

Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo

Rosa María Farfán Márquez, Marcela Ferrari Escolá
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. IPN. México
mferrari@mail.cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se presenta un estudio de la función logaritmo bajo la óptica de la socioepistemología con el objeto de analizar la ruptura entre la presentación aritmética y funcional de los logaritmos en el discurso matemático escolar y sentar bases para el diseño de situaciones didácticas que busquen dotarlas de significado. En este sentido se desarrollan las tres etapas identificadas en el devenir de los logaritmos en objeto a ser enseñado, mismas que sustentan la hipótesis epistemológica que presentamos para su discusión.

Introducción

Nuestro trabajo parte del hecho que el conocimiento se construye respondiendo a cuestionamientos enmarcados en un paradigma específico, en una época y cultura particulares, dentro de una sociedad que le confiere pertinencia, y que su transposición didáctica es inevitable, tanto en el desarrollo y consolidación de la noción como en su adecuación a la realidad áulica. El mismo intenta evidenciar las posibles causas de la “*dislexia*” en el discurso matemático escolar en torno a la noción logaritmo teniendo como fin último el generar hipótesis epistemológicas robustas que nos permitan gestionar las variables pertinentes a una situación didáctica.

En nuestra investigación, denominamos “*dislexia*” a la ruptura que se percibe en la presentación escolar de los logaritmos, ésta es, como facilitadores de operaciones en un primer acercamiento de corte numérico, y su posterior abordaje con todo el rigor de su tratamiento como función sin que medie entre ambos la construcción de los mismos. Así, identificamos nuestra problemática en torno a la enseñanza de los logaritmos y consideramos que abordarla implica dar respuesta a preguntas tales como, ¿qué elementos permitieron su incorporación a la estructura matemática actual? ¿cómo fue su devenir en objeto a ser enseñado en nuestras aulas? ¿qué significados y sentidos se han diluido en tal proceso? ¿qué preguntas respondió en cada paradigma que los incorporó? ¿qué concepciones se encuentran respecto a ellos? ¿cómo vive esta noción en la escuela de nuestros días?

Siendo nuestra intención resignificar la noción “logaritmo”, nos abocamos a la búsqueda de los interrogantes y debates que éstos produjeron, de las controversias que suscitaron, de los ir y venires en su desarrollo y consolidación en la estructura matemática, en definitiva, su devenir en un saber validado social y culturalmente. Para ello, recurrimos a varios textos originales y libros de historia intentando también enmarcar al desarrollo científico en la sociedad de la época. Intentamos asimismo, reflejar el desarrollo de la comunicación y divulgación de las nociones relacionadas con los logaritmos desde su definición en el siglo XVII, hasta nuestros días realizando para ello el análisis de los libros de textos que consideramos representativos aunque no únicos, y de la currícula de los sistemas educativos argentino y mexicano para conocer cómo vivieron y viven los logaritmos en el discurso matemático escolar de distintas épocas. Por último, reflexionamos en torno de los posibles diseños de situaciones didácticas que pueden sustentarse en nuestro trabajo y, por ende, en nuestra hipótesis epistemológica dejando abierto a la discusión tal tópico.

Esta ponencia forma parte de investigaciones enmarcadas en el proyecto, financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.
U.N.S.L., Argentina

Marco Teórico

Para desarrollar nuestro trabajo nos apoyamos en una extensión de la ingeniería didáctica como metodología de investigación ya que nuestro grupo incorpora a las dimensiones ya abarcadas por la misma, la *sociocultural*, reforzando así la mirada sistémica a los fenómenos didácticos abordados. Por tanto, presentamos el análisis preliminar, primera fase de toda ingeniería didáctica en el cual intentamos dar una visión del desarrollo de los logaritmos centrándonos fundamentalmente en las dimensiones didáctica, epistemológica y sociocultural del mismo, siendo esta última la que evidencia nuestro acercamiento teórico y extensión de esta metodología.

Adherimos al acercamiento socioepistemológico como paradigma y marco para nuestro trabajo. En el mismo, nos interesa establecer consistentemente las pautas para un posterior diseño de situación didáctica en torno a la “dislexia” en el aprendizaje de la noción de función logaritmo producto de la no construcción de dicho concepto en el ámbito escolar. En otras palabras nos estamos refiriendo a la ausencia de significados que la función logaritmo presenta en los alumnos, debido al salto que se percibe entre su introducción a la enseñanza como una potente herramienta facilitadora de operaciones en un acercamiento netamente aritmético y su posterior aparición en la enseñanza superior como una función definida mediante la integración de la hipérbola equilátera.

Así, nuestro trabajo se enmarca y cobra sentido dentro de la *aproximación socioepistemológica*, que para Farfán, es un marco para la investigación y el desarrollo del currículum que se apoya en la teoría de situaciones, profundiza el análisis del saber incorporando en su análisis no sólo el origen conceptual o procedimental, sino su origen social. Una cierta razón de ser que es factible descubrir si se examinan las prácticas de referencia y las formas de su aproximación en una cultura³.

Otros antecedentes sobre la función logaritmo.

Nuestra preocupación en torno a los logaritmos cobra sentido al observar el tratamiento escolar dado a los mismos. Confrey y Lezama identifican, como un obstáculo epistemológico, la enseñanza de estructuras multiplicativas desde las aditivas y el uso de las primeras para introducir la potenciación a la hora de generalizar hacia el carácter funcional de las exponenciales y de allí inferir relaciones con los logaritmos a través de funciones inversas sin mayor detenimiento en ello (Confrey, 1996; Lezama 1999). Así mismo, Sierpinska cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición (Sierpinska, 1992), observación que consideramos muy vinculada con la problemática tratada en este trabajo pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que a nuestro entender no existen elementos en el discurso escolar que propicien el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.

Por otro lado, de la exploración que realizara Trujillo respecto a la interconexión entre la relación de las progresiones aritmética y geométrica y las nociones de los logaritmos y exponenciales como funciones, surge la absoluta deficiencia de los entrevistados, estudiantes recién egresados del nivel medio superior, para intuir tal cosa (Trujillo, 1995). Si bien todos reconocen las progresiones aritmética y geométrica y logran determinar el patrón de comportamiento de cada una de ellas, ninguno consigue establecer una relación entre ambas. Las respuestas reportadas giran en torno a que: *ambas forman parte de los*

³ Conferencia dada en la Escuela de Medicina, México, Mayo-2000.

números reales; o ambas son progresiones; o no hay una operación que las vincule pues en una se suma y en la otra se multiplica. Se observa además, que esta falta de vinculación entre las progresiones les inhibe generar argumentos en el contexto gráfico, lo cual confirma que ven a ambos objetos como entes aislados y por tanto, no dan indicios de un pensamiento funcional respecto a la relación entre las mismas, no reconocen sus características logarítmicas.

Por otro lado, se encontraron las mismas dificultades en los profesores de nivel medio superior entrevistados, sólo uno de tres reconoció las funciones logaritmo y exponencial como la relación entre las progresiones propuestas, distinguiendo explícitamente la base y graficando ambas funciones, aunque de manera convencional, es decir, recordando la forma de las curvas exponencial y logarítmica sin construirlas desde las progresiones dadas.

Las dificultades propias del abordaje de este tema se suman a las reportadas por numerosas investigaciones respecto a la apropiación del concepto de función. Entre otras, mencionamos la importancia que escolarmente se le confiere al registro algebraico en detrimento de otros, como por ejemplo el gráfico o el numérico, lo cual repercute en un empobrecimiento de las herramientas utilizables a la hora de apropiarse de un nuevo concepto o enriquecer uno ya conocido.

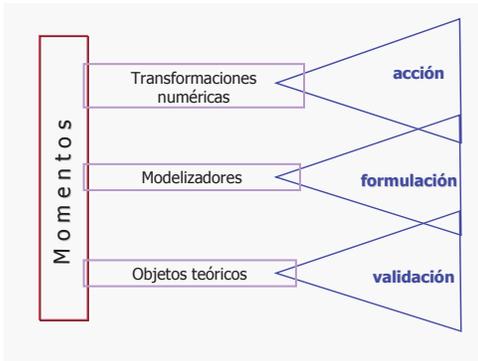
Las distintas concepciones que docentes y alumnos logran construir en torno a relaciones funcionales y las diferentes representaciones de las mismas, reportadas como elementos que dificultan la apropiación de este concepto, contrastan con la absoluta carencia de argumentos y representaciones a la hora de trabajar con logaritmos. A éstos, se los presenta como el número al que se debe elevar la base para obtener cierto número, relacionándose luego con la función exponencial, mediante la inversa y con su definición dada en términos de una integral indefinida.

No cabe duda respecto a la importancia que la noción de logaritmos ha poseído desde su origen hasta nuestros días; su evolución, su adaptabilidad a los distintos paradigmas científicos que han ido entrecruzándose, reemplazándose, superándose, ha permitido que arribe a nuestros días intacta, contando con un rincón propio en la estructura matemática actual. Sin embargo, la complejidad de su definición, de las nociones que involucra, hacen pertinente explorar su evolución, recabar información respecto a los significados que se han perdido en el transcurso de la historia, en un intento de proporcionar elementos para introducirla y desarrollarla en el aula de forma más accesible para los alumnos y profesores, los cuales se encuentran por lo general ante una noción con la que pueden operar, trabajar algorítmicamente, a la que luego someten a derivación, integración, entre otras operaciones matemáticas, sin haberla construido en su vida escolar.

Análisis preliminar enfocado a las dimensiones epistemológica y didáctica

En este trabajo partimos de la premisa que la matemática es una construcción humana, un producto social y cultural, consideramos que todo objeto matemático, para consolidarse como tal, necesariamente pasa por varias etapas o momentos. Comienza por ser utilizado sin mayor conciencia de su presencia, siendo manipulado, extendido, formulado, dotado de representaciones y significados más precisos hasta ser insertado en una teoría con características propias. En estas ideas, las cuales surgen de pensar como aplicables al aprendizaje de la humanidad las situaciones de aprendizaje desarrolladas por Brousseau en su teoría de las situaciones didácticas, basamos nuestro análisis de los datos recogidos en nuestra indagación epistemológica.

Efectivamente, si tomamos como eje central en el desarrollo de los logaritmos, las relaciones



entre las progresiones aritméticas y geométricas, que sustentaron su definición como objeto matemático facilitador de operaciones en el siglo XVII, podemos distinguir tres grandes momentos en el devenir histórico de los logaritmos. Podemos observar así, un primer momento de los *logaritmos como transformación*, definidos y enmarcados en el registro numérico en el cual, pese a que no habían sido aun formalmente definidos, pues estamos refiriéndonos a siglos anteriores al XVII, se explora esta relación en busca de extender el rango de los números y de facilitar los cálculos que por la magnitud de las cifras

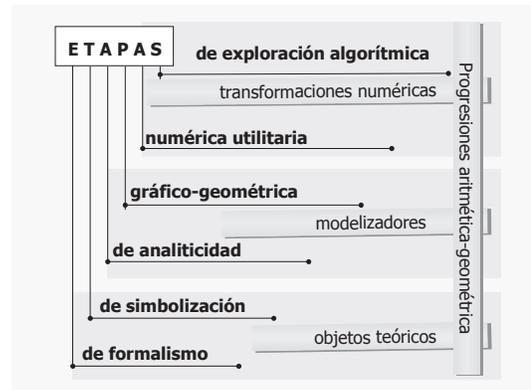
involucradas demandaban tediosas y complicadas operaciones. Es un momento de exploración de posibilidades, de uso de lo que ya se conoce y de enfrentamiento con las limitaciones propias de las herramientas matemáticas puestas en juego, es por tanto una etapa de *acción* si nos valemos de la analogía propuesta.

Deviene luego un momento de definición de la noción, de extensión y caracterización de la misma en otros registros y contextos en donde la relación entre las progresiones se torna fundamental. Así, se descubren las características de los logaritmos en el contexto geométrico, esto es, su asociación con una curva que posee subtangente constante. Se construye su gráfica la cual no fue producto de la tabulación de sus valores. Se encuentra su cuadratura superando las deficiencias del patrón hallado para la cuadratura de las funciones potencia cuando se trata del exponente -1 . Se los utiliza para describir fenómenos de la naturaleza como la caída de cuerpos en medios resistentes o la propagación de las ondas sonoras. Se logra su desarrollo en serie de potencias lo que posteriormente le conferirá el status de función. Así, distinguimos a esta etapa como aquella de los *logaritmos como modelizadores* en la cual se los identifica en cada lenguaje utilizado, se los caracteriza en los distintos contextos conocidos y se establecen las relaciones entre ellos.

Por último, consideramos que con los esfuerzos por incorporarlos a la estructura teórica siguiendo ideas de rigor y purismo matemático, de descontextualización y abstracción, se los escinde de sus orígenes convirtiendo a los *logaritmos en un objeto teórico*. Se les dota de una definición formal, lejana a la publicada por Napier como la relación espacio-velocidad de dos puntos moviéndose con velocidad constante uno y decreciente en progresión geométrica el otro. Se los incorpora en el cuerpo teórico matemático como la inversa de la función exponencial, y como aquella función que convierte un producto en una suma. Se conserva la esencia de los logaritmos, no así su relación explícita con las progresiones y otras características que han desaparecido del léxico escolar.

Discusión

Entran en juego, en esta visión sociocultural de la matemática a la que adherimos, variables sociales y culturales, las que deberán fungir como cristales

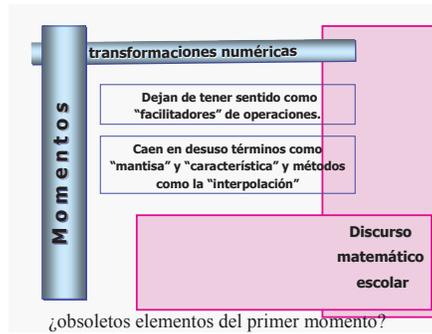


para comprender los avances y retrocesos, los obstáculos y las maneras de superarlos, las argumentaciones y los consensos en este aprendizaje de la humanidad, particularmente en el desarrollo de los logaritmos.

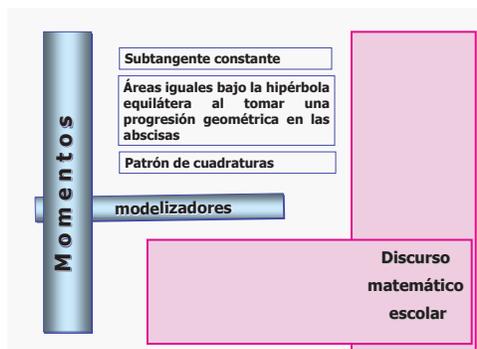
De nuestra indagación epistemológica concluimos entonces que en una primera instancia se pueden distinguir, bajo nuestra óptica, seis etapas en el desarrollo de los logaritmos, a saber: *de exploración algorítmica, numérica utilitaria, gráfico-geométrica, de analiticidad, de simbolización, de formalismo* a las cuales, desde una perspectiva más global encuadramos en los tres momentos ya mencionados.

Concluimos entonces, que los objetos matemáticos aparecen en tanto se actúe sobre ellos, son una construcción sociocultural, por cuanto nacen al seno de una comunidad específica, respondiendo a cuestionamientos particulares pero que se van abstrayendo y escindiendo de sus orígenes para devenir en objetos universales, despersonalizados y atemporales. Las discusiones, las confrontaciones, la comunicación de los mismos hace que evolucionen, que adquieran status en una estructura teórica en tanto sean aceptados y exista un consenso. Los logaritmos, como toda producción humana, no está libre de estas consideraciones y creemos que este trabajo es una pequeña muestra de ello.

Los libros de texto, en general, no rescatan argumentaciones geométricas respondiendo quizás a la pérdida de status de esta rama de la matemática en el discurso escolar.



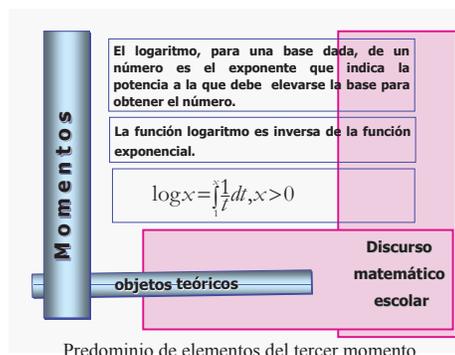
El argumento que prevalece en ellos es el de función inversa como relación entre las funciones exponencial y logarítmica lo cual inhibe verlas como funciones por sí mismas, diluyendo un poco su autonomía funcional. La exacerbada utilización de ejercicios en los que se propone explorar sus dotes como facilitadores de operaciones, en su condición de transformación, y como la primitiva de una integral, que nos deriva implícitamente a la comprensión del Teorema Fundamental



Ausencia de elementos propios del segundo momento

del Cálculo, refuerza el pensamiento algorítmico empobreciendo y fraccionando su significado matemático.

Consideramos entonces, que la “dislexia” en el aprendizaje de la noción logaritmo es producto de su enseñanza, de la priorización de una presentación axiomática y de una exacerbada algoritmización en los dos momentos en que aparece explícitamente en el discurso matemático escolar, esto es, en su primer



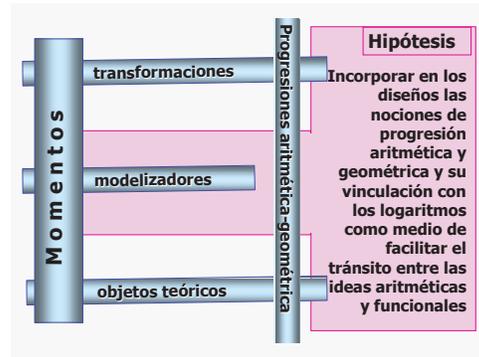
Predominio de elementos del tercer momento

acercamiento como potente herramienta facilitadora de operaciones en los últimos semestres de bachillerato; y en su reaparición, semestres después en la enseñanza superior, como una función definida como la primitiva de la hipérbola equilátera, siendo requisito para ello conocer el Teorema Fundamental del Cálculo. La ausencia en el discurso matemático escolar de elementos que funjan como nexos entre ambos momentos da pauta de la no construcción, en el ámbito escolar, de esta noción y por ende, de la absoluta falta de significados en torno a ella que los alumnos pueden adquirir.

Nuestra visión del devenir de los logaritmos como objetos de saber nos lleva a proponer una hipótesis epistemológica, de construcción de conocimiento.

Esbozo de diseños a futuro

Producto de nuestra reflexión proponemos distintos elementos para incorporar a un diseño explotando a conciencia nuestros resultados del análisis preliminar. Sin embargo, desde nuestra perspectiva consideramos que son dos los elementos fundamentales a tener en cuenta a la hora de realizar el diseño: la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, por un lado; y el quiebre en el patrón de cuadraturas de las funciones potencia, por otro (Ferrari, 2001). Cabe señalar que, una ingeniería didáctica se diseña bajo objetivos específicos que atienden a ciertas circunstancias dadas, las que determinan las variables didácticas a elegir. Por tanto sólo hemos esbozado algunas posibles rutas a seguir con el ánimo de mostrar cómo utilizaríamos nuestros resultados en un posterior diseño. Queda entonces la tarea o quizás el desafío de realizar el diseño y su puesta en escena para continuar con las fases de la ingeniería didáctica, que como metodología hemos implementado en este trabajo, y para dar una respuesta científica a esta problemática que aporte elementos robustos al discurso matemático escolar de nuestros días.



Referencias bibliográficas

- Confrey, J. (1996). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in mathematics education* 26(1), 66-86
- Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. AES. DME Cinvestav-IPN.
- Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- Sierspínska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.
- Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.