

FUNCIONES EMBOTELLADAS

Edison De Faria Campos
 Universidad de Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Resumen

Esta es una propuesta didáctica que consta de una serie de actividades relacionadas con la representación gráfica de ciertas funciones y su vinculación con una representación en un contexto físico o icónico (dibujo de un recipiente). Las actividades son de dos tipos: Dadas las formas de los recipientes, bosquejar las gráficas correspondientes, teniendo en cuenta que la variable independiente es la altura del líquido y la variable dependiente es el área de la superficie del líquido (o bien el volumen del líquido dentro del recipiente); dadas las gráficas del área de la superficie del líquido versus altura, bosquejar los posibles recipientes correspondientes. Ambas actividades son diseñadas para propiciar el cambio de un sistema de representación a otro (Janvier, 1987; Duval, 1992, 1999; Hitt, 1992).

Introducción

En 1985 el Shell Centre for Mathematical Education (1990) publicó el módulo “El lenguaje de las funciones y gráficas” con un gran número de actividades para realizar en el aula. Estas actividades, ideadas principalmente por Claude Janvier, proponen el desarrollo de la capacidad de interpretar y usar la información proporcionada por las representaciones gráficas, pues según Janvier, muchos estudiantes están familiarizados con dichas representaciones, pero son incapaces de extraer la información global que contienen. Es así que Janvier (1987) justifica la importancia en las posibles “traducciones” entre cuatro modos de representación de la función de acuerdo al cuadro abajo:

Representación	Gráfica	Tabular	Analítica	Verbal
Gráfica	Reelaboración de la gráfica	Estimación de valores de las variables	Elección de una familia verosímil	Interpretación de la gráfica
Tabular	Representación cartesiana de puntos	Reelaboración de la tabla	Realización de un ajuste	Interpretación y análisis de datos
Analítica	Representación gráfica	Cálculo de valores particulares de la fórmula	Manipulación algebraica o analítica de la fórmula	Identificación y análisis de la fórmula
Verbal	Construcción de un esbozo	Comparación de valores de las variables	Elaboración de un modelo funcional	Discusión y reflexión

Investigaciones realizadas por Duval (1992) reportan que en estudios en donde se presente un enunciado en el cual están en juego varios sistemas de representación, es importante analizar las articulaciones que hay de un sistema a otro.

Las posibilidades de traducciones entre los distintos sistemas de representaciones llevaron a Janvier a idear varias actividades en las que se prima la utilización de distintos modos de representación de la función y el paso de un modo de representación a otro. Una de las

actividades se denominó curvas de llenado y consistía en solicitar a los estudiantes que hicieran un esbozo de una curva que expresara como varía con el tiempo, la altura del líquido contenido en cada una de las botellas, cuando las mismas son llenadas a caudal constante.

El problema inverso también es importante, es decir, dibujar un posible recipiente que corresponda a una gráfica dada tiempo-altura, y fue investigado por Hitt (1992) en México. En este artículo propongo algunas actividades relacionadas con curvas de llenado y el problema inverso, que pueden ser aplicadas tanto a estudiantes de la educación secundaria como a estudiantes universitarios en un primer curso de cálculo. De esta forma realizamos conversiones entre diferentes registros de representaciones, Duval (1992,1999), Janvier (1987).

Considero que este tipo de actividad presenta una ventaja adicional: permite visualizar el comportamiento global de la gráfica de una función dado su modelo físico o icónico, o bien el modelo del recipiente, dado la representación gráfica de elementos del mismo. Sabemos que el límite o la derivada de una función en un punto dado son propiedades locales de la función, mientras que la integral definida proporciona una comprensión más global de una función. Ambos comportamientos, local y global, permiten que tengamos una mayor comprensión del objeto de estudio, las funciones.

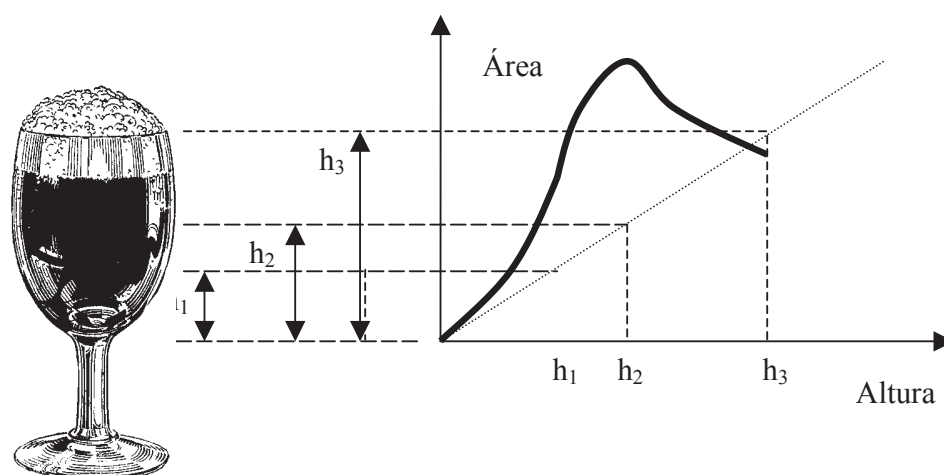
Actividad 1: Esbozar las gráficas correspondientes a llenado de recipientes

Objetivo: Pasar de la representación física a la representación gráfica

Ejemplo: El recipiente abajo (una copa) se encuentra inicialmente vacío, sobre una superficie horizontal plana. Empezamos a llenarlo despacio (sin inclinarlo) de tal forma que la superficie del líquido siempre se encuentre en equilibrio y coincida con la sección transversal del recipiente. Bosquejar una posible gráfica que corresponda al llenado de la copa, si la variable independiente es la altura del líquido y la dependiente es el área de la superficie del líquido.

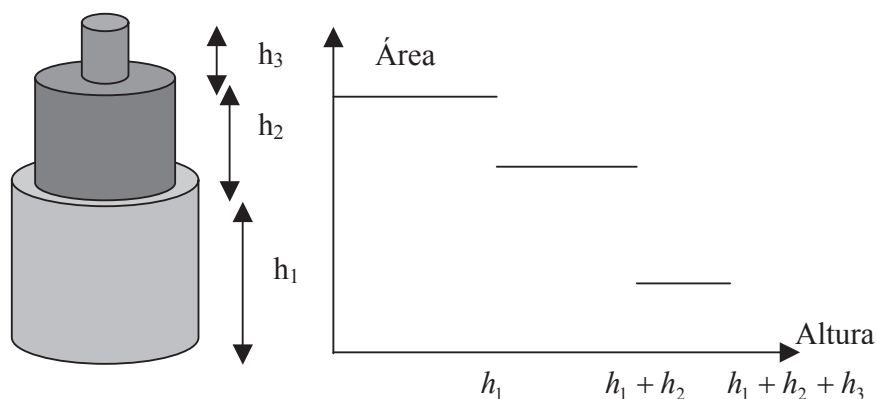


En este caso, el área inicial es igual a cero (recipiente vacío). Cuando introducimos el líquido, el área de la superficie – con forma aproximadamente circular – aumenta con la altura, inicialmente de manera muy pronunciada, posteriormente más despacio, hasta llegar a un valor máximo. A partir de la altura correspondiente al área máxima, el área empieza a disminuirse lentamente hasta alcanzar un valor límite, correspondiente a la copa llena de líquido. Por lo tanto una posible representación gráfica que corresponde a la figura dada es la siguiente:



El área máxima corresponde a la altura h_2 , mientras que a la altura h_1 corresponde un punto de inflexión. Aquí no utilizo ninguna escala para los ejes coordenados, por no conocer las dimensiones reales de la copa, pero para facilitar la ubicación de las alturas dibujé una recta que supuestamente corresponde a la gráfica de ecuación $y = x$.

En este ejemplo se supone que la forma de la copa es “suave” en el sentido de que las curvas resultantes son continuas, pero podemos diseñar recipientes cuyas gráficas corresponden a funciones discontinuas, como la siguiente botella:



De esta forma podemos asociar gráficas – correspondientes al registro de representaciones gráficas de funciones – a la actividad de llenado de botellas (objetos físicos). Esto me llevó a sugerir el nombre de la actividad como “funciones embotelladas”.

Las siguientes actividades fueron aplicadas a un grupo de 25 estudiantes de enseñanza de matemática de la Universidad de Costa Rica, videograbadas y analizadas con todo el grupo.

Problema: Dadas las formas de los siguientes recipientes (no aparecen en este artículo debido a la falta de espacio), bosquejar las gráficas correspondientes, teniendo en cuenta

que la variable independiente es la altura del líquido y la variable dependiente es el área de la superficie del líquido.

Actividad 2: Esbozar las gráficas correspondientes a llenado de recipientes

Objetivo: Pasar de la representación física a la representación gráfica

Problema: Para los recipientes de la actividad 1, esbozar las gráficas correspondientes, si la variable independiente es la altura y la variable dependiente es el volumen del líquido dentro del recipiente.

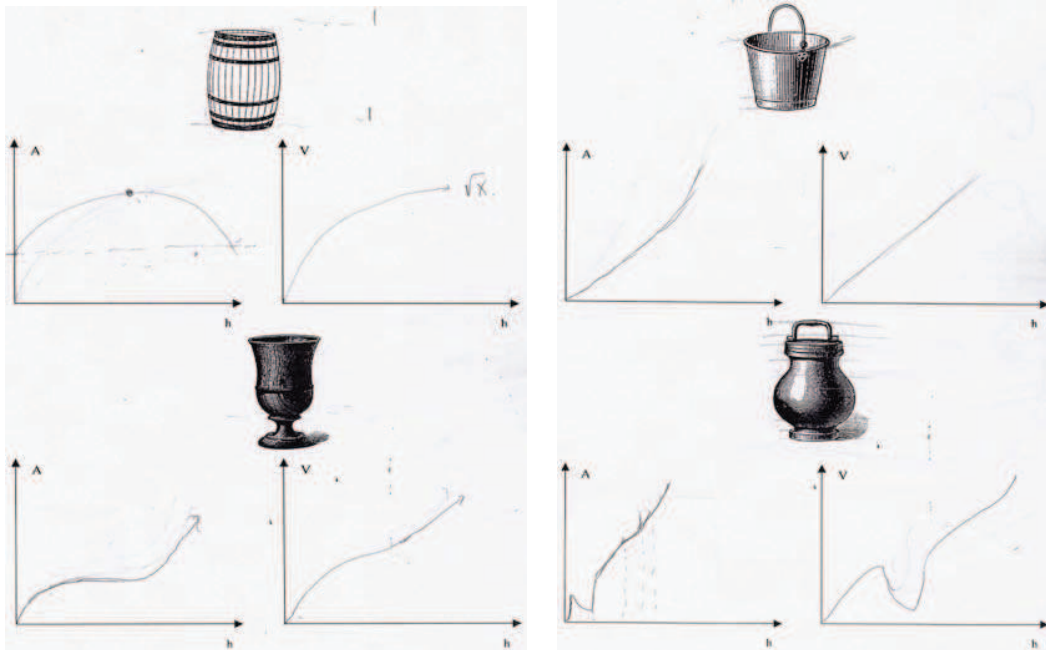
La última actividad corresponde al problema inverso, es decir, dibujar posibles recipientes que correspondan a gráficas dadas. En todas las representaciones gráficas la variable dependiente corresponde al área de la superficie del líquido dentro del recipiente, mientras que la variable independiente corresponde a la altura del líquido. Para las gráficas dadas, ¿existirá algún recipiente que sea imposible de construir?

Actividad 3: Esbozar los recipientes correspondientes a las gráficas dadas

Objetivo: Pasar de la representación gráfica a la física

Problema: Dadas las gráficas del área de la superficie del líquido versus altura (no aparecen debido a la falta de espacio), bosquejar los recipientes correspondientes.

A seguir exhibo algunas muestras de las soluciones presentador los y las estudiantes.



Esbozar los recipientes correspondientes a las gráficas dadas
Objetivo: Pasar de la representación gráfica a la física

Problema: Dadas las siguientes gráficas del área de la superficie del líquido versus altura, bosquejar un posible recipiente.

Esbozar los recipientes correspondientes a las gráficas dadas
Objetivo: Pasar de la representación gráfica a la física

Problema: Dadas las siguientes gráficas del área de la superficie del líquido versus altura, bosquejar un posible recipiente.

Es interesante observar que varios estudiantes intentan seguir la forma de la gráfica cuando esbozan el recipiente. Además pierden la proporción entre los valores del área cuando realizan la conversión entre la representación gráfica y la icónica. Otro hecho curioso es que en algunos casos existe la tendencia a buscar la representación algebraica para la función, como en la primera figura $V = \sqrt{x}$ (en todo caso debería ser $V = \sqrt{h}$). Es posible que esta sea la representación más utilizada por los docentes cuando desarrollan el tema de funciones.

Conclusiones

Estoy plenamente de acuerdo con la afirmación de Kaput (1992) de que los sistemas de representaciones son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos y sus relaciones y de las actividades matemáticas que éste ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos. Actividades como las propuestas en este artículo son significativas para los estudiantes por su conexión con situaciones de la vida real y permiten que el docente utilice materiales concretos (recipientes reales) con el fin de que los estudiantes y las estudiantes exterioricen las distintas representaciones mentales que poseen de un determinado concepto mediante diagramas, esbozos de curvas, frases y símbolos. Además, este tipo de actividad abre nuevas posibilidades para que el sujeto pueda tener una comprensión global de la gráfica de una función, y puede ser fuente de inspiración para que docentes y estudiantes puedan trabajar juntos en la construcción significativa del conocimiento matemático.

Una pregunta que sería importante investigar y que se relaciona con las actividades realizadas es: ¿Cómo podríamos utilizar la tecnología digital – calculadoras graficadoras o computadoras – para simular el llenado de recipientes con formas conocidas, y construir las

representaciones gráficas correspondientes?, ¿Podemos modelar las ecuaciones - representación algebraica - que representan el llenado de recipientes?

Referencias

- Duval, R. (1992) *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía & Grupo de Educación Matemática. Trad. Myriam Vega Restrepo. Colombia.
- Hitt, F. (1992). *Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Evasión de representaciones analíticas*. Memorias del IV Simposio Internacional sobre investigación en Educación Matemática. CINVESTAV-IPN, Departamento de Matemática Educativa.
- Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. (1992). 'Technology and Mathematics Education' en D. A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, N.Y.: Macmillan.
- Shell Centre (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de Publicaciones. Servicio Editorial Universidad del País Vasco, Bilbao.