INTRODUCCIÓN AL INFINITO

Patricia Lestón, Daniela Veiga
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina
patricialeston@uolsinectis.com.ar , veigadaniela@yahoo.com.ar

Resumen
Uno de los problemas más frecuentes que el docente de escuela media debe enfrentar durante la introducción al análisis matemático, y en particular al concepto de límite, es la dificultad que los alumnos presentan en la comprensión y manejo del infinito. Frente a esta problemática, las autoras llevaron a cabo una investigación a lo largo del año 2002, en dos escuelas privadas, una de la Provincia de Buenos Aires y otra de la Ciudad de Buenos Aires (Argentina). La metodología de trabajo se apoyó, principalmente, en el análisis de algunos problemas clásicos y lecturas complementarias para abordar la enseñanza de este tema, sin necesidad de sacrificar otros no menos importantes. De esta manera, se pretende lograr el buen manejo de un concepto tan complejo como el que éste representa. En el trabajo se presentan algunos de los problemas y lecturas trabajadas, con el análisis de las dificultades que surgieron de las mismas. Por ejemplo, una de las principales dificultades radica en la contradicción que se genera al intentar trasladar las propiedades de los conjuntos finitos a los infinitos. La aritmética de los números transfinitos aparece ante los alumnos como una contradicción al sentido común. No es de esperar que un alumno acepte que la "cantidad" de números pares es la misma que la de números naturales. Sin embargo, existen algunos ejemplos (que sin el rigor de una demostración) ponen en evidencia esta proposición. Lo que se quiere destacar con esta experiencia son los beneficios de un aprendizaje gradual y significativo del concepto de infinito como expresión puramente matemática, a través de problemas y lecturas sencillas.

Introducción

> *"¿Qué es el infinito? ¿El número de granos de arena de una playa, o el de estrellas que vemos en el cielo? Felizmente, ni el uno ni el otro. Aun la cantidad de átomos en el universo es tan poco infinita que da lástima. En realidad, semejante cifra no está más cerca del infinito que otras más modestas como 2, 15 ó 3089. ¿Y entonces? Para encontrarnos con conjuntos que ningún número pueda contar, debemos recurrir al mundo de las matemáticas. Pero no necesitamos adentrarnos demasiado en él: los números naturales (1, 2, 3, 4, 5...) o los puntos de una recta, son infinitos, terriblemente infinitos. Y cuando uno se encuentra con conjuntos infinitos, enseguida encuentra que funcionan de manera peculiar, para decirlo suavemente." (Moledo, 1994).*

Uno de los problemas más frecuentes que el docente de escuela media debe enfrentar durante la introducción al análisis matemático, y en particular al concepto de límite, es la dificultad que los alumnos presentan en la comprensión y manejo del infinito. Probablemente, dicha dificultad surja de la ausencia de una unidad temática dentro del currículo que permita el estudio del infinito como tema específico.
Frente a esta problemática, las autoras proponen el trabajo de algunos problemas clásicos y lecturas complementarias para abordar la enseñanza de este tema, sin necesidad de sacrificar otros temas no menos importantes. De esta manera, se pretende lograr el buen manejo de un concepto tan complejo como el que éste representa.

Las características de la propuesta permiten que el trabajo pueda realizarse de manera continua a lo largo de todo el curso, facilitando la adquisición y familiarización progresiva con el concepto; mejorando de esta manera los resultados en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Marco teórico

Para comprender en profundidad por qué determinados conceptos matemáticos presentan obstáculos en su adquisición, es necesario remontarse a su origen histórico y la actitud que tuvo la humanidad frente a ellos.

El infinito en particular ha sido uno de los temas que más conmovió a los matemáticos de todos los tiempos. Gauss (1831), uno de los grandes matemáticos de toda la historia, se expresó al respecto: *"Protesto contra el uso de la magnitud infinita como una cosa completa, que jamás puede permitirse en Matemática. Infinito es simplemente una forma de hablar y la verdadera significación es un límite al que ciertas razones se aproximan indefinidamente, mientras otras aumentan sin restricción"*. A partir de esto, surge la necesidad de tratar con más rigor al infinito. Y se desarrolla entre los años 1871-84 la teoría de conjuntos de Cantor que permite darle al fin una base teórica al concepto de infinito. Opina respecto a este tema A. W. Moore (1995): *"Al igual que casi todo el mundo, durante más de dos milenios los matemáticos no han sabido a ciencia cierta que pensar del infinito. Varias paradojas ideadas por los pensadores griegos y medievales les habían convencido de que acerca del infinito no se podía reflexionar impunemente. Así estaban las cosas en los años '70 del siglo pasado cuando Georg Cantor develó la matemática transfinita, rama de las matemáticas que aparentemente resolvía todas las paradojas que planteaba el infinito. Cantor, en su obra, demostraba que existían números infinitos, que los había de distinto tamaño y que podían utilizarse para medir la extensión de conjuntos infinitos"*.

A pesar de haberse comprendido parte del misterio, es sabido que en los alumnos existe el conflicto de la confusión entre el símbolo que representa al infinito con un número "muy grande". Frente a esto, Courant y Robbins (1964) opinan: *"...el paso del adjetivo 'infinito' que significa simplemente 'sin fin', al sustantivo 'infinito' no debe hacernos pensar que 'infinito', representado generalmente con el símbolo ∞, puede considerarse como si fuera un número ordinario. No es posible incluir el símbolo ∞ en el sistema de los números reales y conservar al mismo tiempo las leyes fundamentales de la aritmética"*. En primera instancia, la aritmética de los números transfinitos aparece ante los alumnos como una contradicción al sentido común. No es de esperar que un alumno acepte que la "cantidad" de números pares es la misma que la de números naturales. Sin embargo, existen algunos ejemplos (que sin el rigor de una demostración) ponen en evidencia esta proposición. Hans Hahn dice: *"Si miramos a nuestro alrededor para ejemplos de conjuntos infinitos numerables llegamos inmediatamente a unos resultados altamente sorprendentes. El conjunto de todos los números naturales es por sí mismo infinito numerable, esto es evidente, puesto que era de este conjunto que definíamos el concepto de 'infinito numerable'. Pero el conjunto de todos los números pares es también infinito numerable y tiene el mismo número cardinal $\aleph_0$, como el conjunto de todos los números naturales, aunque naturalmente hay muchos menos números pares que números naturales"* (Newman, 1997).

Para concluir, no se puede negar que el infinito encierra muchas dudas aún sin develar y no debe sorprendernos la dificultad que este tema representa para los alumnos de escuela media y el hombre en general. Ya en 1921, David Hilbert sentenció: *"El infinito! Ningún otro problema ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre"*.

Perfil del alumno

Los cursos en los que se trabajó este tema eran cursos correspondientes al último año de la escuela media (17-18 años), de carga horario de 3 horas cada uno. El nivel de conocimiento era muy bueno para lo que es un curso de esas características en la escuela secundaria. En general, los alumnos manejaban las herramientas algorítmicas que necesitaban para resolver los problemas que se les presentaban, pero no había comprensión real de muchas de las cosas que hacían, sin embargo se trataba de alumnos participativos y con mucho interés en la materia.. Con respecto al concepto de infinito, la idea era totalmente intuitiva y les sorprendía que pudiera existir algo más dentro de este concepto, como distintas clases de infinitos y propiedades desconocidas para su manejo.

Actividades Propuestas

A continuación se presentan algunos de los problemas que se trabajaron y que permitieron aproximar a los alumnos al concepto de infinito. Al mismo tiempo, adquirir las herramientas necesarias para el eventual trabajo de límite.

<u>*Problema 1(Versión tomada de Corbalán, 1998):*</u>

Se propone utilizar el famoso problema del Hotel de Hilbert para mostrar la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos. En los conjuntos finitos el todo es siempre mayor que las partes. En los conjuntos infinitos, en cambio, el todo no es mayor que alguna de sus partes.

Lee y analiza el siguiente texto:

a- Imaginemos un hotel con un número finito de habitaciones, y con todas ellas ocupadas. Si llega un viajero y pide una habitación, el propietario, aún lamentándolo, tendrá que decirle que no puede darle alojamiento. Pero supongamos ahora que el hotel tiene un número infinito de habitaciones, que están numeradas 1, 2, 3, 4, 5...., y que, como en el caso anterior, está completamente lleno. También a última hora de la tarde llega un nuevo huésped y pide una habitación. "Por supuesto", le dice el propietario. Y piensa: "Haremos lo siguiente: el huésped de la habitación número 1 se cambia a la habitación número 2, el de la número 2 a la habitación 3, el de la 3 a la 4, etc. Así quedará libre la habitación número 1 y en ella se puede colocar al nuevo huésped".

¿Cuál es la diferencia entre los dos hoteles?. ¿Cómo es posible que a pesar de estar todas las habitaciones ocupadas en el hotel de infinitas habitaciones se pueda hospedar otra persona más?

b- Lee como continúa la historia y responde:

Ya estaba resuelta la situación pero como los problemas nunca vienen solos, aparecieron mil nuevos huéspedes. El dueño otra vez les dijo que no había problema, y pensó cómo actuar.

Propone tres soluciones diferentes a este problema.

c- *Cuando la situación parecía controlada, aparecieron INFINITOS NUEVOS CLIENTES.*

¿Cómo acomodarías a estos infinitos nuevos huéspedes?

d- ¿Qué nuevas propiedades aparecen cuando se trabaja con conjuntos infinitos?

Observaciones: Con el análisis de este problema, se logró afianzar en los alumnos la diferencia que existe entre los conjuntos finitos e infinitos. Para los alumnos, es claro *que "el todo es mayor a cada una de las partes", sin embargo, el estudio de este tipo de problemas, muestra muy claramente que esta propiedad no es válida en los conjuntos infinitos. La última pregunta en particular, requiere de un mayor detenimiento y abstracción por parte de los alumnos, pero se consigue alguna respuesta, que puede completarse con el siguiente problema.*

Problema 2 (Versión tomada de Guzmán, 1993):

El siguiente problema permite comprobar las diferencias entre la aritmética entre conjuntos finitos e infinitos.

La famosa leyenda sobre el origen del "Juego de ajedrez":

a- Ante una inminente guerra, el rey Iadava, elaboró un plan de batalla que le valió el triunfo, pero desgraciadamente muchos jóvenes pagaron con su vida la seguridad del trono y el prestigio de la dinastía. Entre ellos, el príncipe Adjamir, hijo del rey Iadava. Un día al fin, se presenta ante el rey un joven brahmán ofreciéndole un juego desconocido, que llamó la atención del monarca. El inventor explicó las reglas del juego de ajedrez al rey Iadava, quien quedó tan entusiasmado con el juego que le ofreció regalarle lo que pidiera. El inventor le pidió lo siguiente: Un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta,... y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior hasta llegar a la última. El rey se extrañó de lo poco con que se conformaba, pero ordenó que le dieran lo que pedía. Sólo cuando sus contables echaron cuentas, vieron, asombrados, que no había trigo en el reino, ni siquiera en toda la tierra, para juntar esa cantidad.

¿Por qué crees que no es posible pagarle al brahmán lo que pide? ¿es esta cantidad infinita?.

b- *La leyenda no dice más, pero podemos imaginar al soberano atribulado y humilde disculpándose frente al inventor por no poder cumplir lo prometido. O, a caso, iracundo y altivo, mandando decapitarlo por tomarle el pelo. No obstante, preferimos imaginar una tercera versión en la que el rey ingenioso y jocundo, sabe devolverle la broma al inventor. Manda llamarlo y le dice: "Me pides* $1+2+4+.....+2^{63}$ *granos de trigo. Poca cosa para mi. Te daré más; te daré tantos granos como correspondan, no a un limitado tablero de 64 casillas, sino a un tablero infinito. Te daré pues* $1+2+4+...+2^{63}+2^{64}+2^{65}+...$ *Echemos cuentas del número S de granos que te debo.*

$S=1+2+4+8+16+...+2^{63}+2^{64}+2^{65}+...=1+(2+4+8+16+...+2^{63}+2^{64}+2^{65}+...)=1+2\cdot(1+2+4+8+16+...+2^{63}+2^{64}+2^{65}+...)= 1+2\cdot S$

Entonces $S= 1+2S \rightarrow S=-1$

¡Dame, buen hombre, el grano de trigo que me debes!.- Concluiría nuestro rey bromista.

Este cálculo muestra un error, ¿puedes señalarlo? ¿Qué ocurre cuando aplicas propiedades de la aritmética a sumas infinitas?.

Observaciones: Este problema genera un enfrentamiento con el concepto de infinito. La primera pregunta pone de relieve la diferencia entre cantidades muy grandes y cantidades infinitas. Al mismo tiempo, surge una situación más conflictiva al notar que las propiedades aritméticas que utilizaron durante toda la vida les pueden generar conflictos. Aparecen aquí las primeras alertas de que el infinito encierra mucho más contenido matemático de lo que ellos esperaban.

Problema 3 (Versión tomada de Courant y Robbins, 1964):

Proponemos el siguiente gráfico como una demostración sencilla de la correspondencia biunívoca que existe entre dos segmentos cualesquiera o entre un segmento y la recta.

Observando el siguiente gráfico, es trivial afirmar que la recta 'A' tiene "más cantidad" de puntos que el segmento 'a'. No obstante, ambos tienen infinita cantidad de puntos:

a

A

Demuestra la correspondencia que existe entre los puntos de los siguientes segmentos

Demuestra la correspondencia que existe entre los puntos de una semicircunferencia y una recta
Demuestra la correspondencia que existe entre los puntos de una semicircunferencia y un segmento
Resuelve los ítem b y c para una circunferencia
Observaciones: La dificultad que se presentó con la demostración de la correspondencia biunívoca entre los puntos de dos segmentos fue que, muchos alumnos argumentaban que en algún momento, se iba a "llenar" de rectas el primer segmento, y no así el segundo.

Errores y dificultades
1.Los alumnos no tuvieron dificultad en admitir que no es lo mismo un hotel con 1000, 10.000, 1.000.000 ó 1.000.000.000 de habitaciones, que uno que tenga "infinitas" habitaciones.
2.Cuando se propuso a los alumnos, que ubiquen al nuevo huésped al llegar al hotel de infinitas habitaciones, muchos alumnos respondieron que esto era imposible, debido a que todas estaban ocupadas.
3.Al discutir sobre cómo ubicar al nuevo huésped en el hotel, algunos alumnos opinaron que esto no era posible, argumentado que *"no hay lugar para este nuevo huésped, porque si se corren todas las personas un lugar (aunque sean infinitos), ¿dónde se ubica al "último"?.*
4.Muy pocos alumnos pudieron proponer otras dos soluciones distintas para ubicar a los nuevos 1000 huéspedes.
5.Frente al problema de ubicar a los nuevos "infinitos" huéspedes, muchos alumnos respondieron: *"Es imposible ubicarlos, porque se puede mover a los huéspedes mil habitaciones "hacia la derecha", de tal forma de dejar las anteriores vacías, pero si se quiere dejar las "primeras infinitas" habitaciones vacías, necesitaríamos vaciar el hotel.*
6.La mayor parte de los alumnos, considera que la cantidad de granos de arena que el rey debe pagar, es infinita.
7.El problema geométrico es, tal vez, el más complicado. En la Argentina al menos, es bastante común que la geometría sea dejada de lado en la educación media. Siendo esta la situación general del curso, se dedicó a este problema más tiempo que al resto, dando especial importancia a los conceptos de punto, recta y continuidad. Finalmente se logró que los alumnos comprendieran que la cantidad de puntos de un segmento y su longitud son circunstancias independientes.
Por otro lado, se pueden trabajar las paradojas de Zenón de Elea que se encuentran muy bien desarrolladas en el libro *Matemática 4* de G. Barallobres y otros, Ed. Aique (1994). De la misma manera, en el tomo 6 de *Sigma, el mundo de las matemáticas* Ed, Grijalbo (1997), se encuentra un capítulo en donde se desarrollan una serie de paradojas. Se recomienda también, la complementación de los trabajos con lecturas

muy amenas, relacionadas con el concepto de infinito. Esta idea tiene como finalidad no sólo el aprendizaje del tema, sino acercar a los alumnos una idea más poética y cotidiana del infinito.
Se recomienda para el tratamiento de los textos la utilización del libro *Los Matematicuentos. Presencia matemática en la literatura* de Palacios, A. y otros. (1995. Argentina: Magisterio del Río de la Plata). En este libro se tratan una serie de textos junto con un análisis de los mismos mostrando cómo se encuentran en esos cuentos conceptos matemáticos tratados a través de la literatura.
Entre todos los cuentos que allí se encuentran, se destacan los siguientes que tratan el tema del infinito.
El Aleph. (Borges, J. L.(1973). *El Aleph.* Buenos Aires, Argentina: Emecé Editores).
"...El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño. Cada cosa (la luna del espejo, digamos) era infinitas cosas, porque yo claramente la veía desde todos los puntos del universo..." (El Aleph, Jorge Luis Borges).
La paradoja de Tristam Shandy (Russell, B. (1951). *Misticismo y Lógica.* Buenos Aires, Argentina: Piados. Pp 94-95.)
"Tristam Shandy, como se sabe, invirtió dos años de su vida para hacer la crónica de los dos primeros días de su vida, y se lamentaba que a ese ritmo el material se acumularía más rápidamente de lo que él era capaz de elaborarlo, de suerte que con el paso de los años cada vez estaría más lejos del final de su relato. Ahora bien yo sostengo que si él hubiese vivido eternamente sin sentirse cansado de su trabajo, entonces, aun en el caso de que su vida hubiese estado tan repleta como cuando comenzó, ninguna parte de su biografía habría quedado sin escribirse... Esta proposición paradójica, pero perfectamente verdadera, depende del hecho de que el número de días de todo el tiempo no es mayor que el número de años". (La paradoja de Tristam Shandy, Bertrand Russell).
El libro de arena (Borges, J. L.(1975). *El Libro de arena.* Buenos Aires, Argentina: Emecé Editores).
"Fue entonces que el desconocido me dijo:
-Mírela bien. Ya no la verá nunca más.
...En vano busqué la figura del ancla, hoja tras hojas...
...-Me dijo que su libro se llamaba El Libro de Arena, porque ni el libro ni la arena tienen principio ni fin.
Me pidió que buscara la primera hoja...Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro...
-El número de páginas de este libro es exactamente infinito. Ninguna es la primera; ninguna, la última..." (El libro de arena, Jorge Luis Borges)

Conclusiones

Existe una dificultad que radica no sólo en el conflicto originado en los alumnos por adquirir el concepto sino también, en los docentes por lograr la transposición adecuada del conocimiento.
Al momento de enfrentarse con el infinito, se pueden adoptar diferentes posturas. La propuesta de hacerlo a través de problemas clásicos y lecturas motivadoras permite abordar en el aula un concepto que, por su complejidad, generalmente estuvo apartado de los programas de educación media. Por otro lado, su ausencia se hace notable al momento de enfrentar conceptos básicos del análisis matemático.

La sencillez de los problemas planteados y de las lecturas recomendadas permiten al docente abordar este tema en cualquier momento del curso y de esta manera, lograr, por un lado, un aprendizaje gradual, y por otro, afianzar el concepto de infinito como expresión puramente matemática.

Blibliografía

Barallobres, G., Sassano, M. (1994). *Matemática 4*. Argentina: Aique Grupo Editor.

Bell, E. (1948). *Los grandes matemáticos. Desde Zenón a Poincaré*. Argentina:Ed. Losada.

Corbalán, F. (1998). *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*. España: Ed. Graó.

Courant, R., Robbins, H. (1964). *¿Qué es la matemática?*. Editorial Aguilar.

Crespo Crespo, C. (2002). “La noción de infinito a través de la historia”. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 15, I, pp 529-534, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

De Guzmán, M., y otros (1993). *Matemáticas. Bachillerato 2,* España: Editorial Anaya.

De Morgan, A. (1997). "Colección de Paradojas". En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 6, pp 304-318. Barcelona, España: Ed. Grijalbo.

Hahn, H. (1997). "El infinito". En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Volumen 4, pp 384-401. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.

Moledo, L. (1994). *De las tortugas a las estrellas. Una introducción a la ciencia.* Argentina: AZ Editora.

Moore, A. (1995, junio). Breve historia del infinito. *Investigación y Ciencia*. pp 54-65.

Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N. (1995). *Los Matematicuentos. Presencia matemática en la literatura.* Argentina: Magisterio del Río de la Plata.