

VÍNCULOS CONCEPTUALES DISCRETOS Y CONTINUOS DEL CÁLCULO EN LA INGENIERÍA DE CONTROL

Carlos Rondero y Martín Sauza

U. Autónoma del Estado de Hidalgo, U. Tecnológica de Tula Tepeji. México

rondero@uaeh.reduaeh.mx

Resumen

Este trabajo de investigación pretende hacer un estudio preliminar de la dualidad discreto-continuo con profesores de matemáticas y física, específicamente aquellos que imparten estas materias en ingeniería. El Marco Teórico que sustenta este trabajo de investigación documental es el constructivismo de Piaget y la Matemática en Contexto que tiene su origen en el mismo constructivismo. En el trabajo de investigación se hacen varias referencias sobre la matemática en contexto con la ingeniería, sobre la matemática y la dualidad en el estudio de lo discreto y lo continuo dentro de la Ingeniería de Control. La madurez que debe de tener el cálculo en este trabajo de investigación es de que los alumnos distingan entre el diferencial como una variable continua y del tipo analógico entre el incremento como un intervalo definido y una variable discreta que da origen a las señales digitales. Hacer notar las herramientas matemáticas entre una y otra, así como mostrar la importancia de transitar o transformar (convertir) un tipo de señal a otra.

Introducción

El cambio que se está viviendo entre el mundo analógico y digital es importante debido a que la tecnología ha evolucionado, y pone mucha atención en la transición de la dualidad discreto-continuo, y la conversión de analógico a digital, dicha transición no ha pasado desapercibida, tanto que hasta nuestros días todavía no logramos tener una noción clara de esta dualidad y de la importancia de tener bien claros los conceptos, por esta razón creemos relevante y de gran importancia evidenciar esta falta de contexto del mundo real a través de las matemáticas en la ingeniería de control. El trabajo de investigación está sustentado por el aprendizaje significativo y la matemática en contexto, los cuales parten de un conocimiento que ya se tiene; sólo se recontextualiza o se construye sobre la base de un nuevo conocimiento.

El propósito de este trabajo de investigación es mostrar la importancia que tienen las matemáticas discretas en la teoría de control; el modelar sistemas físicos que tienen como soporte un buen entendimiento de las herramientas matemáticas; así como contextualizar la matemática en la Ingeniería de Control, en la dualidad discreto-continuo. El trabajo de investigación trata de evidenciar los vínculos conceptuales entre el cálculo y la ingeniería de control, todo ello con el objetivo de incidir en el discurso matemático escolar.

La metodología utilizada es referente a la matemática en contexto con el enfoque en ingeniería de control; las evidencias muestran que en la enseñanza del cálculo se ha privilegiado el estudio de lo continuo, y la parte discreta se estudia en el momento en que se están abordando problemas de aplicación, motivo por el cual no existe un antecedente de matemáticas en sistemas digitales.

Es importante hacer énfasis que este trabajo de investigación pretende hacer un estudio preliminar de la dualidad discreto-continuo con profesores de matemáticas y física, específicamente aquellos que imparten estas materias en ingeniería.

La madurez que debe de tener el cálculo en este trabajo de investigación, es que los alumnos distingan entre el diferencial como una variable continua y del tipo analógico, entre el incremento como un intervalo definido y una variable discreta que da origen a las señales digitales; hacer notar las herramientas matemáticas de la dualidad discreto-continuo, así como mostrar la importancia de transitar o transformar (convertir) un tipo de señal a otra.

Génesis del problema de investigación

La visión que se tiene de discreto y continuo, se presenta enseguida, con la intención de ubicarnos dentro del problema de investigación, a través de dos enfoques: uno ilustra la idea que se tiene desde el punto de vista de la Física y el otro de las Matemáticas, concernientes al Cálculo.

En matemáticas lo discreto es el incremento de una función, es una diferencia finita dentro del cálculo diferencial, por lo tanto se ve como la parte discreta. La diferencial, es una diferencia infinitamente pequeña, esto es lo continuo dentro del Cálculo, Rondero (1999).

Desde el punto de vista variación y medición; si vemos que la variación es como tal un cambio y está en función del tiempo, ésta es la parte continua, y si nosotros queremos medir esa variación; lo que hacemos es tomar un intervalo y hacerlo finito para ciertos valores del tiempo, de tal forma que la medida es la parte discreta, así entiéndase, discreto como la medición y lo continuo la variación. Dolores C. (1989).

Discreto – Continuo en el Cálculo Diferencial e Integral.

Es importante destacar la importancia que la dualidad discreto-continuo tiene en el cálculo diferencial integral, para esto iniciaremos con un artículo que publica Rondero en una antología⁽¹⁾ sobre la visión Discreto-Continuo.

Con mucha frecuencia, es posible encontrar en la enseñanza de las matemáticas, conceptos que presentan una naturaleza múltiple. Por ejemplo, en las clases de cálculo podemos usar dos expresiones bien conocidas:

$$\Delta x \text{ y } dx$$

Para una misma idea.

Claramente no son el mismo concepto, pues uno se usa cuando se quiere representar incrementos finitos y el otro, si se nos permite, para incrementos infinitamente pequeños. Sin embargo tienen algo en común, ambos son el resultado de la operación “diferencia”; en un caso se trata de una resta finita y en el otro una resta infinita.

Baste recordar la descripción del programa leibniziano del diferencial. Para Leibniz, las diferenciales son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable, en tanto L'Hopital, no considera a las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos, sino como creciendo o decreciendo de manera continua y así la diferencial (o diferencias como él les llamó), son las partes infinitamente pequeñas o en que aumentan o disminuyen dichas variables.

Resulta interesante ver como en cálculo se tiene la idea de discreto, como incrementos, ya que el incremento es un intervalo definido (finito). La parte de la diferencial es vista, si hacemos la analogía con el control analógico, tiene que ver con continuo en el tiempo; en el cálculo es visto como una diferencia infinitamente pequeña.

Visión Discreto–Continuo dentro de la Física

De acuerdo con Dolores C. (1989)

Desde el punto de vista etimológico, el término variación contiene el prefijo vari, este elemento prefijal forma parte de las palabras con significado de vara, este término a su vez, es indicativo de medición. Una vara es una medida de longitud equivalente a 853.9 mm. De acuerdo con el Diccionario General Ilustrado de la Lengua Española el término variación indica: acción y efecto de variar, este último término proviene del latín variare y significa hacer que una cosa sea diferente de lo que antes era, el término implica dar variedad o cambiar una cosa de forma, de propiedad o de estado. El término variación está pues, asociado a la medición y al cambio.

La medición es un procedimiento creado por el hombre para estudiar y entender la realidad, el cambio por otro lado, es el componente básico del movimiento. El movimiento es una modalidad o propiedad inherente de la materia y no existe sin ella, el movimiento comprende todos los cambios que se operan en el universo, desde un simple desplazamiento del lugar hasta el del pensamiento. La materia y sus manifestaciones son parte consustancial de la realidad y ésta es siempre cambiante. En un sentido genérico la medición es un proceso de relación conscientemente dirigido por el hombre hacia su realidad, desde el punto de vista físico, consiste en encontrar la razón de la magnitud que se mide con la de alguna unidad.

*El problema de la medición jugó un papel importante en el desarrollo de la matemática, pues propició la interconexión entre la aritmética y la geometría, entre lo **discreto** y lo **continuo**, entre el número y la magnitud. Las magnitudes son caracterizadas, como las abstracciones representadas geométricamente de las cosas medibles continuas. El número, por otro lado, esta asociado a la cantidad de veces que cabe la unidad de medida en lo que se mide, aquí se entrecruzan dos de los elementos contrastantes abstraídos de la realidad: lo discreto y lo continuo. Para cuantificar lo discreto conmensurable basta con los números enteros, lo segundo históricamente estuvo relacionado con la divisibilidad de la materia y sus implicaciones en la matemática dieron lugar a la creación de los números racionales, los infinitesimales y los números reales. Lo discreto es característico de algunos objetos de la realidad que son indivisibles en el sentido, que cuando se dividen dejan de ser lo que eran (medio de hombre, dos tercios de manzana, etc.), por otro lado, los objetos continuos y homogéneos son susceptibles de ser divididos ilimitadamente y agrupados sin perder su carácter esencial. De estos últimos objetos se pueden abstraer sus longitudes, áreas, volúmenes o relacionarlos con el tiempo en ciertos fenómenos, estas magnitudes como representan alguna característica de objetos o fenómenos continuos son también continuos.*

Las analogías anteriores nos dan una idea más clara del estado del arte de la dualidad **discreto-continuo** en matemáticas y en física, sin duda puntos de partida claves para nuestro problema de investigación.

Para la enseñanza de las Matemáticas a nivel licenciatura se requiere de un buen entendimiento de los conceptos Matemáticos. El Modelado de Sistemas Físicos en realidad depende de si el estudiante tiene bien claro estos conceptos para posteriormente darle una aplicación a la Ingeniería. En el nivel medio y superior, las aplicaciones quedan en el aire, porque muchos profesores en clases no estudian los problemas que necesitan de un buen razonamiento Matemático, y simplemente le dan la vuelta al problema; es aquí donde es importante crear un Vínculo Conceptual entre las Matemáticas y la Ingeniería, que permitan visualizar más los problemas de aplicación.

Es interesante cómo el alumno se percató, qué tanto carece de herramientas Matemáticas, y que sin éstas, hace de lado una parte muy importante de su formación como Ingeniero, debido a que es en las Ingenierías donde comúnmente se presenta este problema y donde se requiere un puente entre las Matemáticas y la Ingeniería; si los Ingenieros no tienen buenas bases matemáticas, no les permite ser eficientes y no desarrollan la Ingeniería conforme a las necesidades de su profesión. Es aquí donde vemos la necesidad de darle un significado al cálculo en la teoría de control, por estas razones considero que las currículas a nivel licenciatura no están cubriendo las expectativas, para dar origen a la significación de la dualidad discreto-continuo, (debemos aportar ideas y diseñar actividades de aprendizaje que favorezcan la construcción de estos conceptos).

Se observa que en la Ingeniería Electrónica existe poco vínculo con las matemáticas que se aplican en la Ingeniería; este es un problema considerable en la Ingeniería de Control que ha privilegiado mucho la parte continua del Cálculo y se ha dejado a un lado la parte discreta. La Ingeniería Electrónica tiene problemas en su currícula, porque la mayoría de los alumnos no tienen como prerrequisito la parte discreta de las matemáticas y a nivel Ingeniería los profesores que imparten las materias de Control Analógico y Control Digital, tienen que ir a la par con aplicaciones y al mismo tiempo estudiando la parte discreta, por lo que en la enseñanza del Cálculo se tiene que incorporar a la discretización de funciones.

Al comenzar los alumnos a graficar funciones (lo hacen tabulando), posteriormente localizan los puntos en el plano cartesiano (unen los puntos para hacer una gráfica del tipo discreta, pero es aquí donde los profesores no hacen énfasis en que se está enseñando el elemento discreto), y lo pasan desapercibido, situación anómala por ser un acercamiento importante con el elemento en estudio.

Conclusiones

Los estudiantes tienen problemas de álgebra y en general falta de interés e iniciativa para poder estudiar estos temas, ya que en su mayoría creen que es solo práctica, pero olvidamos la parte del significado, el vínculo que se tiene que dar entre las matemáticas y la ingeniería; se debe al contexto mismo de las matemáticas en las ingenierías.

Es importante mencionar que los vínculos conceptuales que se plantean en el problema de investigación están latentes durante todo el desarrollo de este trabajo de investigación los cuales los podemos clasificar de la siguiente manera:

Diferencial - Función Continua – Señal Analógica.
Incremento - Función Discreta – Señal digital.

La matemática está aislada de la aplicación; es decir cuando se ve matemáticas no se ven aplicaciones, porque resulta ser muy frecuente que el profesor que da matemáticas en ingeniería es matemático puro y el profesor que da las aplicaciones delega la responsabilidad al de matemáticas, dando por hecho ambas partes que su conocimiento está dado. Cabe mencionar que pareciera ser que las matemáticas están desvinculadas con las aplicaciones, y aquí es donde se da la parte fuerte del aprendizaje significativo; la matemática en contexto y los vínculos conceptuales que no se han identificado, pero es evidente que están latentes en este trabajo de investigación.

Como pudimos ver en los conceptos estudiados anteriormente; es muy importante que en las escuelas a nivel medio y superior, aborden conceptos que involucren la parte discreta de las matemáticas, como series de Fourier, transformadas de series de Fourier y transformada Z , por mencionar algunas. Es importante mencionar que los programas de estudio no los consideran y si se llegan a considerar en la mayoría de los casos el tiempo es clave para que no se concluyan estos temas de interés. Es obvio que hasta este momento sólo se ha privilegiado a la parte continua en estudio, y como hemos visto hay evidencias de acercamientos tan importantes al mundo discreto como se pudo ver a la hora de que los alumnos tabulan una función. Es importante hacer notar a los alumnos que están discretizando una función.

Los problemas tan graves que generan la falta de contexto, se refleja en la ingeniería de control, específicamente en la parte discreta y continua, sino se tienen las bases y las herramientas necesarias para abordar problemas que tengan que ver con señales analógicas y digitales; los estudiantes difícilmente darán solución a los problemas con los cuales se están enfrentando. Es importante resaltar también la importancia que tiene la conversión de señales; es decir de digital-analógico y analógico-digital, que posteriormente son base para contextualizar y poder modelar sistemas, tanto en el mundo analógico como en el mundo digital.

En el análisis de libros de texto pudimos observar que en lo que se refiere a los libros de matemáticas estos abordan los temas de forma tradicional; es decir dan demostraciones de los teoremas, y resuelven ejercicios que sólo favorecen a la parte algorítmica; carecen de ejercicios que hagan al alumno contextualizar la matemática, es decir que le vean la aplicación. En los libros de ingeniería que se analizaron pudimos observar que algunos dedican un tema de repaso para algunos conceptos de matemáticas, también pudimos notar algunos temas que aplican las matemáticas y dan evidencia de que son herramientas poderosas para el estudio de la ingeniería de control, refiriéndonos en forma general al análisis de circuitos, analógicos y digitales. Los temas expuestos en los libros de texto se enfocan más a las ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace, así como la transformada Z , ya que son bases importantes para poder contextualizar la ingeniería de control.

Se pudo observar que en la entrevista que se le hizo a un alumno de último semestre de la carrera de ingeniería electrónica, no supo decir dónde se aplicaba la transformada Z, lo interesante es que definió bien el concepto de función y dónde se aplican las ecuaciones diferenciales, pero lo que no supo es dónde se aplica la transformada Z y como ingeniero el va a manipular componentes electrónicos, cuya base matemática para modelar sistemas electrónicos que requieren a la transformada Z como herramienta, ésta es una evidencia clara de cómo no se ha incursionado en la práctica docente en el cálculo discreto.

Las curriculas actuales de las ingenierías dan evidencia de que se trabaja más con el cálculo continuo que con el cálculo discreto y lo poco que se contempla del cálculo discreto algunas instituciones no los cubren, por falta de tiempo, motivo por el cual el profesor titular de la materia donde se debe aplicar la matemática, a veces pierde algo de tiempo por tratar de dar algo de matemáticas discretas que no cubrieron las asignaturas anteriores.

Uno de los principios fundamentales del aprendizaje significativo es la parte cognitiva del conocimiento, para que se pueda dar un contexto y un significado a los conocimientos que ya se tienen. En el trabajo de investigación nos pudimos dar cuenta que en matemáticas discretas, no se tiene como antecedente, series de Fourier transformadas de series de Fourier, así como transformada Z. Como estas herramientas no se tienen, difícilmente un alumno podrá contextualizar y dar significado a las matemáticas en ingeniería de control.

A modo de reflexión, quisiera comentar que creo que la falta de contexto de significado de las matemáticas en la ingeniería, en la actualidad, es un obstáculo muy grande y uno de los motivos por los cuales se hace muy poca ingeniería aquí en nuestro país.

Bibliografía.

- Rondero C. (1995)., *Ensayo sobre la dualidad **discreto-continuo**, de los saberes matemáticos. Casos de transición y transposición didáctica*. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN, México.
- Rondero C. (2000). *Un estudio sobre el papel de las ideas germinales, Ponderatium y AEquilibrium, en la construcción del saber Físico Matemático*. Tesis de Doctorado CINVESTAV-IPN. México.
- Camarena P. (1995). *La Matemática en Contexto*. Novena reunión Centroamericana del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, IPN. México.
- Camarena P. (1999). *Hacia la Integración del Conocimiento: Matemáticas e Ingeniería*. Segundo Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. ESIME-Zacatengo IPN. México.
- Piaget J. (1970), *Structuralism*. New York, Harpet & Row.