¿QUÉ PINTAN UN MOTOR Y UNA BOTELLA EN EL CÁLCULO INTEGRAL? CURSO CORTO DE DIDÁCTICA

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid. Valladolid. España.
ortega@am.uva.es

Resumen
Se pretende crear un marco de resolución de problemas que sea motivador para los alumnos del último año de Bachillerato o del primer año de estudios en la Universidad, y para ello se presentan cuatro problemas reales, cuya solución requiere establecer el concepto de integral definida, y uno histórico, que fue propuesto y resuelto por Arquímedes. Asimismo, en el desarrollo del curso se verá la importancia del uso de herramientas didácticas, tales como el generador de volúmenes de revolución, que se construirá en el propio curso, y el ordenador, cuyo uso será absolutamente necesario para resolver los problemas planteados. En suma, además de promover adaptaciones curriculares adecuadas, se fijan estos tres objetivos fundamentales: Cómo se crea un marco de resolución de problemas y cómo se integran herramientas didácticas apropiadas[1].

Currículo motivación y metodología: Reflexiones desde la psicopedagogía

Desde hace varias décadas psicólogos y pedagogos vienen estudiando el rendimiento académico de los estudiantes en las aulas de matemáticas y han detectado características muy concretas del alumnado que repercuten negativamente en el aprendizaje. Autores como B. Martínez (1980, 30-32), B. Tierno (1989, 100-107) y E. Mira (1979), entre otros, señalan cómo, en general, en los Centros se exige un mínimo cultural muy inferior a las posibilidades de aprendizaje de los alumnos, porque éstos hacen muy poco; se muestran pasivos y son muy desorganizados, y en estas condiciones el rendimiento es bajo. Aparte de problemas de tipo psíquico y a períodos refractarios de aprendizajes, la pasividad lleva consigo una falta de interés por aprender que, en unas ocasiones, puede ser atribuida a que la materia que se trata de enseñar está fuera del entorno de intereses biológicos del alumnos, y, en otras, una falta de confianza en sus posibilidades que les lleva al abandono. En estas circunstancias es importantísimo motivar al alumno y valorar su rendimiento intelectual. Aunque en el aula de matemáticas quizás sea el entusiasmo del profesor el elemento motivador más importante, también se debe buscar en la propia trasmisión del conocimiento, de manera que se produzcan aprendizajes significativos para los alumnos. En este sentido son muy interesantes: los apuntes históricos de la matemáticas, aplicaciones que resuelven problemas de la vida real, crear la necesidad de aprendizaje para resolver un problema determinado, utilizar los recursos didácticos adecuados, aumentar la autoconfianza, etc.

Finalmente, la conducta de los alumnos en el aula es otro aspecto a tener en cuenta, y que está directamente relacionada con la disciplina de aula, pero, sobre todo, con la actividad desarrollada en la misma, ya que la conducta natural de las personas cuando forman grupo y están inactivas es la de comunicarse y esto produce alboroto, y, por tanto, se produce una perturbación. D. Fontana (1989, 19-57) hace un estudio de las diferencias de conducta y de sus problemas, señalando, entre otros, al aburrimiento, al

[1] La presentación de este Curso Corto, ha sido subvencionada, en parte, por el Proyecto BXX2000-0069 de la Dirección General de Enseñanza Superior. España.

propósito deliberado de querer perturbar la clase o de molestar al profesor, a la aptitud, al autoconcepto, a la ausencia de éxitos, participación en actividades ajenas a la docencia, etc.

Propuesta curricular

Aquí sólo se hace un esbozo a título de ejemplo, ya que hay que tener en cuenta el perfil de los alumnos como estudiantes, los estudios posteriores que tienen que realizar (fundamentación y funcionalidad) y el perfil profesional que van a alcanzar.

<table>
<tr><td>Objetivos. Es que los alumnos entiendan el concepto de integral definida y sean capaces de aplicarlo para resolver problemas. Distinguir y relacionar la integral definida e indefinida de una función con los conceptos de primitiva y función integrable. Saber integrar numéricamente, ver su generalidad y saber aplicarlo mediante software adecuado. Conocer las técnicas elementales del cálculo de primitivas.</td><td>Conceptos. Integral definida. Integración numérica. Teorema fundamental del cálculo. Conceptos elementales. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicaciones de la integral definida: áreas, volúmenes, centros de masa, etc
Actitudes. Hacia la valoración del trabajo realizado y confianza en las propias posibilidades de superación de las dificultades conceptuales. Apreciación del trabajo personal y colectivo, orden, sistematización, búsqueda y uso de estrategias de resolución. Interés por la precisión numérica y por la resolución analítica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Procedimientos. El concepto de integral definida deberá establecerse a partir del cálculo de áreas definidas bajo una curva. Se construirán las sumas de Darboux, figura 1, a la vez que se dibujarán para una función positiva. Eligiendo un punto interior de cada subintervalo se construyen las sumas de Riemann, figura 2, lo que de forma natural aporta un método general de integración numérica. Conviene notar que para cada partición sólo hay dos sumas de Darboux, mientras que hay infinitas sumas de Riemann. Las de Darboux son más interesantes para relacionar el concepto con el de área, pero las de Riemann son más apropiadas para efectuar una integración numérica. El siguiente teorema permite utilizar unas sumas u otras indistintamente.
Si f es acotada en [a,b], entonces f es integrable Darboux sií lo es Riemann.
Cuando se haga integración numérica conviene que la partición sea uniforme. En este caso, utilizando una hoja de cálculo los puntos en los que se evalúa la función se generan de forma automática. La regla de trapecios es muy intuitiva y tiene mayor orden de convergencia, ...
El Teorema Fundamental del Cálculo, que debe establecerse inmediatamente después de definir el concepto de primitiva, da un método analítico para determinar integrales definidas y con él se establece la necesidad del cálculo de primitivas.
En la actualidad tiene poco sentido que los currículos se extiendan en calculotes y en desarrollos simbólicos. Por el contrario, en mi opinión sólo se deben desarrollar los métodos generales de cálculo de primitivas (descomposición, sustitución e integración por partes y algún método particular sencillo) y el formalismo necesario para que la Matemática no se distorsione.
Se deben justificar las aplicaciones de la integral definida mediante procesos de sumatorios de Riemann: de áreas de rectángulos, de volúmenes de cilindros, de centros de masas de rectángulos, etc.</td></tr>
</table>

Material didáctico

Libros; Generador de volúmenes: Cartulinas de funciones; Calculadoras programables y graficadoras; Ordenador con software Derive, Maple, Funciones, Calcula, Excel, Quattro-Pro.

El generador de volúmenes gira las cartulinas alrededor del eje de abscisas (puede considerarse el de ordenadas) y así se obtiene una imagen del volumen que genera el recinto plano representado en la cartulina. Esta visión “real” del volumen permite que los alumnos distingan las partes huecas de las macizas y en los casos donde haya superposición de volúmenes, si el recinto plano está en ambos lados del eje de giro, hay que elegir el que genera el volumen. En suma, los alumnos podrán entender mejor qué límites de integración son los que debe tener la integral definida en cada zona y qué función genera el borde del volumen.

Metodología

Dada la importancia que tiene la motivación de los alumnos, los contenidos propios deben ir precedidos de un marco de resolución de problemas, problemas que deberán resolverse después. Aquí se presenta uno en el que se formulan 5 problemas interesantes. Habrá presentaciones y exposiciones conceptuales a cargo del profesor, haciendo partícipes a los alumnos de las mismas mediante preguntas y propuestas de pequeñas aplicaciones o situaciones controvertidas. Los alumnos trabajarán en grupos e individualmente ejercicios de aplicación. Manipularán el generador de volúmenes para delimitar los límites de integración de los volúmenes de revolución que generan las "cartulinas" para que distingan partes "huecas" de "macizas" y, en suma, las funciones que generan el volumen. Harán prácticas de ordenador en las que tendrán que hacer cálculo simbólico y aplicar integración numérica, con la hoja de cálculo, y simbólica, con Derive o Maple, para resolver problemas de cálculo de áreas, volúmenes de revolución, centros de masas, etc.

Marco de resolución de problemas

Área de un campo de golf: En un diagrama cartesiano, se representa la delimitación de un terreno en el que se quiere instalar un campo de golf. La parcela en cuestión está determinada por un río y por un camino. El borde del camino coincide con el eje de abscisas, la curva que describe el río es la representación cartesiana de la función $f(x)=x\cdot(sen(3x/4)+1)+3$ y el segmento BC está sobre la perpendicular al camino por el punto C, que es el punto del río más cercano al camino (mínimo de la función) tras el ensanche. ¿Cuál es su área, sabiendo que las unidades del diagrama cartesiano son Hectómetros? ¿Se podría determinar el área si en vez de conocer la función se supieran cuáles son las coordenadas de puntos situados en el borde del río?

El modelo físico de Arquímede: El matemático más importante de la Antigüedad, Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.), describe cómo las investigaciones "mecánicas" le llevaron a los descubrimientos matemáticos más importantes. Es consciente de que sus primeros pasos carecen de rigor y postula que es más fácil demostrar algo cuando de antemano se tiene una idea de lo que se quiere obtener. Arquímedes indica que tiene un método mecánico, "el de la palanca" que le ayuda a preparar el camino de las demostraciones. Uno de los teoremas que descubrió por este método fue el siguiente "*El área de un segmento parabólico, ABC, es un tercio del área del triángulo APC, siendo AP la tangente a la parábola en A y PC "con la misma dirección que el eje de la parábola"*. La figura 4 es una representación gráfica de este problerma que, sin duda, es precursor del Análisis Matemático, que surge con Newton y Leibniz XIX siglos después.

Masa que contiene un volumen de revolución y capacidad del mismo: El alfarero genera los volúmenes haciendo girar el torno y separando el barro con las manos. En este mecanismo ancestral los recipientes se construyen como si alrededor del eje de simetría giraran funciones: una o más (también se puede considerar definida a intervalos) para dar la forma externa a la vasija y otra o más, para construir su capacidad. Se va a construir una copa tal que, a escala 1/2, el perfil de la zona campaniforme se delimita al girar alrededor del eje de ordenadas la superficie comprendida entre las parábolas de ecuaciones $y=5x^2/8$ e $y= 9x^2/16+1$ y el perfil de la base se delimitan al girar alrededor del mismo eje la zona definida por la parábola $y=-x^2/3$, por el eje de ordenadas y por la recta $y=-2x/3+1$, hasta que ésta corta a la parábola $y=2x^2-3$. Se trata de hallar la masa y la capacidad total de la copa con un llenado hasta la altura delimitada por $y=8$. En la figura 5 están representadas las funciones recíprocas de éstas $(y=(8x/5)^{1/2}$, $y=4/3(x-1)^{1/2}$, $y=(-3x)^{1/2}$, $y=-3(x-1)/2$, ya que ambas componen los mismos perfiles de la vasija.

Diseño de recipientes de volumen dado: Algunos estudios de *marketing* para analizar el gusto de los consumidores por la forma de los envases. De los modelos utilizados en el estudio, la figura 6 muestra el perfil lateral de una la botella de vidrio diseñada con FUNCIONES (software libre del MEC) para envasar líquidos. Este perfil es la representación gráfica de la función $f(x)=a\cdot(x-0'1)^2\cdot(x-1)^2\cdot((x-2)^4-0'04)+0'5$, en $[0,2]$ para $a=3/4$. Halla el valor de a para que la capacidad de la botella sea de 3/4 l.

Centro de gravedad de un forjado de hormigón. Equilibrio estático: En una vivienda se pretende construir un tejadito semicircular para cerrar el descansillo de una escalera y con ello construir un mirador. Para ello se construye una "galleta" de forjado como la forma de la figuras 7 y 8, formada por un semicírculo de 110 cm de radio y un rectángulo de 240×36 y 20 cm de espesor. La parte rectangular se incrusta en la pared y la semicircular soportaría el tejadito. ¿Qué altura de pared hay que levantar por encima de la "galleta" para que el centro de gravedad del conjunto pared-galleta esté dentro de la pared? La densidad de la galleta es la misma que la de la pared y ésta tiene 40 cm de espesor.

Conceptos fundamentales
Función integrable, primitiva, integral indefinida, teorema de caracterización y teorema fundamental del cálculo.

Teorema de caracterización. *La función f es integrable Darboux en [a,b] sií para cualquier aproximación positiva de cero*, ε, *existe una partición P de [a,b] tal que la diferencia entre la suma superior de Darboux relativa a P y la correspondiente suma inferior es menor que* ε.
Conviene aplicar este test a algunas funciones integrables, bien a casos particulares o bien a familias (monótonas crecientes, continuas) y a algunas que no lo sean.

Teorema Fundamental del Cálculo. Debe establecerse inmediatamente después de definir el concepto de integral definida, ya que da un método analítico para determinar integrales definidas y con él se establece la necesidad del cálculo de primitivas (del que no se debe abusar). Aquí se reproducen dos formas diferentes de entender el Teorema Fundamental del Cálculo y de ellas yo soy partidario de que se establezca aplicando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (procedimiento de la segunda columna) la que la conexión con la derivada es menos natural en el primero y, además, tiene que ser completado con la regla de Barrow. Un análisis bajo el punto de vista de la funciones de la demostración (verificación, explicación, sistematización, comunicación y descubrimiento, -de Villiers, 1990-) ponen de manifiesto que el segundo ejemplo aventaja al primero en todas las funciones:

Primer teorema fundamental del cálculo integral[2]:	**Teorema fundamental del cálculo integral**[3]
Sea f integrable sobre [a, b] y se define F sobre [a, b] por $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ Si f es continua en c de [a, b], entonces F es derivable en c, y F'(c)=f(c). Demostración: Suponemos que c está en (a, b); para c=a o b, los razonamientos son análogos con las derivadas laterales. Sea h>0. Entonces: F(c+h)-F(c) $=\int_c^{c+h} f(t)\,dt$ Se definen: m_h=inf{f(x): c<x<c+h}, M_h=sup{f(x): c<x<c+h}. Se deduce: $m_h h \leq \int_c^{c+h} f(t)\,dt \leq M_h h$ O bien: $m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h$ La misma expresión se obtiene cuando h<0. Tomando límites cuando h $\to 0$, y puesto que f es continua en x=c, se obtiene: F'(c)=f(c). Es necesario el segundo teorema fundamental del cálculo, que coincide con la regla de Barrow.	Si f es integrable Riemann en [a,b] y G es una primitiva suya sobre este intervalo, entonces $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ Demostración. Sea P={x_0, x_1, x_2, ..., x_n} una partición arbitraria de [a,b]. $\sum_1^n [G(x_i) - G(x_{i-1})] = G(x_1) - G(x_0) +$ $G(x_2) - G(x_1) + ... + G(x_n) - G(x_{n-1}) = G(b) - G(a)$ Por el teorema del valor medio, en cada subintervalo [x_{i-1}, x_i], existe un □$_i$, interior, tal que G(x_i)-G(x_{i-1})= G´(□$_i$)x_i y por ser G una primitiva de f, entonces G(x_i)-G(x_{i-1})=f□$_i$)x_i. Por tanto, $\sum_1^n f(\alpha_i)\Delta x_i = G(b) - G(a)$ Como las sumas de Riemann están acotadas por las de Darboux, entonces, $\underline{S}(P,f) = \sum_1^n m_i \Delta x_i) \leq \sum_1^n f(\alpha_i)\Delta x_i) \leq \sum_1^n M_i \Delta x_i) = \overline{S}(P,f)$ Por otra parte, como P es una partición arbitraria $Inferior \int_a^b f(x)dx \leq G(b) - G(a) \leq Superior \int_a^b f(x)d$ Finalmente, el hecho de que *f* es integrable termina la prueba.

Verificación: el resultado del segundo es más fuerte que el del primero.
Explicación: La desigualdad $m_h h \leq \int_c^{c+h} f(t)\,dt \leq M_h h$ y el paso al límite en el primer caso encierran una gran dificultad .
Sistematización: Se ordenan mejor las ideas en el segundo que en el primero con un flujo continuo sin tener que recurrir a resultados adicionales fuera del concepto de integral definida en el propio flujo.
Comunicación: Es evidente que el segundo transmite mejor el mensaje matemático.

[2] Ver SPIVAK, M. (1970, 358).

[3] Ver FISCHER, E (1993, 649).

Descubrimiento: La expresión $\sum_{1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = G(b) - G(a)$ asegura que existen n nodos, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_v$ (n arbitrario) para los que el método de los rectángulos con paso constante es exacto. Esta expresión también es indicativa de que al aumentar el número de nodos el error de integración disminuye y se trata de un teorema de valor medio de n nodos, con n variable (Este resultado es una primicia de este curso).

Función integrable, primitiva e integral indefinida

Son conceptos diferentes aunque, desafortunadamente, en algunos textos aparecen con el mismo significado. Desgraciadamente esta confusión también forma parte de las creencias de buena parte del profesorado. A continuación se exponen unos ejemplos que clarifican esta situación.

Una integral indefinida sí que es una Primitiva, pero este concepto es más general que el de integral indefinida. Así, por ejemplo, la integral indefinida $\int_a^x \cos(t)\,dt = sen(x) - sen(a)$ nunca puede ser sen(x)+2, ..., que es una primitiva.

Hay funciones integrables que no tienen primitiva, y funciones que tienen primitiva y no son integrables. Así, por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-2,0] \\ +1, & x \in [0,2] \end{cases}$$

es integrable en [-2,2] y, sin embargo, no tiene primitiva en dicho intervalo. Por otra parte, la función

$$H(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es una primitiva de $h(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2xsen\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

y, sin embargo, h(x) no es integrable en [-1,1]

Tema 2. Problemas clásicos. El generador de volúmenes

En este tema se va a abordar la resolución de los problemas clásicos planteados, se va a construir el generador de volúmenes y se va a poner en funcionamiento para ver cómo se puede ayudar a los alumnos a delimitar los límites de integración. También se va a utilizar software de ordenador para hacer los cálculos, de manera que los alumnos vayan resolviendo los problemas paso a paso. El software debe utilizarse para aprender y no para enmascarar los aprendizajes.

Cálculo de Áreas y solución del primer problema

Este apartado no merece ningún desarrollo especial, ya que la construcción de las sumas de Darboux o Riemann es el proceso a seguir para introducir el concepto de integral definida. Para resolver el primer problema, lo primero que debe hacerse es

determinar el intervalo de definición de la integral. El origen, *a*, es el punto de corte de la función *f(x)=x·(sen(3x/4)+1)+3* con el eje de abscisas, y el extremo, *b*, es la abscisa donde la función alcanza el mínimo. Ninguno de estos valores son sencillos de determinar y, por ello, conviene utilizar software adecuado. Con FUNCIONES se hallan automáticamente los valores de *a*, de *b* y del área. Hállalos y transcribe los resultados: ¿?
Una integración por partes permite obtener la primitiva: *F(x)*= ¿? .
Evalúa con EXCEL la función anterior y escribe: *Área*= ¿?
También se puede utilizar EXCEL para hacer una integración numérica. Aplica la regla de los trapecios a 50 trapecios y la regla de los rectángulos a otros 50 rectángulos (con sumas de Riemann evaluadas en el punto medio). Escribe las soluciones numéricas encontradas:
Trapecios: $Área \approx ((f(x_0) + f(x_n))/2 + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}))h$ =¿?
Rectángulos: $Área \approx (f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + ... + f(\alpha_{n-1}) + f(\alpha_n))h$ =¿?
En ambos casos, las alturas de los trapecios o rectángulos es el "paso",*h,* de los nodos equiespaciados y para *n=50, h=*. . . . .

Solución del problema de Arquímedes
Para resolver este problema Arquímedes consideró que AH es una palanca con punto de apoyo en K (punto medio de PC y de AH), y demostró que si se suspenden de H todos los segmentos lineales (indivisibles) que corforman el segmento parabólico en la dirección del eje, se equilibra la masa del triángulo APC. La relación entre la distancia del c.d.m. del triángulo a K y la distancia de K a H termina la demostración.
Como es lógico, aquí se utilizarán resultados del Análisis Matemático y un simbolismo apropiado. En primer lugar se considerará una parábola particular de eje vertical, esta situación da lugar a un esquema de prueba pre-formal (van Ash, 1993).
Sea $y=-x^2+2x+8$, y los puntos de la parábola C=(0, 8) y A=(3,5).
¿Con estos puntos la recta AC tiene ecuación =? ; y ¿la recta AP esta otra?.
Ahora sólo hay que calcular las áreas que corresponden al segmento y al triángulo, y comprobar que se verifica el resultado

Área del segmento: $\int_0^3 (Ec.\,parábola - Ec.\,recta\ AC)\,dx =$

Área del triángulo: $\int_0^3 (Ec.\,recta\ AP - Ec.\,recta\ AC)\,dx =$

Luego, se puede abordar el problema de forma general considerando la parábola $y=ax^2+bx+c$, los puntos *A* y *C* de abscisas *x=h* y *x=k*. El procedimiento es el mismo que antes, pero ahora el cálculo simbólico se complica enormemente, razón por la que combiene utilizar DERIVE u otro programa de cálculo simbólico.
Escribe los siguientes resultados parciales en función de *a, b, c, h, k*:
Coordenadas de *A*= . . . . y de *B*= . . . . y Ecuaciones de las rectas *AC* y *AP*

Área del segmento: $\int_h^k (Ec\ .\ parábola \quad - Ec\ .\ recta \quad AC\ )\, dx \ =$

Área del triángulo: $\int_h^k (Ec\ .\ recta \quad AP\ - Ec\ .\ recta \quad AC\ )\, dx \ =$

Cálculo de volúmenes de revolución y solución del tercer problema

El elemento de volumen es el cilindro, y se considera que al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, *h*, genera un cilindro de radio su otro lado, *R*, y, por tanto, su volumen es $\pi R^2 h$. La cuestión es que si una función, *f*, es integrable, también lo es πf^2 y, por tanto, las sumas de Riemann asociadas a esta función expresan la suma de los volúmenes de los cilindros que se obtienen al girar sobre el eje de abscisas los rectángulos que tienen como bases los subintervalos en que se ha dividido [a,b] y alturas $f(\alpha_i)$. Las sumas de Riemann nos proporcionan un método numérico y la integral definida el volumen del sólido de revolución.

La solución de estos problemas es trivial si se sabe poner los límites de integración de forma adecuada, ya que los cálculos son "sencillos". Sin embargo, muchos alumnos no aciertan a ver cómo se generan los volúmenes de revolución y tienen dificultades para determinar los límites de integración, problemas que se "resuelven" con el generador de volúmenes.

Construcción del generador de volúmenes. Se precisa: motorcito eléctrico a pilas, pilas adecuadas para el motor, dos cables eléctricos de hilos finos para la conexión de las pilas al motor, cinta aislante, 2 varillas delgadas para sujetar las cartulinas, 2 regletas pequeñas (una par sujetar las varillas al eje del motor y otra para el extremo opuesto del eje), una pletina agujereada para albergar al eje, cartulina blanca o material plastificado apto para dibujar las siluetas planas con la impresora y que se recorte con facilidad, cartulina o material plastificado oscuro para el fondo en que resalten los volúmenes, pegamento y tijeras. Las fotografía de la figura 9 muestra el generador y la 14 unas plantillas de los recintos planos.

Con el programa FUNCIONES se dibujan las cartulinas correspondientes a las regiones planas que van a determinar los volúmenes de revolución. Al girar se ven perfectamente los volúmenes que se generan. El mismo programa permite determinar los límites de integración para hallar las correspondientes integrales. Sin embargo, muchas veces estos límites son las abscisas de los puntos de intersección de una de las curvas dadas y de la simétrica de la otra respecto del eje de giro (soluciones del sistema formado por las funciones *f(x)* y *g(x)*, y del sistema *f(x)* y *-g(x)*), límites que pasan desapercibidos para los alumnos (de hecho es una de las mayores dificultades de aprendizaje) y el generador de volúmenes es una herramienta didáctica adecuada y les ayuda a descubrirlos.

Representa las gráficas de las siguientes parejas de funciones:

1. $y=x^2-2$, $y=x$. en el intervalo [-2, 2]
2. $y=-x^3/6+x^2/2-7x/32-11/96, y=x^3/6-{}^2/2+1/3.$
3. $y=(9-x^2)/3$, $y=(x^2-9)(x^2-1)/8.$
4. $y=|x|+1$, $\quad y=x^2-|2x|$

Las parejas de las funciones anteriores se representan en las figuras 10, 11, 12 y 13. Recorta las gráficas, gíralas, señala las zonas huecas y macizas al girar sobre el eje de abscisas, y, finalmente, escribe en el recuadro las integrales correspondientes para calcular el volumen que se genera la girar cada una de las regiones planas alrededor del eje de abscisas. Una de de los alumnos es ver que los límites de integración vienen determinados por las El generador de volúmenes solventar este.

Solución del problema 3. Hay que ser cuidadosos en su resolución ya que al girar sobre el eje de ordenadas las cosas son algo diferentes. O bien se consideran las funciones

$x=\sqrt{\frac{8y}{5}}$, $x=\frac{4}{3}\sqrt{y-1}$, $x=\sqrt{-3y}$, $x=-\frac{3}{2}(y-1)$

girando sobre OY o bien se consideran las funciones

$y=\sqrt{\frac{8x}{5}}$, $y=\frac{4}{3}\sqrt{x-1}$, $y=\sqrt{-3x}$, $y=-\frac{3}{2}(x-1)$

girando sobre OX. Estas últimas son las que se deben considerar para representar con FUNCIONES las gráficas de estas funciones y así determinar una sección de la vasija.
Representa las funciones y determina las abscisas que constituyen los límites de integración.
Delimita sobre las figuras las zonas huecas y macizas. Utiliza el generador y FUNCIONES para poner los límites de integración y rellena los apartados:
Intervalos de las: zonas huecas .¿? ; zona maciza ¿? ; Integrales de la: 1ª zona hueca ¿?
zona maciza. ¿?; 2ª zona hueca ¿? ;Masa del material utilizado ¿?
Capacidad de la copa hasta x=5 ¿?.

Tema 3. Problemas de diseño
La experimentación matemática es una de las actividades que menor atención reciben en los currículos y, sin embargo, son las que despiertan mayor interés en los alumnos y con las que mejor suelen captar el "funcionamiento matemático". Aquí se va a hacer una actividad de este tipo utilizando el programa FUNCIONES

Determinación de funciones conociendo el volumen. Solución del problema 4. La propuesta de este problema persigue dos objetivos perfectamente diferenciados: por una parte, se trata de que los alumnos experimenten con el programa FUNCIONES (o con otro similar) y determinen funciones, cuyas gráficas puedan dar lugar a envases atractivos y que cumplan las condiciones del enunciado, lo que supone hacer un análisis de los efectos de los coeficientes, de factores, potencias, sumandos, etc., y, por otra, una vez considerada una función adecuada se trata de aplicar el "Teorema Fundamental del Cálculo" y hacer los cálculos y ajustes finales. El problema es totalmente abierto y una vez que se ha encontrado una función, que puede depender de un parámetro para ajustar la capacidad del tarro, se puede utilizar el generador de volúmenes para visualizarlo.
Aquí se ha considerado una función polinómica, $f(x)=a\cdot(x-0'1)^2\cdot(x-1)^2\cdot((x-2)^4-0'04)+0'31$, pero el grado del polinomio indica que un tratamiento manual de la

misma es poco recomendable. Nuevamente se puede aplicar software elemental para resolver el problema. Ensayando de forma directa con el programa FUNCIONES, enseguida se obtiene un valor para el parámetro *a* con el que la capacidad del volumen de revolución de la botella en el intervalo [0,2] está muy próximo a los 0,75 l. Haz los ensayos correspondientes y escribe los resultados encontrados: Parámetro *a*= ¿? . .Volumen que corresponde a este parámetro V=. ¿?
También con EXCEL se resuelve este problema, ya que se puede hacer la suma de Riemann sin el factor *a* y después hallarlo. Denotando por $H(x)=(x-0{\acute{}}1)^2\cdot(x-1)^2\cdot((x-2)^4-0{\acute{}}04)$ y por $K=0{\acute{}}31$, es claro que $f(x)=aH(x)+K$ y, para $h=0.025$, las sumas de Riemann dan la siguiente fórmula para calcular el volumen:

$$V \approx \pi \sum_{1}^{n} (a^2 H^2(\alpha_i) + 2aH(\alpha_i)K + K^2)h \cdot$$

En la práctica se calculan α_i, $H^2(\alpha_i)$, $H(\alpha_i)$, y se halla el valor de *a* resolviendo la correspondiente ecuación de segundo grado. La tabla esboza este procedimiento (se deben llenar 2/0.025 celdas con los puntos medios α_i de los intervalos de la partición) y se presentan los resultados. Para evitar cálculos innecesarios se divide por $h\pi$ el volumen de la botella. En la ultima columna se muestra la ecuación de segundo grado, cuya solución resuelve el problema. Utiliza EXCEL y rellena las correspondientes celdas de la tabla siguiente.

<table>
<tr><td>i</td><td>α_i</td><td>$H^2(\alpha_i)$</td><td>$H(\alpha_i)$</td><td rowspan="9">h=
$P=\Sigma H^2(\alpha_i)$
P=
$Q=2K\Sigma H(\alpha_i)$
Q=
$R=K^2-0{\acute{}}75/h\pi$
R=
$a^2P+aQ+R=0$
a=</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0´0125</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>0,00286585</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td>0,01076785</td></tr>
<tr><td></td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>79</td><td>1´9625</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>80</td><td></td><td>0,01931148</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Sumas</td><td>$\Sigma H^2(\alpha_i)$=</td><td>$\Sigma H(\alpha_i)$=</td></tr>
</table>

Centros de masas. Solución del problema 5. Los alumnos estudian el concepto de centro de masas (cdm) en Física, y si cuando llega la aplicación a problemas reales los matemáticos no lo hacemos en el aula, entonces estamos cercenando las posibilidades curriculares y devaluamos el carácter instrumental de la matemática, que es uno de los fines del Currículo Español de Matemáticas y uno de los pilares de la Matemática Aplicada. Aunque en España no se suelen resolver problemas como éste en las aulas de matemáticas, yo creo que no pueden obviarse, ya que es otro claro exponente de la importancia de esta disciplina como ciencia resolutora de problemas de la vida ordinaria. Sin embargo, para que los alumnos puedan comprenderlos y hacerlos suyos hay que enlazarlos con los conceptos físicos que han estudiado, y justificar los resultados que se van a aplicar. Se comienza determinando las coordenadas de los centros de equilibrio de sistemas discretos sencillos y generalizarlo a la integral.
1. El formado por 3 masas puntuales sobre una barra recta de masa despreciable.
El momento de las tres masas sobre el origen (que coincide con el punto de apoyo) es: $M_0=m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3$. Si $M_0=0$, el sistema está en equilibrio estático.

El centro de masas es el punto $\overline{x}$, donde se colocaría el punto de apoyo para obtener el equilibrio estático. Es como si se colocara toda la masa en él, y si el punto de apoyo se desplazara a $\overline{x}$, entonces $M_0=m_1(x_1-\overline{x})+m_2(x_2-\overline{x})+m_3(x_3-\overline{x})=0$ y, por tanto,

$$\overline{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

2. El formado por 3 masas puntuales unidas por 3 barras coplanarias de masas despreciables.
La deducción es similar a la anterior, figura 16, pero ahora hay que contemplar las dos coordenadas:

$$\overline{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}, \qquad \overline{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$$

3. El formado por n masas puntuales situadas en un plano es análogo al anterior.

$$\overline{x}=\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i} \qquad \overline{y}=\frac{\Sigma m_iy_i}{\Sigma m_i}$$

4. El formado por una lámina plana de densidad uniforme, δ, simétrica respecto del eje de ordenadas, figura 17.

$$\overline{y}=\frac{\int_a^b f^2(c_i)dx}{2\acute{A}rea}$$

(**)
El problema 5 tiene una simetría en el eje de ordenadas y por esta simetría $\overline{x}=0$ e $\overline{y}$ se calcula aplicando (**) a la función $f(x)=\sqrt{120^2-x^2}$ en el intervalo [-R, R]. Escribe la relación correspondiente y calula el valor de $\overline{y}$. ¿?
La simetría de la plataforma también habría permitido integrar la función en [0, R] para calcular $\overline{y}$.
Escribe la relación que permite hallar el momento, M_g, de la galleta respecto del borde externo de la pared en función de δ. M_g = ¿?
El cdm de las cargas de la pared es (0, -20) y, esto permite hallar el momento, M_p, de las cargas de la pared de altura *h* (incluidos los 20 cm de forjado) respecto del borde externo de la misma. Escribe la relación en función de ρ y de h. M_p = ¿?
Por tanto, la construcción será estable si $M_p>M_g$, lo que permite calcular la altura mínima, h, que debe de tener la pared. Hállala y escríbela aquí: h > ¿?
Ten en cuenta la simetría, considera 220 intervalos de la misma amplitud, escribe la sucesión de estos intervalos y la de sus puntos medios de los intervalos, finalmente, halla el valor de $\overline{y}$ con la hoja de calculo y escríbelo aquí: $\overline{y}$ = ¿?

Bibliografía

Van Ash, A.G. (1993): "To prove, why and how?". *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.

Blásquez., S. y Ortega, T. (2001): rupturas en la comprensión del conecpto de límite en alumnos de bachillerato. *AULA* Vol. 10, pp. 119-135. Salamanca.

Boyer, C.B. (1987): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid.

Faure, P. (1981): *Enseñanza personalizada y también comunitaria*. Narcea. Madrid.

Fisher, E. (1983). *Intermediate Análisis.* Springer Verlag. New York.

Fontana D. (1986): *La disiplina en el aula.* AulaXXI/Santillana. Madrid.

García Hoz, V. (1988): *La práctica de la educación personalizada.* Ediciones Rialp, S. A. Madrid

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997): *Mathematical Proobs: Classification and Examples for Use in Secondary Education.* The Association for Mathematics Education of South Africa. pp.109-155.Centrahil. South Africa.

Ibañes, M. y Ortega T. (2001): Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO. Vol. 28, pp 39-60.* Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona..

Kline, M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza E. Madrid.

Martinez, B. (1980): *Causas del fracaso escolar y técnicas para afrontarlo.* Narcea, S. A. Madrid.

Mira y López, E. (1979): *El niño que no aprende.* Kapelusz. Buenos Aires.

N.C.T.M. (1991): *Estándares curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* S.A.E.M. Editado por THALES. Sevilla.

Ortega, T. (1997): *Prácticas de Aula en Precálculo y Cálculo.* Actas del IV Seminario-Congreso Regional Castellano Leonés de Educación Matemática. pp. 187-196. Valladolid.

Ortega, T. (1991): El generador de volúmenes. *Suma*, nº 7. Granada.

Sierpinska, A (1985) Obstacles epistémologiques relatifs a la notión de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques.* Vol. 6, pp. 5-67.