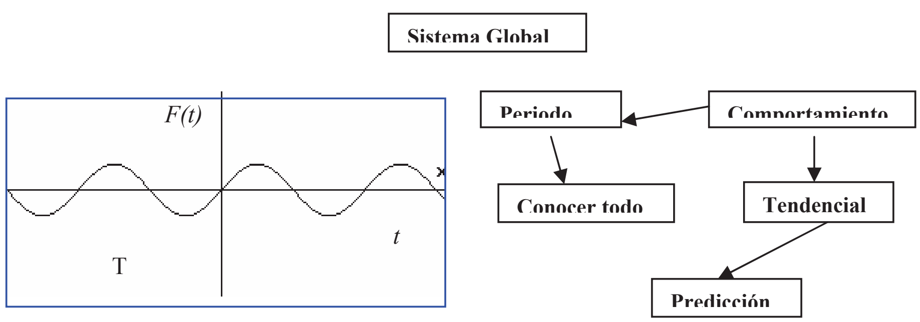
Tabla I

Los movimientos anteriores son tres tipos de movimientos que son analizados en un “desplazamiento lineal ” o de acuerdo al movimiento armónico simple. Aunque el movimiento circular uniforme es una composición de dos movimientos armónicos simples, su análisis puede realizarse en dos desplazamientos, uno en el eje X y otro en el eje Y. En los tres casos se aplica la segunda ley de Newton f = ma, que formula una ecuación diferencial de segundo orden con características singulares, esta ecuación genera un sistema de predicción local y global, y a su vez genera una familia de soluciones de funciones de seno con la propiedad de ser periódica, pero conociendo la posición y la velocidad se puede obtener una solución única, con lo que se puede conocer todo el comportamiento de los movimientos en cualquier instante.

El sistema de predicción local (ver esquema 1), es la que se utiliza en el Cálculo y generalmente es preferido para hacer predicciones, ya que con él se pueden tratar fenómenos muy complicados. La manera de predecir en este sistema, es tomando información del comportamiento de las propiedades (posición y variación) del sistema en una vecindad infinitesimal (instante) en el espacio (t, f(t)), para conocer la solución en un cualquier instante anterior o posterior (conocer todo). En este sistema de predicción solo importan las caracterizaciones locales. En cambio el sistema de predicción global (ver esquema 2), es utilizado para movimientos periódicos (o que se repiten), donde se definen nuevas caracterizaciones que determinan el movimiento, esto es, en el sistema de predicción global necesita de integrar las caracterizaciones locales y globales; necesita de la especificación de una función (comportamiento), el estado inicial (caracterizaciones local), en todo el espacio (periodo) en un instante dado, para poder hacer predicciones en un instante posterior o anterior (conocer todo), por tanto, la periodicidad es una representación integral que está caracterizada por lo local y lo global en una relación dialéctica.

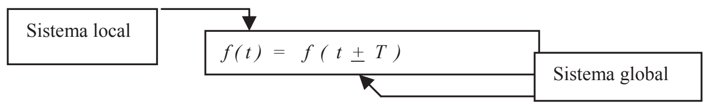


Esquema 1



ESQUEMA 2

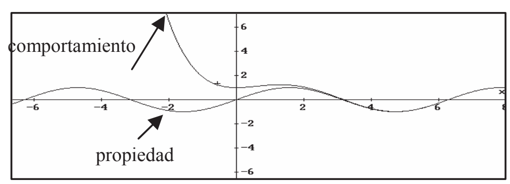
El modelo matemático es una función que está caracterizada por ser periódica f(t) = f(t + T), que es utilizada como sistema de predicción global y que integra las caracterizaciones locales y globales o ambos sistemas de predicción (ver esquema 3).



Esquema 3

En el análisis de los movimientos se encontrón mas elementos, la repetición regular, el desplazamiento lineal, la manifestación del movimiento en un todo (en un periodo) y no únicamente en un momento (en un instante), y la definición de caracterizaciones globales.

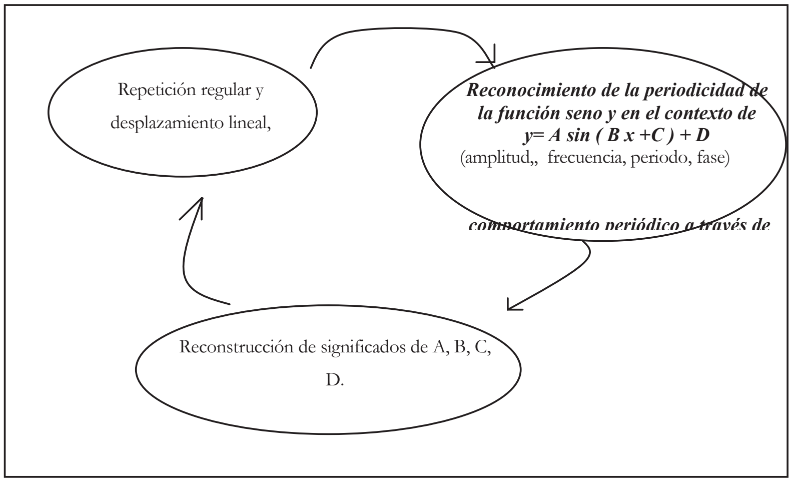
Un elemento mas que consideramos como elemento epistemológico es el del comportamiento periódico. Éste no es un concepto definido dentro de la matemática, sin embargo, cuando hablamos de periodicidad necesariamente hablamos de comportamiento periódico y periodicidad, o sea que existe una relación dialéctica entre el comportamiento periódico y la periodicidad. Un ejemplo de la diferenciación de comportamiento y propiedad periódica lo podemos ver en la siguiente gráfica.



La descomposición genética y avances de la investigación

Hemos hallado ciertos elementos epistemológicos de la periodicidad: manifestación del movimiento en un todo y no en un instante, el desplazamiento lineal como el argumento de los fenómenos periódicos, y el comportamiento periódico de una función como un argumento contextual, que pudieran formular una socioepistemología del concepto.

La descomposición genética que se esta construyendo, está basada en los elementos epistemológicos hallados, anteriormente y que relaciona los significados de los parámetros en la transformación de una función $y= A \sin (B x +C) + D$, el desplazamiento lineal, el comportamiento de una función y la propiedad periódica (ver esquema 4).



Esquema 4

Algunas de las interrogantes que consideramos son importantes para el diseño de situación son:

¿Cuáles son los significados y procedimientos de lo periódico, cuando el comportamiento es el argumento contextual? y

¿Cuáles son los niveles cognitivos (proceso y objeto) que necesariamente se alcanzan en el arguemto contextual?

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (1998). *Cognición y Enseñanza. La Distinción y Formación de Construcciones en la Didáctica de la Matemática*. En F. Cordero (Ed.) Programa Editorial. Serie: Antologías N° 3 pp 3-45. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2001). *La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 4, Núm. 2, 103-128.

Dubinsky, E. (1998). *Una Década de Investigación en Educación Matemática sobre algunos Temas de Matemáticas Avanzadas*. En F. Cordero (Ed.) Programa editorial. Serie: Antologías N° 3 pp 223-247. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Kline, M. (1998). *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*. Fondo de Cultura Económica, México.

North, A. (1983). *La Matemática como Elemento en la Historia del Pensamiento,* En SIGMA, “ El Mundo de las Matemáticas “. Tomo I. España: Editorial Grijalbo.

Quintana, H. (1998). *Espacio, Tiempo y Universo*, En Hernán Quintana G., (Ed.) Ediciones Universidad Católica de Chile, Textos Universitarios, Facultad de Física.

Resnick R. & Halliday D. (1983). *Física*, Parte I. Editorial Continental, S.A.

Shama, G.(1998). *Understanding Periodicity as a Process With a Gestalt Structure*. Educacional Studies in Mathematics, Vol 35, 255-281.