VARIACIÓN Y VARIABLES CON GEOMETRÍA DINÁMICA

Marco Santillán, Arturo Ávila y Víctor Pérez
CCH-UNAM, México
marcoant50@hotmail.com

Resumen

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación sobre la aplicación de tecnología computacional en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas con alumnos de nivel medio básico o secundaria (séptimo a noveno grado) y nivel medio superior o bachillerato (décimo a doceavo grado), en particular, trata de entender la función mediadora del efecto de "arrastre" del software de geometría dinámica en la cognición de sujetos que estudian las nociones de variación y variable. Aquí reportamos los resultados de una exploración, usando *Cabri*, en el aprendizaje de esas nociones con estudiantes de nivel medio básico de 13-14 años de edad. Se describen las actividades, las respuestas de los estudiantes y una experiencia que sugiere el potencial de la verbalización de los resultados por los estudiantes en el proceso de simbolización algebraica.

Introducción

Las variables son utilizadas en la simbolización de regularidades o patrones, para expresar generalizaciones y, esencialmente, en la representación de la relación entre dos o más cantidades que están cambiando dentro de ciertos rangos. La enseñanza tradicional del álgebra plantea grandes dificultades de aprendizaje para los estudiantes novatos que, además de tratar con números, se enfrentan con símbolos literales que tienen sentido de incógnitas o números desconocidos, de números generales o parámetros y de variables ligadas por alguna relación funcional. De los diferentes significados para estos símbolos, el de variable es quizá, el más difícil para quienes inician sus contactos con el álgebra. Por otra parte, junto a los problemas asociados a la variable, también hay problemas con la variación. Moreno y Santillán (2002) reportan que estudiantes de bachillerato (15-18 años), a todos los niveles, tienen dificultades en la comprensión de las diferentes formas de representación de la variación. También, encuentran que los estudiantes que tienen problemas para percibir la variación, el concepto de variable les resulta más abstracto y difícil de entender. Ante las dificultades asociadas con el aprendizaje de la variable se han desarrollado y utilizado ambientes computacionales, aun en sujetos que no han iniciado formalmente la enseñanza en álgebra (Tall & Thomas, 1991; Graham & Thomas, 2000) Una aplicación importante de una herramienta computacional en problemas de enseñanza y aprendizaje se ha realizado con *Logo*, un software utilizado con diferentes enfoques para el aprendizaje de la variable (Moreno & Sacristán, 1995; Noss & Hoyles, 1996) Investigaciones apoyadas en *Logo* muestran que niños de 8 años de edad pueden acercarse a la noción de número general apoyándose en *Logo* (Noss, 1986). En ese ambiente de cómputo, algunos niños han sido capaces de considerar a los nombres de las "entradas" de los procedimientos como representantes de un rango específico de valores, esto es, potencialmente una variable. En su propuesta de reducir al mínimo la manipulación simbólica y al mismo tiempo introducir situaciones algebraicas en ambientes menos abstractos, Yerushalmy y Schwartz (1993), plantearon un enfoque visual del álgebra centrado en el concepto de función y basado en el software *Function Analyzer*. Siguiendo a Schoenfeld y Arcavi (1988), nosotros explotamos el "elemento dinámico" del efecto de *arrastre* de *Cabri* para variar la posición y dimensiones de objetos construidos en ese ambiente y generar así, un acercamiento diferente al tradicional que se apoya sólo en lápiz y papel, para presentar las nociones de variación y variables en relación funcional. El efecto de arrastre se utiliza para destacar la percepción de la variación, ver qué cambia, entender por qué cambia y sobre esta base, concebir la relación funcional. La variación y la variable son nociones problemáticas, es común encontrar estudiantes de bachillerato (15-17 años) que aún no han madurado el concepto de variable como una relación funcional, por ejemplo, conciben la tabla de valores numéricos sólo como una situación donde se proporciona un valor para obtener otro ejecutando una serie de operaciones aritméticas, esto es, asocian valores a dos cantidades distintas, las variables, sin entender que existe un nexo entre ellas. Nosotros hemos encontrado alumnos de 17 años que trabajan con las tablas numéricas la correspondencia entre variables pero les resulta totalmente ajena la idea de variación conjunta.

El arrastre, la variación y las variables (elementos conceptuales) La representación funcional de la variación expone la naturaleza cambiante de la variable, esto, sin embargo, no es captado fácilmente por los estudiantes novatos en álgebra aunque construyan tablas de datos y gráficas, el carácter abstracto de la variable no desaparece, aun con el apoyo de calculadoras o computadoras para ejecutar las tablas y gráficas. Pero la variación tiene un formato más cercano a la intuición cuando se presenta dinámicamente, entonces, se puede hacer evidente que algunas cosas están cambiando y, si el aprendiz es quien manipula y controla la variación, se abren nuevas oportunidades para que la perciba y entienda. En este trabajo se asume que el software de geometría dinámica (Cabri, en este caso) puede funcionar como "vía" para transitar desde las cantidades fijas que representan longitudes, áreas y ángulos y las cantidades variables; desde la percepción de la variación hasta el entendimiento de la variable. Con la geometría dinámica se puede construir un triángulo, por ejemplo, y modificar las dimensiones y sus ángulos sucesivamente conforme se arrastra uno de sus vértices en la pantalla de la computadora. Asignando etiquetas (letras) a los valores que cambian, se presentan como versiones más concretas de cantidades variables. Por otra parte, el arrastre, una forma de acción representada[7], genera una percepción "continua" de imágenes del dibujo a través del continuo temporal. La ilusión de continuidad de los cambios de posición del dibujo se manifiestan como movimiento. Las transformaciones sucesivas del dibujo son una premisa de la visualización, de la posibilidad de concebir la variación. Esa ilusión de continuidad (de las transformaciones sucesivas) no son sólo imágenes distintas, como fotografías, son relaciones espacio-temporales que llenan de sentido, de un nuevo sentido al dibujo y al número asignado a una etiqueta que, al estar cambiando conforme se arrastra un punto, por ejemplo, se transforma potencialmente en variable. Así como la variación más que percibirse debe concebirse, la simbolización de las variables no es un proceso de anotar lo que se ve sino de la toma de conciencia de la generalización asociada a ella. Presentar simultáneamente elementos del dibujo en movimiento y los valores numéricos que se actualizan genera un potencial para apoyar la comprensión de la variación y las variables. El software pone las condiciones, el sujeto debe procesarlas, coordinarlas. La coordinación da acceso al entendimiento en la medida en

[7] Con la computadora es posible representar objetos matemáticos (funciones, matrices, vectores) y representar acciones sobre esos objetos como amplificar una región de una gráfica enfocada en un punto. Hacer zoom es una acción representada.

que una representación, el dibujo o los valores numéricos, funciona para darle sentido a la otra. Pero, la coordinación no es ejecutada por la computadora, ésta es una actividad humana que integra la percepción del movimiento, la lectura de los valores y la manipulación del elemento que es arrastrado.

El estudio experimental. Participaron 28 estudiantes que iniciaban el octavo grado de instrucción básica en una escuela pública de una zona proletaria del norte de la ciudad de México. Ningún estudiante conocía el software y la mayoría tuvo su primera experiencia con una computadora en esta investigación por lo que fue necesario un periodo de entrenamiento donde los estudiantes aprendieron a construir figuras, realizar mediciones, usar etiquetas, comentarios y se familiarizaron con el efecto de arrastre. Antes de iniciar el trabajo con la computadora se aplicó un cuestionario que valoraba la capacidad de los participantes para imaginar algunas transformaciones elementales en figuras geométricas sencillas, preguntas sobre variables, funciones y actividades con tablas de valores y gráficas. Algunas preguntas del cuestionario fueron: P1) El precio de cada fotocopia es de 20 centavos. ¿Cuánto se paga por 12 fotocopias? P2) ¿Cuánto se paga por 237 fotocopias? P3) Escribe una relación que exprese, en general, el precio para un número cualquiera de copias. P4) Se sabe que la temperatura en el mes de mayo es tal que aumenta, a partir del día primero, medio grado cada día. Si el último día de abril la temperatura fue de 22º C ¿Qué temperatura hay el día primero? P5) ¿Qué temperatura habrá el día 25? P6) Escribe una relación que exprese, en general, la temperatura de acuerdo al día. G6) El punto *P* se encuentra sobre el segmento *AB*. Si *P* está siempre a la misma distancia de *A* y *B* ¿cuánto mide *AP* si *AB* es igual a 10, 15, 17 y 21 cm?. G9) La "base" de un rectángulo mide inicialmente 6 cm y la "altura" 4 cm de modo que el área es de 24 cm^2 y su perímetro mide 20 cm. Si el perímetro permanece sin cambiar ¿cuánto mide el área del rectángulo si aumentamos la base a 7 cm? G10) Si la base mide 8 cm y el perímetro sigue siendo igual a 20 cm ¿cuánto mide la altura? G15) Dibuja tres rectángulos diferentes con perímetro de 20 cm y anota el valor de su área. G17) La longitud de una cuerda es de 20 cm ¿cuántos rectángulos pueden construirse con ella si la "altura" debe permanecer igual a 5 cm?
Aunque todos respondieron correctamente P1, P2 y P5, nadie respondió P3 ni P6, ningún estudiante pudo escribir una relación general. Solo dos respondieron correctamente G6, tres estudiantes respondieron correctamente G10 y las respuestas a G17 fueron del tipo: "ninguno", "uno", "no sé que pasa", "no entiendo". En esta pregunta los estudiantes no lograron imaginar que una figura puede variar permaneciendo constante su perímetro. Para el estudio experimental se formaron equipos de dos estudiantes, cada pareja trabajó en una computadora, y se diseñaron ocho actividades, de las cuales, dos se utilizaron en el periodo de entrenamiento. Los datos se recogieron en un formato tipo práctica que resolvía y entregaba cada pareja. Finalmente, se realizaron dos entrevistas grabadas en video. En el estudio se trabajaron actividades como las que se muestran abajo (A1, A2 y A3).
A1).- Construye un dibujo semejante al mostrado en la figura 1 de modo que *P* es un punto libre sobre *AB* y *M, A, N,* y *B* son fijos con *MA* y *NB* perpendiculares a *AB*. Mide los segmentos *PA*, *PM* y *PN*, simboliza *PA* por *x* y a la suma de *PM* con *PN* por *z*. Arrastra *P*, observa detenidamente y responde: a) ¿Qué sucede cuando se arrastra el punto *P*? b) ¿Cuándo cambia el valor de *z*? c) ¿De qué depende la suma (*z*) de *MP* y *NP*? d)¿Hay un valor de *z* que sea el mayor?

A2).- Construye un dibujo como el mostrado en la figura 2 en el que *P* sea un punto libre, *PM* es perpendicular al eje horizontal y *MN* perpendicular al eje vertical. Designemos a *OP* como *b*, la base del rectángulo *OPMN*, y a *ON*, la altura, como *a*. Mide los segmentos *OP* y *OM*, arrastra el punto *P*, observa detenidamente y contesta lo siguiente: a) ¿Qué cambia cuando se arrastra el punto *P*? b) ¿cambia el perímetro del rectángulo? c) ¿cambia el área? d) ¿de qué dependen los valores del área y el perímetro? Puedes utilizar las herramientas de *Cabri* que consideres necesarias.
A3).- Construye un dibujo como el mostrado en la figura 3 de modo que P sea un punto libre sobre la circunferencia. Explora la figura y responde lo siguiente: a) Al mover el punto *P* ¿qué cambia? ¿De qué depende?.

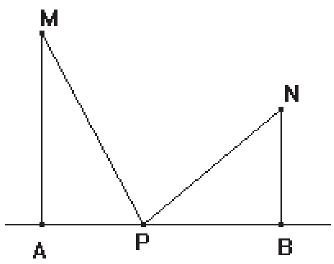

Figura 1

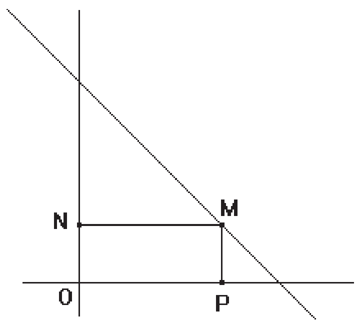

Figura 2

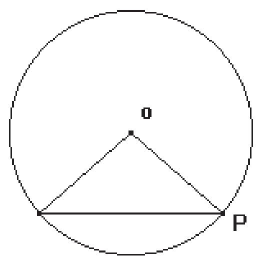

Figura 3

Se formaron 14 parejas para trabajar con la computadora. Después de ponerse de acuerdo, cada pareja entregaba el reporte con sus resultados en hojas impresas que contenía el desarrollo de la actividad. Por los propósitos de este estudio no era importante que los participantes construyeran la figura, si tenían problemas podían copiar el archivo que la contenía y seguían adelante. No fue registrada una diferencia notable en las respuestas si los estudiantes construían o no la figura. Las actividades pretendían establecer, a partir de lo observado en la pantalla, una relación entre dos o más elementos de la figura variando uno de ellos. Durante el desarrollo de las actividades no se planteó que los estudiantes simbolizaran las relaciones que encontraban pero se pedía que después de discutir y ponerse de acuerdo, cada pareja las verbalizara y las anotara. Finalmente, el grupo discutía y seleccionaba la que consideraban la correcta y la anotaba debajo de la suya. Mientras los estudiantes realizaban las actividades el instructor a cargo del estudio era solicitado para aclaraciones limitándose a resolver dudas con los comandos del ambiente o a guiar la discusión sin involucrarse en resolver directamente las preguntas. Su papel sí fue determinante para que las exploraciones de los estudiantes fueran sistemáticas. Además de las dificultades para construir las figuras, en las primeras actividades no fue fácil arrastrar elementos de la figura, percibir qué variaba y conectar esa variación con los valores que se actualizaban. Una vez que los estudiantes lograron coordinar la manipulación del objeto con la percepción del movimiento comenzaron a relacionar la variación con las variables, con sus valores que cambiaban conforme arrastraban el objeto seleccionado. Sin embargo, algunos estudiantes identificaron al arrastre como la variable responsable de variación, esto es, el arrastre fue asociado con la variable independiente. Conforme se desarrollaron las actividades, la mitad de los equipos (7) comenzó a desligar el arrastre como una variable. Los resultados del estudio muestran que, cuando las figuras fueron sencillas, la identificación de las variables no presentaba problemas y los enunciados orales, y las anotaciones respectivas, eran buenas descripciones de la relación funcional. Conforme las figuras tenían más elementos los estudiantes tuvieron dificultad para identificar las variables y grandes problemas para enunciar las relaciones. Al finalizar el estudio la generalidad de los participantes lograban identificar los elementos que variaban y ocho de las catorce parejas no tuvo problemas para reconocer las variables independientes y dependientes. Algunos reportes tienen anotaciones de verbalizaciones como las siguientes: “esta variable ( ) cambia cuando esta otra ( ) cambia”. “al variar *a*, cambia *b*”. “La suma *z* depende de los valores de *x*”. “Los valores del área cambian al cambiar la longitud de la *base*” Un mes después de terminado el estudio se realizaron dos entrevistas videograbadas, la primera con Nadia, una estudiante de 14 años con un desempeño regular en el estudio. En la segunda entrevista participó Javier, también de 14 años, el estudiante con mejor desempeño en el estudio.

Entrevista 1

A Nadia (N) se le plantea la situación mostrada en la figura 4. El entrevistador (E) propone lo siguiente:

5 (E) “Mueve, arrastra el punto P y dime ¿qué cambia?”
6 (N) “*y* y *x*... Esto no se modifica” (señala el segmento AP)
7 (E) “Y ¿quién depende de quién?”
8 (N) “*x* depende del arrastre …del …(guarda silencio), del …”
9 (E) “Si dejamos de lado el arrastre. ¿Qué es lo que varía?”
13 (N) “Las medidas del segmento *x* y las medidas del segmento *y*”
14 (E) “ Y, ¿quién depende de quién?”
15 (N) “*y* depende de la medida de *x*”
16 (E) “¿Cuántas variables tenemos?”
17 (N) “Dos, la *x* y la … (señala el segmento *y*)”
18 (E) “¿Puedes escribir la relación que existe allí?”

Después de pensar unos instantes la estudiante escribe en el pizarrón la expresión: $\boldsymbol{y = 3.0 + x}$.

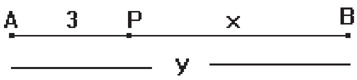

Figura 4

Entrevista 2

A Javier (J), se le plantea una actividad semejante a P1 donde el costo de cada copia es de cincuenta centavos. En esta parte de la entrevista no se utiliza la computadora. El entrevistador (E) cuestiona a J:

1 (E) “¿Qué precio debes pagar por 13 fotocopias?”
2 (J) “Seis pesos y cincuenta centavos”
Se le van planteando al estudiante otras preguntas que contesta correctamente, entonces el entrevistador le formula una nueva situación:
11 (E) “¿Puedes obtener una relación para un número cualquiera de copias?”
Después de pensar brevemente el estudiante anota en el pizarrón la expresión: $\boldsymbol{a\,(0.5) = b}$
12 (E) “¿ Qué significa 0.5?”
13 (J) “El precio por una copia”
14 (E) “Bien, ¿la letra *a* que significa?
15 (J) “El número de copias”
16 (E) “¿Y la letra *b*?”
17 (J) “El costo total de las copias”

Discusión. Los dos estudiantes entrevistados tuvieron un desempeño pobre en el primer cuestionario. Como todos, no respondieron las preguntas relacionadas con la simbolización de la variación, P3 y P6. Durante el desarrollo de las actividades estos estudiantes se convirtieron en lideres de sus respectivas parejas, avanzaron significativamente y en sus reportes escritos señalaron acertadamente las relaciones entre las variables. Pero, ¿cómo se explica la aparición de la capacidad de simbolización que anteriormente no estaba presente en estos estudiantes? Desde luego, el efecto de arrastre juega un papel importante, pero es insuficiente para explicar la simbolización, el arrastre sólo abre la posibilidad de percibir la variación. Las actividades también aportan, su diseño apunta a resaltar la variación y la conexión entre las variables en juego. El aspecto más importante, sin embargo, parece jugarlo la verbalización que hacen los estudiantes de la variación, el ejercicio de expresar oralmente la coordinación de los valores que aparecen en la pantalla, que cambian conforme es arrastrado un elemento de un dibujo, con la variación de ciertos elementos de ese dibujo. La verbalización, las palabras que usan los estudiantes tiene además, la huella de la herramienta utilizada. Es común la referencia al término "arrastrar" por los estudiantes, ellos dicen y escriben: "Si arrastramos el punto *a*, entonces la longitud del segmento va cambiando". "Cuando se arrastra el punto *p* hacia la derecha el área del triángulo disminuye. El área depende de la distancia recorrida por *p*". Los estudiantes aprendieron a medir y etiquetar los objetos que variaban y el instructor enfatizó que se identificara a la etiqueta con la variable. Como fue mencionado, los estudiantes tuvieron problemas para desprenderse de identificar el arrastre como una variable. En la entrevista con Nadia puede observarse que aunque ella tiene ese problema, puede simbolizar correctamente.

Conclusiones

Entender a través de una representación no es fácil. Percibir el cambio en diferentes registros y conectarlos, requiere aprendizaje. Aun percibir la variación apoyada con computadoras enfrenta dificultades, pero el software de geometría dinámica más que apoyar la percepción de la variación y proporcionar diferentes formas de representación, da al usuario la posibilidad de experimentar, de descubrir las relaciones estructurales de un dibujo y conectarlas con las variables. Se requiere entrenamiento con el software pero una vez que el sujeto se ha familiarizado, dispone de una nueva herramienta que le permite nuevos acercamientos a algunos temas problemáticos de la matemática. Esta exploración con el software de geometría dinámica nos lleva a considerar que la percepción de la variación es parte del proceso de aprendizaje del concepto de variable en una relación funcional Percibir y entender la variación parece ayudar a los estudiantes a identificar las variables y la verbalización de las relaciones entre las variables apoya la simbolización de las mismas. Si bien las simbolizaciones que se muestran son muy elementales, creemos que debe seguirse explorando el potencial del arrastre, junto con el diseño de actividades mejor enfocadas, para apoyar los procesos de simbolización que seguirán siendo, aun con tecnología, un problema.

Bibliografía

Graham, A & Thomas, M. (2000) *Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphiccalculator*. In Educational Studies in Mathematics. **41**: 265-282.

Moreno, E. & Sacristán, A. (1996) *On visual and symbolic representations* In R. Sutherland & J. Mason (Eds.) Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education. Springer NATO ASI Series F, Vol.138, (pp. 178-189).

Moreno, L. & Santillán, M. (2002) *Visualizing and understanding variation*. In D. Mewborn et. al (Eds.) Proceedings of the twenty-fourth Annual Meeting PME-NA. Vol. 2, pp. 907-914. Athens, Georgia.

Noss, R. (1986) Constructing a conceptual framework of elementary algebra through LOGO programing. In

Educational Studies in Mathematics**17**: 335-357.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996) *Windows on Mathematical Meanings*: Learning Cultures and computers. Mathematics Education Library Vol. 17. Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988) *On the meaning of variable*. In Mathematics Teacher 81(6), pp. 420- 427.

Tall, D. & Thomas, M. (1991) *Encouraging versatile thinking in algebra using the computer*. In Educational Studies in Mathematics. **22**: 125-147

Yerushalmy, M. & Schwartz, J. (1993) Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically interesting. In T. Romberg; E. Fenema & T. Carpenter (Eds.) Integrating Research of the Graphical Representation of functions. Lawrence Erlbaum Publishers.