APRENDIENDO MATEMÁTICA DESDE LOS CONCEPTOS

María Eugenia Ángel, Laura Polola, Graciela Fernández y Mónica Bortolotto
Universidad Nacional de La Matanza. Argentina
mangel@unlm.edu.ar, pablo@argentinavip.com.ar, polola@unlm.edu.ar

Resumen

La problemática inductora de este tema fue el deseo de encontrar y desarrollar métodos de trabajo en el aula que permitieran facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y resulten en una disminución de la dificultad que los alumnos cotidianamente presentan. Las unidades de análisis principales del trabajo fueron los alumnos ingresantes a las carreras del Departamento de Ciencias Económicas de la UNLM. Debería ser natural identificar el aprendizaje real y efectivo de la Matemática con la conceptualización de los contenidos que supera ampliamente el frecuente tratamiento mecanicista de los mismos, dado que el mero uso de habilidades adquiridas en forma mecánica es incompleto como aprendizaje. Abocados a lograr la conceptualización, se trató de estudiar el desarrollo de actividades factibles que tiendan a ello. El aprendizaje conceptual, es uno de los factores principales que permite descubrir conscientemente el por qué, para qué y el significado de un problema en relación a los conceptos presentes en él, para así encontrar el camino para resolverlo efectivamente (el cómo). Al intentar analizar las dificultades que acarrea el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, surgieron varios interrogantes que motivaron el deseo de alcanzar el siguiente objetivo: Diseñar e implementar actividades que permitan lograr un aprendizaje conceptual acompañado de una evaluación permanente de las mismas. Las actividades diseñadas se basaron en la implementación en el aula de una metodología estratégica. Como este equipo no tuvo a su cargo la coordinación del Curso, se resolvió trabajar sólo con dos comisiones de alumnos que fueron asignadas por la nueva coordinación y en las que estarían como docentes dos integrantes del equipo. El trabajo consistió en:

1- El análisis de los contenidos a trabajar en el aula
2- La selección y aplicación de estrategias.
3- La descripción del grupo piloto –comisiones asignadas a las investigadoras-
4- La determinación de las características de los alumnos ingresantes
5- El análisis y comparación del rendimiento del grupo piloto con respecto al resto.

Antecedentes

La problemática inductora de este tema fue el deseo de encontrar y desarrollar métodos de trabajo en el aula que permitieran facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y resulten en una disminución de la dificultad que los alumnos cotidianamente presentan. Las unidades de análisis principales del trabajo fueron los alumnos ingresantes a las carreras del Departamento de Ciencias Económicas de la UNLM. Es en la instancia de ingreso, el comienzo de la formación profesional, donde el alumno debe construir las bases o pilares del aprendizaje efectivo, para luego poder abordar temáticas de mayor complejidad. Debería ser natural identificar el aprendizaje real y efectivo de la Matemática con la conceptualización de los contenidos que supera ampliamente el frecuente tratamiento mecanicista de los mismos, dado que el mero uso de habilidades adquiridas en forma mecánica es incompleto como aprendizaje. Abocados a lograr la conceptualización, se trató de estudiar el desarrollo de actividades factibles que tiendan a ello. *El aprendizaje conceptual, es uno de los factores principales que permite descubrir conscientemente el por qué, para qué y el significado de un problema en relación a los conceptos presentes en él, para así encontrar el camino para resolverlo efectivamente (el cómo).* Al intentar analizar las dificultades que acarrea el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, surgieron varios interrogantes, que derivan de las preguntas frecuentes que se formula todo docente de esta disciplina: ¿por qué le cuesta tanto a los alumnos y es tan alto el índice de reprobados?, ¿es la incorrecta interpretación de texto el determinante fundamental en la falta de entendimiento de enunciados de un problema?, ¿cuáles son los factores que dificultan la simbolización de un problema real? Lo anterior motivó el deseo de alcanzar el siguiente objetivo para la investigación: Diseñar e implementar actividades que permitan lograr un aprendizaje conceptual acompañado de una evaluación permanente de las mismas. Se diseñaron diversas actividades para lograr el objetivo planteado basadas en la implementación en el aula de una metodología estratégica. Para comenzar con el trabajo se debieron realizar ajustes y replanteos estructurales de importancia en base al cambio de dirección y coordinación que sufriera el Curso de Admisión de Ciencias Económicas de la UNLM dado que este equipo ya no tuvo a su cargo esas tareas. Por tal motivo, se resolvió trabajar sólo con dos comisiones de alumnos, en las que estarían como docentes dos integrantes del equipo para poder aplicar en las mismas las diversas estrategias desarrolladas. Las comisiones para trabajar fueron asignadas a las investigadoras por la nueva coordinación y resultaron ser ambas del turno mañana. La tarea se concentró fundamentalmente en las etapas que se presentan a continuación.

El análisis de los contenidos a trabajar en el aula

A partir del análisis efectuado al currículo, se extrajeron los nodos conceptuales a formalizar, que permitieron la organización del trabajo áulico. Lógica - Teoría de conjuntos - Conjuntos numéricos - Números Reales – Módulo - Polinomios – Ecuaciones - Sistemas de ecuaciones – Inecuaciones - Ecuación de la recta - Relaciones y Funciones. La primera tarea a abordar fue la manera de interrelacionar los temas para no presentarlos de manera aislada e inconexa. Dada la estructura de la ejercitación, se elaboraron *vínculos* que permitieran revisar y aplicar los temas vistos desde el comienzo de la cursada. De esta manera se podría ver la utilidad de todos y la proximidad de áreas conceptuales que parecían no relacionadas entre sí. Este carácter revisionista favorecería el hecho de mantener latente y accesible la estructura conceptual para fortalecerla y lograr un aprendizaje de los conceptos y su relación. Para hilvanar la serie de ejercicios que aparecían para cada tema, se estableció un orden para su realización que respetara el grado de dificultad creciente partiendo de los casos más sencillos. Los ejercicios de la guía fueron analizados uno por uno y en base al objetivo intrínseco de cada uno, se detectaron todas las posibilidades de tratamiento teórico que permitieran explicitar su carga conceptual y su entorno. La necesidad de hacer hincapié en el entorno conceptual de todos los temas tratados como modo de trabajo en el aula caracterizaron la metodología de enseñanza empleada. Se establecieron contactos que vincularon los diferentes temas para luego proponer el trabajo sobre ejercicios que los hicieran explícitos, tomándolos de la guía o creándolos con ese fin. De esta manera se formó la red sobre la que se realizó todo el trabajo siempre respetando la estructura original de la guía de ejercicios. Se seleccionaron y diseñaron, cuando fue necesario, ejercicios vinculantes e integradores entre los distintos temas que aparecían ligados conceptualmente.

La selección y aplicación de estrategias

Considerando las siguientes estrategias generales: *(P) - Estrategias previas al proceso de aprendizaje, (M) - Estrategias de motivación, (O) - Estrategias de organización, (E) - Estrategias de elaboración y (R) - Estrategias de recuperación.* Con la intención de presentar la ejecución de ellas se organizaron los contenidos en torno a ejes conceptuales de los que dependen. Se consideraron como ejes principales los siguientes temas: 1- Lógica, 2- Números Reales, 3- Polinomios y 4- Funciones. Si bien aparecen en el orden presentado, al tratarlos en el aula se recorrió un camino "de ida y vuelta" entre ellos para conceptualizarlos, y para lograr su abstracción fue preciso partir de las nociones de menor dificultad y nivel conceptual. A continuación y a modo de ejemplo se sintetiza la utilización de las estrategias en el eje conceptual referido a Lógica

- Al ser un tema no estudiado previamente se debieron introducir prácticamente todos los conceptos, a tal efecto se trabajó sobre enunciados del tipo (M):

Llueve - No llueve Hoy no es lunes - Hoy es lunes

A fin de relacionar (O) los valores de verdad de una proposición y de su negación, arribando (E) a la noción de opuesto o negación como operación lógica. Análogamente se trabajaron las operaciones binarias partiendo del significado de afirmaciones sencillas y accesibles (M) conectadas lógicamente. Así se comenzaron a construir (O) las tablas de verdad contemplando todas las combinaciones posibles (E). Por otra parte, se agregaron, a los propuestos en la guía, ejercicios de menor complejidad para calcular valores de verdad. Partiendo del resultado de una operación se propuso hallar el valor de verdad de las proposiciones componentes presentes en ella. Por tratarse de las operaciones proposicionales fundamentales ya definidas, el planteo del siguiente tipo de ejercicio representa una estrategia de recuperación.

En cada caso indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

a) Si $p \wedge q$ es F entonces p es V y q es V. b) Si $p \vee q$ es V entonces p es V y q es F.

c) Si $p \rightarrow q$ es V entonces p es V y q es F.

- Al arribar a Teoría de Conjuntos, en la guía figuraba en primer lugar el siguiente ejercicio:

Dados los conjuntos: "cuadriláteros", "rectángulos", "rombos" y "cuadrados":

Definir por comprensión.- Establecer todas las relaciones de inclusión posibles entre ellos.

Se consideró que si bien es un ejercicio que se puede trabajar en profundidad, el tiempo disponible no era suficiente para aplicar estrategias previas al aprendizaje, aula-taller. Como los alumnos, en general, no recordaban algunos conceptos de geometría, se planteó un torbellino de ideas (P y M) para hacer aflorar los conocimientos previos y que cada alumno realizara su aporte y extraer así conclusiones valiosas (R). La puesta en común (O) permitió enunciar las definiciones (R y E) de las distintas figuras geométricas para introducir la definición de un conjunto por comprensión, indicando la propiedad que cumplen sus elementos como una función proposicional -noción establecida previamente (R) en Lógica-. De esta manera aparece una de las vinculaciones conceptuales de la red establecida.

1.Lógica $\longleftrightarrow$ 2.Teoría de conjuntos

Para el segundo ejercicio pedido: *Hacer diagramas de Venn para las siguientes expresiones 1) $A \cap (B \cup C)$ 2) $A \cup (B \cap C)$ 3) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 4) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ s*e consideró conveniente intercalar situaciones problemáticas concretas entre dos o tres conjuntos tratando de que el crecimiento de la complejidad fuera gradual.

Dados los siguientes conjuntos

i) A = { rojo, amarillo, azul } ; B = { rojo, verde, violeta, azul } y
C = { rosa, amarillo, azul, blanco }

ii) A ={ a, b} ; B = { 2, 3 } y C = { 3, 4 } (datos del ej. 18)

Hallar el resultado de las siguientes operaciones entre los conjuntos dados, definiéndolos por extensión y utilizando diagramas de Venn:

a) $A \cup B =$ b) $B \cup C =$ c) $B \cap C =$ d) $A \cup (B \cap C) =$

Como el tercer ejercicio era de un nivel de complejidad y abstracción bastante superior.

Demostrar: $(A-B)\subset(A\cup B)$, $(A\subset B)\Rightarrow(AU(B-A)=B)$, $(A\cap B=\varnothing)\Rightarrow(AUB'=B')$

Se permutó con el siguiente: *Dibujar sobre la recta real y escribir el resultado en forma de intervalo.*

$\{x / x\geq -1\}\cap\{x / -3 < x < 2\}$, $\{x / -3 < x \leq 1\}\cap\{x / x > 2\}$, $\{x / -3 \leq x \leq 0\}\cap\{x / -2 < x < 3\}$

con la finalidad de habituar a los alumnos a utilizar los gráficos como herramienta de resolución antes de abordar las demostraciones. (O)

Además se extendió el enunciado pidiendo que expresaran el resultado como conjunto definido por comprensión y verificaran para algunos elementos del conjunto obtenido, la pertenencia a la intersección de los conjuntos dados. (O). Cuando se verificaron los resultados de las intersecciones, en cada ítem, se hizo hincapié en las condiciones que debían cumplirse. Como modelo de resolución se tratará aquí el primer caso: Si el intervalo $[-1, 2)$ es la solución, entonces cualquier número perteneciente a él debe verificar ambas condiciones simultáneamente; y además ningún número real que esté fuera de dicho intervalo lo debe hacer. Se tomaron valores dentro y fuera del intervalo para verificar que los que pertenecen a él hacen que se cumpla la definición de intersección, expresada como una proposición lógica. La traducción se logró estableciendo las funciones proposicionales que definen a los conjuntos intervinientes en las operaciones: $P(x): x \geq -1$ $Q(x): -3 < x < 2$

Seguidamente se ubicó el conectivo lógico que las vincula, en este caso es "$\wedge$" (conjunción) por ser una intersección, obteniéndose una nueva función proposicional: $P(x) \wedge Q(x)$

Se eligieron algunos valores a utilizar en la comprobación para asignárselos a la indeterminada x, recordando que $(p \wedge q)$ es verdadera sólo cuando ambas proposiciones lo son.

Como una función proposicional al aplicarse a un elemento se transforma en una proposición. Las proposiciones que se obtienen son:

Para $x = 0$ $p = P(0)$ y $q = Q(0)$ que se pueden expresar como:

$0 \geq -1 \wedge -3 < 0 < 2$ cuyo valor de verdad es $V \wedge V \Rightarrow V$

p es V y q es V entonces $p \wedge q$ es V

Para $x = 3 \notin [-1, 2)$ $p = P(3)$ y $q = Q(3)$ que se pueden expresar como:

$3 \geq -1 \wedge -3 < 3 < 2$ el valor de verdad es $V \wedge F \Rightarrow F$

p es V y q es F entonces $p \wedge q$ es F

Para $x= -4 \notin [-1, 2)$ $-4 \geq -1 \wedge -3 < -4 < 2$ con valor de verdad $F \wedge V \Rightarrow F$

p es F y q es V entonces $(p \wedge q)$ es F

Como corolario de esta forma de trabajo se pudieron reconstruir las definiciones de las operaciones entre conjuntos por comprensión, no sólo en forma coloquial sino también simbólicamente de la siguiente manera: $A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$ $A - B = \{x \in A \wedge \notin B\}$

De este modo se tuvo un punto de partida para encarar las demostraciones solicitadas.

La descripción del grupo piloto (las dos comisiones asignadas a las investigadoras)

Durante el dictado del curso se comprobó que para el grupo piloto el dictado de la materia se hacía muy lento, no se podía avanzar de acuerdo al cronograma previsto por los coordinadores del curso. Se solicitó entonces, sólo a los alumnos de este grupo, la edad y el año de egreso del secundario. Se encontró que el 25 % de los alumnos habían terminado el secundario hacía 7 años o más y que el 50 % habían hecho al menos hacía 4 años. De los resultados surgió la siguiente hipótesis de trabajo: *El problema de aprendizaje detectado podría radicar en el lapso de tiempo transcurrido desde el egreso del nivel medio y la* *realización del curso de ingreso a la universidad.* La consecuencia podía ser el olvido, de los temas vistos en la escuela, de allí la dificultad para avanzar en el dictado de la materia con los tiempos estipulados.

La determinación de las características de los alumnos ingresantes

Se diseñó una encuesta anónima para realizar un diagnóstico global -no inicial- que permitiera llegar a una descripción básica del grupo de alumnos del curso. Las variables de interés que se incluyeron en el diseño de la encuesta se agruparon en: variables de caracterización (edad, tipo de escuela,…) y de opinión (temas de mayor dificultad....) El grupo de alumnos encuestado fue seleccionado aleatoriamente el día de la segunda evaluación parcial. Abarcó un grupo heterogéneo respecto a la modalidad de trabajo llevada a cabo hasta ese momento. Se encuestó un total 216 alumnos de los 930 inscriptos.

Algunos resultados de la encuesta

Teniendo en cuenta la edad cronológica según los turnos, se obtuvo que a la mañana concurrió un grupo de alumnos de mayor edad que a la tarde. Se creyó conveniente relacionar este hecho con los años transcurridos entre la finalización de los estudios secundarios y la realización del curso y se obtuvo que El tiempo transcurrido entre el año de egreso del nivel medio y el Curso de Admisión era mayor para los alumnos del turno mañana. Dentro de los temas que más costaron, sobresalieron lógica -45,83%-, polinomios –37,04%- y relaciones y funciones -35,65%-. Llamó la atención que muchos alumnos dijeran que nunca antes habían estudiado "relaciones y funciones".

El análisis y comparación del rendimiento del grupo piloto con respecto al resto

El análisis se efectuó en base a los resultados obtenidos en los dos exámenes parciales. De los 930 alumnos que se inscribieron para realizar el curso, 757 rindieron el primer parcial y 637 el segundo, en ambas instancias lo hicieron 636. El 31,61% resultó "ausente". Sólo 74 de 93 alumnos del grupo piloto rindieron ambos parciales. Para poder comparar el rendimiento de estos alumnos se separaron los puntajes obtenidos. A continuación se tabulan los resultados finales del curso.

TOTAL DE ALUMNOS

Puntaje	Cant. de alumnos	F%
1	12	1,89
1,5	19	4,88
2	10	6,45
2,5	11	8,18
3	14	10,38
3,5	17	13,05
4	22	16,51
4,5	30	21,23
5	37	27,08
5,5	52	35,23
6	54	43,72
6,5	45	50,80
7	60	60,23
7,5	64	70,29
8	58	79,41
8,5	51	87,43
9	47	94,82
9,5	17	97,49
10	16	100,00
Total general	636	
MODA	7,5	
PROMEDIO	6,36	
MEDIANA	6,5	

GRUPO TESTIGO

Puntaje	Cant. de alumnos	F%
1	10	1,78
1,5	18	4,99
2	9	6,59
2,5	7	7,84
3	13	10,14
3,5	15	12,81
4	18	16,02
4,5	25	20,47
5	32	26,16
5,5	48	34,71
6	45	42,72
6,5	34	48,71
7	57	58,91
7,5	53	68,34
8	55	78,13
8,5	46	86,30
9	45	94,30
9,5	16	97,15
10	16	100,00
Total general	562	
MODA	7	
MEDIANA	7	
PROMEDIO	6,42	

GRUPO PILOTO

Puntaje	Cant. de alumnos	F%
1	2	2,7
1.5	1	4,05
2	1	5,40
2,5	4	10,81
3	1	12,17
3,5	2	14,87
4	4	20,28
4,5	5	27,04
5	5	33,80
5,5	4	39,21
6	9	51,37
6,5	11	66,23
7	3	70,28
7,5	11	85,14
8	3	89,19
8,5	5	95,95
9	2	98,65
9,5	1	100,00
Total general	74	
MODA	6,5 y 7.5	
MEDIANA	6.5	
PROMEDIO	6	

Con respecto a los grupos testigo y piloto se tuvieron los siguientes resultados:

	grupo testigo %	**grupo piloto** %
entre 4 y 6,5 puntos	29,90	36,49
7 o más puntos	51,29	33,77
aplazados	12,81	14,87

El nivel de aplazados del grupo piloto fue superior –un 16% más- que el del resto de los alumnos. La distribución de aprobados para el grupo testigo presentó mayor concentración en los puntajes más altos sin embargo para el grupo piloto en los comprendidos entre 4 y 6,5 . A partir del seguimiento realizado, se comprobó que el rendimiento del grupo piloto mejoró al comparar los resultados de los dos parciales rendidos

Resultados del Primer Parcial

TOTAL DE ALUMNOS

1	82	10,83
2	118	26,46
3	23	29,46
4	105	43,33
5	92	55,48
6	102	68,95
7	85	80,19
8	91	92,21
9	31	96,31
10	28	100,00
Total general	757	
MODA	2	
MEDIANA	5	
PROMEDIO	4,97	

GRUPO TESTIGO

1	65	9,79
2	103	25,30
3	20	28,31
4	90	41,86
5	78	53,61
6	87	66,72
7	79	78,62
8	85	91,42
9	31	96,09
10	26	100,00
Total general	664	
MODA	2	
MEDIANA	5	
PROMEDIO	5,08	

Grupo piloto

1	17	18,28
2	15	34,40
3	3	37,63
4	15	53,76
5	14	68,81
6	15	84,94
7	6	91,39
8	6	97,84
10	2	100,00
Total general	93	
MODA	1	
MEDIANA	4	
PROMEDIO	4,15	

La proporción de alumnos ausentes es similar en ambos grupos. El 37,63 % del grupo piloto no aprobó mientras que para el resto sólo el 12,17% no aprobó. Obtuvieron entre 4 y 6 puntos el 47,31 % de los alumnos seleccionados y del resto el 38,41%. Con 7 o más puntos aprobó el 15,06% del grupo piloto en contraposición al 33,28% del resto. Las diferencias entre ambos grupos se lograron disminuir para la segunda evaluación.

RESULTADOS DEL SEGUNDO PARCIAL

TOTAL DE ALUMNOS

1	34	5,34
2	36	10,99
3	6	11,93
4	29	16,48
5	27	20,72
6	56	29,51
7	90	43,64
8	105	60,12
9	96	75,19
0	158	100,00
Total general	637	
PROMEDIO	7,26	
MEDIANA	8	
MODA	10	

GRUPO TESTIGO

1	29	5,15
2	35	11,37
3	4	12,08
4	26	16,70
5	24	20,96
6	49	29,66
7	75	42,98
8	95	59,85
9	84	74,77
10	142	100,00
Total general	563	
PROMEDIO	7,26	
MEDIANA	8	
MODA	10	

Grupo piloto

1	5	6,76
2	1	8,11
3	2	10,81
4	3	14,87
5	3	18,92
6	7	28,38
7	15	48,65
8	10	62,16
9	12	78,38
10	16	100,00
Total general	74	
PROMEDIO	7,23	
MEDIANA	8	
MODA	10	

Los puntajes obtenidos por los alumnos de ambos grupos fueron muy parejos. El 10,81% del grupo piloto no aprobó mientras que en el resto el 12,08% no lo hizo. Prácticamente el mismo porcentaje de alumnos obtuvo entre 4 y 6 puntos. Con 7 o más puntos aprobó el 71,62% del grupo piloto y el 70,34% de los alumnos de las otras comisiones. Si bien los alumnos de las comisiones asignadas para utilizar la metodología propuesta por las investigadoras alcanzaron y superaron ligeramente el rendimiento final de los demás alumnos, las notas del primer examen influyeron en los puntajes finales.

Bibliografía

Ángel, M. E. (2000) *Matemática. ¿Leo, traduzco, resuelvo*". Ed. C&C. Bs. As. Argentina

Bortolotto, Fernández, Polola (2000),*Análisis y Resolución de Situaciones problemáticas.* Ed. C&C. Bs.As.

Lakatos, I. (1986) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza Editorial. 3ªEd.

Polea, G (1995) *Como plantear y resolver problemas*. Ed. Trilla. México. 19na impresión.

Pozo, J. (2000) Entrevista realizada por las Lic. Anahí Mastache y Constanza Necuzzi en el marco del II Congreso Internacional de *Educación Debates y Utopías*. Julio.

Skemp, 1993 *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Ed. Morata.