EXPLORANDO LA CONSTRUCCIÓN DE BASES PROPIAS Y NO PROPIAS

María Antonieta Aguilar Víquez
Instituto Tecnológico de Pachuca, CICATA- IPN; México
auva5404@prodigy.net.mx

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo recopilar la información necesaria para el diseño de situaciones didácticas que permitan a los estudiantes de Álgebra Lineal establecer relaciones entre Bases propias y no propias, de tal forma que una vez identificada una base cualesquiera, el estudiante podrá caracterizarla a través de elementos como espacios y subespacios vectoriales, base canónica, dependencia e independencia lineal y dimensión de una base.

Las relaciones que los estudiantes pueden establecer las resumimos en la tabla #1

Tipo de Base	Relación	Reducción	Dimensión
Base propia	Espacio vectorial	Base Canónica	# de vectores linealmente independientes
Base no propia	Subespacio vectorial	Carece de base canónica	# de vectores linealmente independientes

La problemática que se presenta, es que a los estudiantes les resulta difícil establecer dichas relaciones, porque en los textos existentes no las ponderan, por ejemplo, no mencionan que una base no propia pertenece a un subespacio vectorial, esto aunado a la problemática de conceptos como espacios y subespacios vectoriales que resultan no tangibles para los alumnos. De acuerdo a Chargoy (2002) los estudiantes en general solo tienen la noción de base, ellos pueden escribir la definición e incluso recitarla, pero no poseen el entendimiento del concepto. Los conceptos de combinación lineal, independencia lineal y generación de un espacio vectorial se encuentran aislados en el estudiante.
Por eso enfatizamos en la necesidad de articular todos estos conceptos y procedimientos que le permitirá al estudiante la adquisición real y efectiva de los conocimientos del álgebra lineal. El marco teórico que utilizamos es el de la teoría de las situaciones didácticas, Por considerarlo acorde con nuestro objetivo principal en la investigación. La metodología a desarrollar es la Ingeniería Didáctica. El análisis a priori que se realizó en este marco estuvo fundamentado en considerar las dificultades que presentaron los estudiantes en la solución de problemas en los cuales se les solicitaba encontrar bases y espacios vectoriales, ello nos permitió establecer la problemática y por ende la necesidad de establecer relaciones por parte de los estudiantes y por ende la necesidad de diseñar situaciones didácticas para que los alumnos logren apropiarse de los conocimientos del álgebra lineal que son medulares en el tema de bases y dimensiones.

Introducción

La matemática educativa en términos generales, se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático, consideramos que ella juega un papel primordial para estos propósitos. Desde el enfoque de esta disciplina, en la presente investigación, nos interesa conocer y determinar cómo los estudiantes realizan construcciones que relacionan a las bases propias con las no propias, cuáles son los significados que ellos manejan y reconocen en el medio escolar, y después cómo los reconstruyen cuando interactúan en esos ambientes nuevamente.

Cabe hacer mención que en el medio escolar y particularmente en los textos de álgebra lineal, no se mencionan los términos base propia y base no propia, lo que se hace es dar la definición de base en general como lo establece Grossman, S. (1996):

Base Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2 \, ..., v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si

i) $\{v_1 , v_2 , ..., v_n\}$ es linealmente independiente

ii) $\{v_1 , v_2 , ..., v_n\}$ genera a V

esto da lugar a la siguiente premisa:

Todo conjunto de vectores linealmente independiente en R^n es una base en R^n

Como podemos leer las características fundamentales de una base propia serían que los vectores que forman dicha base sean linealmente independientes, por un lado y por el otro, que tales vectores generen al espacio vectorial V. En el caso de una base no propia, se trata de encontrar bases para algún o algunos subespacios, que, finalmente cumplan con la definición. A lo largo de nuestra práctica docente, hemos percibido que hacer esta clasificación tiene un impacto benéfico en el aprendizaje de los estudiantes y mediante la implementación de situaciones didácticas, así como la articulación con una metodología apropiada, resulta pertinente para alcanzar nuestros propósitos: lograr que los conocimientos o saberes matemáticos sean accesibles a los estudiantes, es decir que ellos se apropien de dichos conocimientos de tal manera que sean capaces de enfrentar problemas y resolverlos en forma adecuada. Con lo anterior se pretende que los saberes adquieran nuevos significados, recuperen sus significantes iniciales o se profundice en ellos ya que es la nueva problemática que nos lleva a reflexionar sobre la reorganización de la obra matemática. Tenemos que considerar también, que en el sistema educativo nacional, existe una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, Cordero (2001), puesto que como docentes e investigadores, nos hemos percatado de la presencia de prácticas sociales de la actividad humana tales como: modelar, aproximar, predecir, medir, buscar tendencias (Aguilar, 2001) y otras, que no han sido integradas a la currícula de las instituciones en donde se imparte Álgebra Lineal. Sin embargo estas prácticas sociales han permitido construir cierto tipo de conocimiento conducente a la reconstrucción de significados en otras áreas de la matemática , en particular del álgebra lineal, así como temas afines.

Nos interesa profundizar en el significado de base, para después establecer relaciones y diferencias entre bases propias y no propias; que perciben los estudiantes, para enriquecer dicho significados, y realizar una epistemología de las prácticas sociales, que se llevan a cabo alrededor de esos conceptos.

Pondremos en escena dos secuencias, una que corresponde a la generación de bases propias y la otra corresponde a la generación de bases no propias, en el marco de la aproximación socioepistemológica, para hacer ver la necesidad de ampliar los estudios de representaciones mentales, Aguilar(1999b) a la de las prácticas sociales.

La aproximación socioepistemológica como línea de investigación

Con la aproximación socioepistemológica, hacemos un énfasis especial en la dimensión social y en la diferencia con otras aproximaciones teóricas que también la incluyen.

La aproximación socioepistemológica en la investigación en Matemática Educativa busca construir una explicación sistémica de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas por medio de cuatro componentes fundamentales del conocimiento matemático: se incorpora al estudio de la epistemología del conocimiento, la dimensión cognitiva, la didáctica y todo esto, dentro de la dimensión social (Cantoral, 2000).
Esta última dimensión permite enfocarnos en la organización social donde el conocimiento tiene significados propios y está conformado por versiones que se comparan y negocian durante el proceso mismo de la actividad. La argumentación, característica propia de una organización social, juega un papel central al intentar convencer de la validez de versiones particulares. Esto implica reconocer los recursos, versiones, argumentos y la construcción de consensos acerca de cierto contenido matemático que necesariamente se dan en los contextos interactivos de los estudiantes.
La componente social es reconocida por diversas aproximaciones teóricas que la han incorporado a sus marcos explicativos. Sin embargo, las consecuencias de esta incorporación varían según la base teórica que maneja cada una. Abordaremos, en particular, el caso de la cognición situada y de las aproximaciones socioculturales.
La cognición situada adopta como principio fundamental el constructivismo social, el cual toma en cuenta las dimensiones histórica, cultural y social de las interacciones humanas. El aprendizaje humano es entendido como un proceso de diálogo y de socialización (Cordero, 2001), pero sus explicaciones mantienen un corte cognitivo.
La socioepistemología pretende desarrollar estrategias de investigación de naturaleza sociales.
Elementos como argumento, consenso y herramienta, presentes en contextos socialmente organizados, conforman la plataforma que brinda explicaciones acerca de cómo se construye el conocimiento reconstruyendo significados, en la presente investigación será a través del establecimiento de relaciones entre bases propias y no propias.

La teoría de situaciones didácticas, como marco teórico

"La didáctica de las matemáticas" estudia las actividades didácticas, es decir, las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que tienen de específicas respecto de las matemáticas. Los resultados, en este dominio, son cada vez más numerosos, se refieren a los comportamientos cognitivos de los alumnos, pero también a los tipos de situaciones puestas en juego para enseñarles y sobre todo los fenómenos a los cuales da lugar la comunicación del saber. La producción o la mejora de los medios de enseñanza encuentra en estos resultados más que objetivos o medios de evaluación, encuentra en ella un apoyo teórico, explicaciones, medios de previsión y de análisis, sugerencias, incluso dispositivos y métodos, Brosseau (1986).

La ingeniería didáctica como metodología

Se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Su forma de validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori Artigue (1995).

La ingeniería didáctica da como resultado diversos métodos y formas de implementación de una secuencia didáctica que a su vez forma parte de la situación.

El método

Consiste en el desarrollo de seis etapas:

La primera etapa parte de una experiencia epistemológica, estudiando el contenido matemático correspondiente al tópico del proyecto, ahí se organiza dicho contenido matemático con base a lo que significa entender el concepto y cómo el concepto puede ser construido por el que aprende.

En la segunda etapa, se trabajan ejemplos de diseño e implementación de situaciones, en la realización de actividades con estudiantes, que en nuestro caso serán entrevistados en grupos de tres.

Etapa tres, en ella se realizan análisis de los datos coleccionados y posteriormente se reconsidera la experiencia que fue punto de partida. Las interpretaciones de las respuestas dadas por los estudiantes ante las situaciones, estarán basadas en el marco de las construcciones mentales; y en el desarrollo de estas ante las situaciones. Aquí se estudian las bases para transformar los datos o hechos en fenómenos didácticos.

Etapa cuatro, consiste en la iteración con el resultado de la etapa tres. Es una revisión de la experiencia epistemológica de la cual se partió en la etapa uno. El resultado provee los fundamentos de la siguiente aplicación de situaciones diseñándolas e implementándolas en una base *socioepistemológica*.

Etapa cinco, en ella se aplican o implementan los rediseños y se coleccionan los datos. Se trabaja (en la investigación presente) con estudiantes en grupos de tres, ya que tenemos evidencias de que en forma grupal, los estudiantes, realizan mayor número de construcciones y con mayor rapidez (Aguilar, M y Martínez, M, 1998; Aguilar, 1999).

Etapa seis, se podría denominar "etapa del análisis de datos" y en ella se pretende alcanzar un refinamiento del recorte o amplitud del entendimiento del cual se partió. Las interpretaciones continúan dentro del marco de las construcciones mentales.

Momentos de la secuencia didáctica

- M1 Localización de fuentes para la construcción de bases
  - i) a partir de un conjunto de vectores $\mathbf{V} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$
  - ii) a partir de un conjunto de polinomios $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
  - iii) a partir de un conjunto de matrices $\mathbf{M} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$
  - iv) a partir de un sistema de ecuaciones lineales
- M2 Realización de combinaciones lineales
- M3 Generación de una matriz
- M4 realización de una reducción simplex
- M5 Establecimiento de criterios para determinar si la matriz original es una base propia o no propia.

Ejercicio #1 Caracterice a

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio #2 caracterice a

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

*se inicia desde M3 la matriz generada es la misma

*M4 reducción simples para B1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*M5 Criterios para caracterizar a B1

a) el # de filas de la matriz original es igual al # de filas de la matriz reducida

b) rango (ρ)= 3, nulidad (ν)=0 dim.= 3

c) por los incisos a) y b) se trata de una **base propia**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

*Se inicia desde M3 la matriz generada es la misma

* M4 reducción simplex para B2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*M5 Criterios para caracterizar a B2

a) el # de filas de la matriz original igual al # de filas de la matriz red.

b) rango (ρ)=1, nulidad (ν)=2,dim=2

c) por los incisos a) y b) se trata de una **base no propia**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Parámetros para la caracterización de una base

CARACTER	SIGNIFICADO	BASE PROPIA	BASE NO PROPIA
Dimensión dim.	Número de vectores linealmente independientes	Formada por los vectores de la matriz original	Formada por los vectores encontrados
Rango ρ	Número de filas de la matriz reducida	Es el mismo número de filas de la matriz original	Es diferente al número de filas de la matriz original
Nulidad ν	Número de filas nulas de la matriz reducida	No posee filas nulas	Posee filas nulas
Espacio nulo η	Espacio generado por los vectores linealmente independientes de una base no propia	No tiene espacio nulo	Tiene espacio nulo

Resultados y conclusiones

Algunos resultados obtenidos por los estudiantes son:

a) Resignificaron las nociones de base propia y base no propia

b) Encontraron que, si el número de filas de la matriz original es igual al número de filas de la matriz reducida, el valor del determinante de la matriz reducida es diferente de cero, la reducción total de la matriz original da como resultado una base canónica, se trata de una base propia. Por otro lado, si el número de filas de la matriz original es diferente al número de filas de la matriz reducida, el determinante de la matriz reducida es igual a cero, la reducción total de la matriz original da una matriz no canónica, se trata de una base no propia.

Podemos concluir que mediante la puesta en escena de una secuencia didáctica como la propuesta en este trabajo, los estudiantes logran resignificar conceptos acerca del álgebra lineal construyendo sus propios conocimientos, para lograr un aprendizaje efectivo.

Bibliografía

Aguilar, M. A. (1994 - 2000) Curso de Matemáticas III (Álgebra Lineal). Impartido a estudiantes de las carreras de Ingeniería en Sistemas, Civil, Eléctrica y Mecánica. ITP, México.

Aguilar, M. A. (2002)Relaciones entre la derivada y la primitiva; el papel del registro gráfico. Actas XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. ED. Cecilia Crespo, V. 15, pp 1004 – 1009.

Aguilar; M.A. y Martínez M.D., (1998) "Relaciones entre la derivada y su primitiva a la luz del comportamiento tendencial de las funciones; un estudio preliminar". Tesina. Trabajo de investigación presentado en el 2º. Seminario Nacional de Investigación de Didáctica de las Matemáticas. Monterrey, N.L. México.

Aguilar, M.A. (1999) "Construcciones Mentales en ambientes gráficos"; (Estudio de algunas relaciones entre la primera derivada y su función Primitiva), Tesis de especialidad en Didáctica de la Matemática. Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares, la Habana, Cuba (no publicada).

Aguilar, M.A. (2000a) "Diseño de situaciones didácticas para la enseñanza de las Matemáticas con un enfoque Sociocultural" Curso impartido a profesores de Ingeniería en el Instituto Tecnológico de Pachuca, enero.

Aguilar, M. A. (2002)Relaciones entre F y F´ el papel del registro gráfico..." Reporte de Investigación publicado en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol XV Tomo 2 pp 1004-1009.

Aguilar, M. A. (2003) "Reconstrucción de Significados que realizan los estudiantes entre F y F´, cuando interactúan en ambientes gráficos". Reporte de Investigación publicado en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol XVI Tomo 2 pp 704-709.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* (pp. 33-59) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brosseau, G. (1986), "Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas"*Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Volumen 13, 54-62*).* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa México: Grupo Editorial Iberoamérica .

Cordero, F. (2001), "La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 4, núm. 2, pp 103-128

Grossman, S. (1996) Álgebra Lineal, V edición, Ed. Mcgraw Hill

Chargoy, R.M. (2002). "Diseño de una secuencia de actividades para el análisis conceptual de la base de un espacio vectorial". Actas Relme XV, pp. 259- 264.