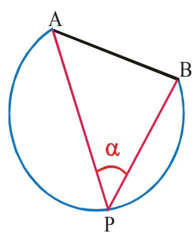
SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: RE- CREANDO EL ARCO CAPAZ

Cristina Ochoviet, Yacir Testa, Mónica Olave, Mario Dalcín.
Consejo de Educación Secundaria, Uruguay
princesa@adinet.com.uy, milefede@adinet.com.uy ,

Resumen
Se reporta una investigación realizada con alumnos de 15- 16 años sobre los algoritmos de construcción de un Arco Capaz de segmento y ángulo dado.
Se propuso a los alumnos un problema cuya solución óptima es un Arco Capaz de segmento y ángulo dado, y se les requirió luego que construyeran dicho arco utilizando regla, compás y semicírculo.
Los alumnos idearon diversas construcciones para el Arco Capaz pero en ningún momento aparece la construcción tradicional de Euclides. Básicamente, la idea que usan los estudiantes para construir el Arco Capaz, es la de obtener un triángulo cualquiera tal que uno de sus ángulos sea el ángulo dado para luego determinar su circuncentro y trazar el Arco.

Introducción
En la práctica tradicional se ha detectado que, a través de generaciones, la construcción de un Arco Capaz de segmento y ángulo dado, se realiza a través de un algoritmo geométrico que el docente transmite a sus alumnos buscando un entendimiento instrumental más que relacional. Como consecuencia de esta acción el algoritmo tradicional, es reproducido por los alumnos en forma mecánica, sin que exista un cuestionamiento profundo sobre las razones, ventajas, desventajas y alcances de su aplicación.
Como todo conjunto de reglas que es aprendido sin la participación activa del sujeto que aprende, el algoritmo pasa a ser olvidado rápidamente y nos cuestionamos si en estas condiciones tiene sentido la enseñanza que tradicionalmente se viene impartiendo. Lo que se ha detectado en la práctica es lo que Skemp (1976) ha descripto como "reglas sin razones", llegando tanto los profesores como los alumnos a reproducir una práctica sistemática de construcción que no alberga un entendimiento relacional.
Nuestra propuesta apunta a brindar un espacio de reflexión donde el alumno ponga en juego sus conocimientos y habilidades para generar sus propias construcciones de un Arco Capaz. El objetivo es generar en el alumno un entendimiento relacional, para que éste no sólo sepa como funciona el método sino también por qué, habilitándolo a relacionar el método con el problema a resolver y posiblemente a adaptar el método a nuevos problemas.
Proponemos una reorganización de este tópico de la geometría métrica, para que el aprendizaje resulte significativo para los alumnos, planificando las situaciones adecuadas para que los estudiantes desarrollen habilidades intelectuales y estratégicas, y pongan en juego sus redes de conocimientos de forma que les permitan conducirse eficazmente en las situaciones que enfrenten.



Antecedentes
Entendemos por Arco Capaz de segmento AB y ángulo α, el lugar geométrico de los puntos de un semiplano de borde AB desde los cuales se ve el segmento AB bajo el ángulo α.
"Desde P se ve el segmento AB bajo el ángulo α, esto significa que $\angle APB = \alpha$."

En 4º año liceal de Enseñanza Secundaria en el Uruguay (nivel 15-16 años) figura en el currículo el estudio del Arco Capaz. Se estudian además temas como: ángulo al centro y ángulo inscrito en una circunferencia, demostración de la relación entre sus medidas, definición de Arco Capaz como Lugar Geométrico, resolución de problemas de aplicación.
En 5º año (nivel 16 – 17 años) en el curso de Geometría Métrica se aborda la misma temática en forma más rigurosa, demostrando en la mayoría de los casos todos los teoremas involucrados y realizando problemas de aplicación, con especial énfasis en el Arco Capaz como Lugar Geométrico. Es habitual en la práctica docente, en cualquiera de los dos niveles liceales mencionados anteriormente, que el profesor exponga el algoritmo de construcción del Arco Capaz que aparece en la proposición Nº 33 del libro III de los *Elementos* de Euclides y que permanece prácticamente incambiado hasta nuestros días. Podemos ver dicha construcción a continuación:

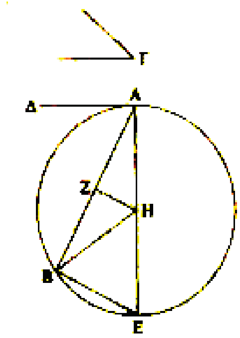
PROPOSICIÓN 33

Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Sea AB la recta dada, y el ángulo rectilíneo dado el correspondiente a Γ.

Así pues, hay que describir sobre la recta dada AB un segmento de círculo que admita un ángulo igual al correspondiente a Γ.

El ángulo correspondiente a Γ es entonces o agudo, o recto u obtuso; sea en primer lugar agudo, y como en la primera figura, constrúyase en (la recta) AB y en su punto A el (ángulo) BAΔ igual al ángulo correspondiente a Γ; entonces el (ángulo) BAΔ es también agudo. Trácese AE formando ángulos rectos con ΔA, y divídase en dos partes iguales AB en el (punto) Z, y trácese a partir del punto Z, ZH formando ángulos rectos con AB, y trácese HB.



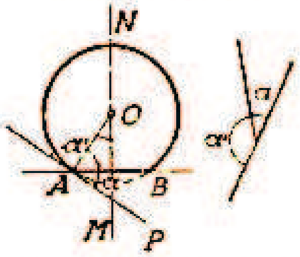
A modo de ejemplo, y con el objetivo de analizar brevemente el estado actual de la enseñanza de este tópico, veamos la construcción que se propone para el Arco Capaz en un libro de texto de uso generalizado en nuestro país, el *Curso de Geometría* de *Pedro Puig Adam*.

Extraído de:. Puig Adam. (1977). Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Madrid. Biblioteca Matemática. Página 85. (1ª Edición año 1947).
El algoritmo que se presenta en este texto, que además es el mismo que aparece en otros textos para los alumnos, tiene, como vimos, sus raíces históricas en los *Elementos* de Euclides. Este algoritmo es tradicionalmente impuesto a los alumnos y viene siendo reproducido en forma sistemática por el profesorado sin que medie una reflexión sobre su uso y construcción. Esta imposición lleva a que el alumno crea que es el único algoritmo posible para construir el Arco Capaz.
De todo lo anterior se desprende que en 50 años de Educación Secundaria en nuestro país, no ha cambiado el discurso matemático escolar, no se ha tenido en cuenta el pensamiento matemático del alumno ni la influencia de los diferentes medios socioculturales donde el individuo crece y se desarrolla.

Metodología

Proponemos darle la posibilidad al alumno de que él cree su propio algoritmo de construcción generando así argumentos que le permitan lograr un aprendizaje más significativo. Con este objetivo se propuso a un grupo de 22 alumnos de nivel 15- 16 años

4. Construcción del arco capaz.—Para hallar el centro del arco capaz de un ángulo dado α sobre un segmento AB, bastará hallar en la mediatriz MN de AB un punto O tal que el ángulo AOM sea igual a α. Para ello construiremos en el semiplano opuesto un ángulo $BAP = \alpha$ y trazaremos por A la perpendicular AO al lado AP. Esta recta y la mediatriz se cortan (por cortarse sus perpendiculares) en el centro buscado. En efecto, $AOM = BAP = \alpha$ (por la perpendicularidad de los lados).



Obsérvese que la construcción del arco capaz del ángulo *suplementario* α' en el semiplano opuesto *da el mismo centro*, y que ambos arcos completan una circunferencia.

una secuencia didáctica con el fin de constatar si surgían construcciones alternativas del Arco Capaz (ver ANEXO).

En forma previa a la investigación se realizó en el grupo de estudiantes una revisión de los conceptos previos que se consideraban como necesarios para poder realizar dicha construcción. Estos son: definición de circunferencia, mediatriz, circuncentro, ángulo al centro y ángulo inscrito en una circunferencia, relación entre ellos, circunferencia circunscrita a un triángulo.

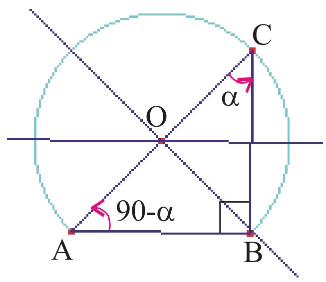
La secuencia se propuso a los alumnos en forma individual, luego confrontaron sus resultados en equipos de a tres elaborando un informe y por último se realizó una puesta en común, comentando los resultados obtenidos.

Resultados de la investigación

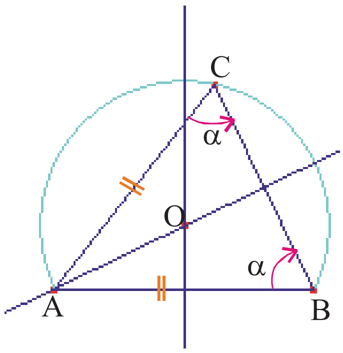
A continuación aparecen algunas construcciones que crearon los estudiantes para construir el Arco Capaz de segmento AB y ángulo α:

1) En este caso se construyó un triángulo ABC de lado AB conocido y ángulos adyacentes de 90º y (90º-α). De esta manera el ángulo en C mide α. Se determinó el circuncentro de dicho triángulo, que es el centro del Arco Capaz buscado.

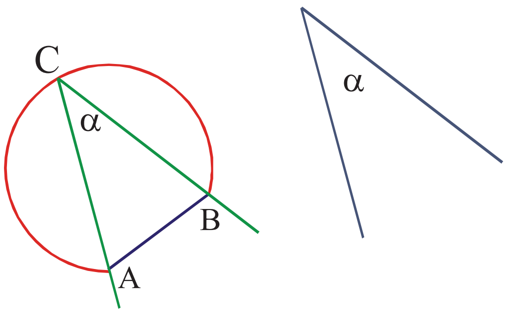
Observemos que el alumno está utilizando la propiedad de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.



2) En este otro caso se construyó un triángulo isósceles ABC con los lados AB y AC de igual medida y el ángulo en B de medida α. De esta manera se asegura que el ángulo en C también mida α. Luego se determinó el circuncentro de ese triángulo, que es el centro del Arco Capaz buscado. En este caso el alumno está usando la idea de que un triángulo isósceles es isoángulo.

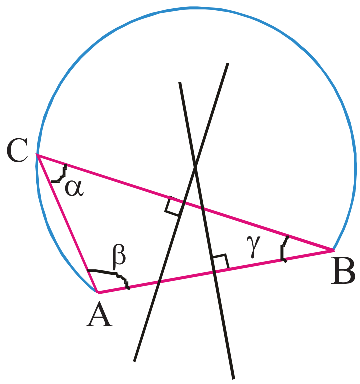


3) Si el ángulo de la derecha es el ángulo de medida α dado, por A y B, respectivamente, se trazan paralelas a los lados de dicho ángulo, que determinan un ángulo de vértice C y medida α. Se determina luego el circuncentro del triángulo ABC y se traza el Arco Capaz buscado.



4) Se construyó un triángulo ABC de forma que la suma de los ángulos adyacentes al segmento AB sea de (180º - α), en consecuencia el ángulo en C mide α. Luego se determinó el circuncentro del triángulo ABC, que es el centro del Arco Capaz buscado.

$\beta + \gamma = 180^{o} - \alpha$



Como podemos observar, las construcciones generadas por los estudiantes son altamente creativas y demuestran un entendimiento relacional del tema que se está estudiando. Deseamos destacar que en la presente investigación ningún estudiante generó la construcción que presentan tanto Euclides como los libros de texto que fueron analizados.

Conclusiones

En primer lugar señalaremos que en ningún caso los alumnos crearon espontáneamente la construcción de Arco Capaz tradicional ya expuesta.

En general, los alumnos crearon algoritmos de construcción cuya idea base fue la de construir un triángulo cualquiera de modo tal que uno de sus ángulos fuera el ángulo dado y el lado opuesto a éste fuera el segmento dado, para luego determinar su circuncentro y trazar el Arco Capaz buscado.

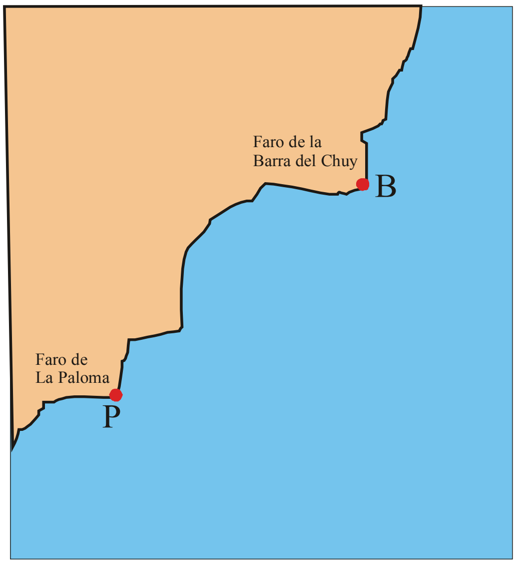
Los estudiantes lograron darle significado al algoritmo que crearon, dando argumentos que les permitieron lograr un entendimiento de carácter relacional en el sentido de Skemp (1976).

Creemos que resultó altamente positivo haber generado un ámbito de reflexión para que los alumnos pusieran en marcha sus propias ideas, logrando así un aprendizaje rico en significados que pudieron posteriormente aplicar y adaptar a diferentes situaciones problemáticas.

ANEXO

Actividad 1

Un radioaficionado capta cierta información enviada desde un barco en situación de emergencia. Debido a la gran interferencia en la comunicación, generada por una tormenta eléctrica, solo alcanza a recibir el siguiente dato: las visuales desde el barco dirigidas al faro de La Paloma (P) y al faro de la Barra del Chuy (B) forman un ángulo de 50º. Utilizando el mapa que se te proporciona marca la posible ubicación del barco. ¿Es única?



Explica el procedimiento que realizaste.
Discute con tus compañeros de equipo los resultados que obtuviste.
Elabora una conclusión con tu equipo de la solución del ejercicio.
Puesta en común.
Actividad 2
Escribe las instrucciones necesarias para construir el arco que encontraste en la *Actividad 1*, usando regla, compás y semicírculo.

2) ¿Qué datos iniciales necesitas para poder construir el arco?

Bibliografía

Hemmerling, E. (1981). *Geometría Elemental*. México: Limusa.

Euclides. (1991). *Elementos* . Madrid, España: Editorial Gredos S.A.

Hernández Rojas, G. (1998). *El paradigma cognitivo.* En *Paradigmas en psicología de la educación*. Cap. 6 pp.117-167. México: Paidós Educador.

Puig Adam, P. (1977). *Curso de geometría métrica. Tomo 1*. Madrid, España: Biblioteca Matemática.