EXPERIENCIA SOBRE UNA PROPUESTA METODOLÓGICA Y DIDÁCTICA PARA LA CAPACITACIÓN DE PROFESORES DE EGB 3 Y POLIMODAL

M. E. Ascheri - R. A. Pizarro
Universidad Nacional de La Pampa- Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos como consecuencia del dictado de un Curso de Capacitación para Profesores de EGB 3 y Polimodal, llevado a cabo en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa. Aprovechando las alternativas que ofrece la evolución tecnológica para propiciar cambios en el enfoque de enseñar y aprender matemática, teniendo en cuenta que la informática ocupa un lugar cada vez más importante en nuestra sociedad y resulta de gran utilidad en el campo educativo, les presentamos a los profesores una propuesta metodológica y didáctica complementaria para la enseñanza del tema *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas*. Esta propuesta consiste, básicamente, en utilizar métodos que usualmente no se enseñan en la Escuela de Nivel Polimodal, con el complemento de la computadora como herramienta colaboradora. Estos métodos permitirán que el alumno analice expresiones polinómicas que no tienen solución exacta, que son de orden elevado y, por consiguiente, son difíciles de tratar por medio de los métodos convencionales. Este tipo de expresiones provienen, por lo general, de problemas técnicos o de situaciones problemáticas de la vida real cuyo tratamiento puede motivar al alumno, facilitando de esta manera el proceso de enseñanza - aprendizaje relativo a la *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas de cualquier orden*. La motivación especial que nos condujo a la elaboración y dictado de este Curso fue la de intentar mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje referido a esta temática en los niveles educativos citados anteriormente. Los participantes respondieron activamente a las distintas propuestas de trabajo que se presentaron a lo largo del desarrollo del Curso. Es por ello que podemos concluir que esta experiencia resultó positiva.

Introducción

Buscar las raíces de una ecuación polinómica es uno de los problemas más antiguos de las matemáticas, y en aplicaciones prácticas es frecuente encontrarse con la necesidad de resolver esta dificultad. Sabemos que sólo las ecuaciones de orden bajo pueden resolverse por fórmulas directas y van a dar valores exactos sólo en ciertos casos. También algunas ecuaciones previamente "preparadas" por el profesor, podrán ser resueltas por fórmulas directas y darán resultados exactos. Pero las ecuaciones que resultan de problemas técnicos rara vez caen en esta situación. De aquí que necesitamos recurrir a otros métodos para resolver este tipo de problemas. Las técnicas numéricas que presentamos en este Curso de Capacitación para Profesores son adecuadas para solucionar estos problemas. El aprendizaje de los métodos numéricos no sólo aumenta nuestra habilidad para el uso de las computadoras, sino también amplía la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos. Cuando un profesor y alumnos se encuentran en clase, la regla es que el primero está ahí para enseñar un saber determinado y los alumnos para aprender este saber en concreto. El trabajo del profesor será el de elegir puestas en escena de saberes aceptables para los alumnos y eficaces respecto del objetivo de aprendizaje. Se deben brindar las herramientas para la comprensión del saber matemático, para ayudar a los alumnos en sus esfuerzos para conceptualizar la realidad, para desarrollar su agilidad mental y su espíritu crítico. Las situaciones problemáticas que surgen de las matemáticas y en otros contextos, constituyen un primer encuentro de los alumnos con los objetivos implícitos, en el que se les ofrece la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos. Pensamos que los alumnos se verán más motivados si les presentamos este tema a través de situaciones problemáticas de la vida real, relacionadas con otras asignaturas (física, química, etc.). Las ecuaciones que resulten, en la mayoría de los casos, deberán ser resueltas por las técnicas numéricas que desarrollamos en este Curso. Para resolver estas situaciones problemáticas, los alumnos deberán hacer un análisis a priori de los datos y a posteriori de los resultados obtenidos. Puede resultar productivo agregar actividades complementarias en donde tengan que resolver este tipo de problemas, utilizando además la computadora como herramienta de apoyo al docente y para fomentar el aprendizaje de los alumnos, provocar comportamientos de iniciativa, búsqueda de coherencia y espíritu crítico. El objetivo fundamental de esta propuesta metodológica y didáctica ha sido el de intentar mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje referido a esta temática, promoviendo el protagonismo del sujeto y facilitando el trabajo que, para alumno y profesor, supone la tarea de formación.

Desarrollo

La razón principal para resolver ecuaciones polinómicas por medio de métodos numéricos, es que esas ecuaciones no se pueden resolver por medio de fórmulas directas y carecen de solución exacta, excepto para muy pocos problemas. Los objetivos generales que nos planteamos para realizar este Curso de Capacitación para Profesores fueron los siguientes:

Introducir a los participantes en el estudio de los métodos numéricos para resolver ecuaciones polinómicas.

Proporcionar las herramientas para la solución de problemas que se relacionan con las raíces de ecuaciones polinómicas, y que a menudo son imposibles de resolver analíticamente.

Tener la suficiente información para aprovechar satisfactoriamente una amplia variedad de problemas que se relacionan con las raíces de ecuaciones polinómicas.

Dominar las distintas técnicas, valorar su confiabilidad y estar capacitado sobre la elección para escoger el mejor método (o métodos) para cualquier problema particular que involucre la determinación de las raíces de una ecuación polinómica.

Promover la comprensión de la importancia de los métodos numéricos en la resolución de problemas que involucren ecuaciones polinómicas, vinculados con otras disciplinas.

Comprender y valorar la importancia de utilizar la computadora como una herramienta de enseñanza - aprendizaje, para la determinación de las raíces de ecuaciones polinómicas.

Brindar herramientas teóricas y prácticas básicas para la elaboración de una clase de ensayo que incluya las distintas técnicas numéricas analizadas a lo largo del Curso.

y los objetivos particulares fueron:

Entender la interpretación gráfica de una raíz.

Conocer la interpretación gráfica de los distintos métodos de aproximación para la obtención de las raíces de ecuaciones polinómicas.

Saber las diferencias fundamentales entre las distintas técnicas existentes para la determinación de las raíces de ecuaciones polinómicas.

Aplicar los métodos de aproximación para la obtención de las raíces de ecuaciones polinómicas a situaciones problemáticas de la vida real.

Orientar a los participantes en el proceso de formulación y edición de una clase de ensayo en vinculación con la resolución numérica de ecuaciones polinómicas.

El Curso tenía una carga horaria total de 40 horas reloj, siendo 5 las reuniones presenciales de 3 horas reloj cada una. En estas reuniones se introdujeron a los participantes en los temas propuestos en el Curso, desarrollando la teoría básica necesaria para tal fin. Además, en cada una de estas reuniones los participantes debían resolver distintas situaciones problemáticas referidas al tema previamente desarrollado, bajo nuestra coordinación y

orientación. Con esta etapa se logró una activa participación de los cursantes, y el trabajo colectivo y grupal de los mismos. En el último encuentro se plantearon las dudas e inquietudes referidas, fundamentalmente, a las diferentes propuestas de trabajo elaboradas por los participantes (clase de ensayo). Las consultas sobre las propuestas de trabajo se presentaron oralmente para su consideración colectiva y eventual revisión y / o corrección. Las mismas podían ser elaboradas de manera individual o grupal (no más de tres integrantes por grupo). Para aprobar este Curso, los participantes debían presentar y defender sus propuestas de trabajo (clase de ensayo).
A continuación, presentamos una versión sintética del Programa Analítico que desarrollamos durante el Curso:

Determinación de las raíces de una ecuación polinómica. Distintos métodos (acotación, separación, Regla de Descartes, Teorema de Sturm, Regla de Hua, Regla de las lagunas). Desarrollo de ejemplos.

Aproximación de las raíces de una ecuación polinómica. Distintos métodos (gráfico, bisección, regla falsa, iterativo de punto fijo, secante, Newton, Newton – Raphson, DC o de diferencia de cocientes). Desarrollo de ejemplos.

Si bien no se espera que todos los temas de este Programa sean tratados en un solo año del Nivel correspondiente, sí se propone que alguno de estos contenidos los alumnos deberían tener la oportunidad de aprender.
La estrategia utilizada para el análisis de cada uno de estos temas fue la de combinar la enseñanza tradicional y las técnicas grupales de aprendizaje activo, utilizando la computadora como herramienta colaboradora de las tareas a realizar.
En lo que respecta a la elaboración de las diferentes propuestas de trabajo (clase de ensayo) que debían presentar los participantes, hicimos hincapié en el hecho de que la implementación de las actividades debían tener como funcionalidad pretendida, facilitar el aprendizaje como apoyatura de la explicación del profesor. En la búsqueda de las actividades se debe tener en cuenta que cada alumno tiene sus propias necesidades, motivaciones, deseos, aspiraciones, las cuales dependen de su estructura cognitiva y varían por medio del aprendizaje. También es importante tener en cuenta las diferentes motivaciones con que el alumno puede acercarse y recibir estas actividades: aprendizaje básico de un tema, aprendizaje detallado, repaso de conocimientos, búsqueda de información “en profundidad” o en “amplitud”, autoevaluación, evaluación.
Además, las actividades deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos, a fin de que los asuman como propios y deseen resolverlos.
Para elaborar y llevar a la práctica (en un futuro) la clase de ensayo, se plantearon los siguientes objetivos:

Que sea de fácil comprensión para los alumnos con un conocimiento mínimo de matemáticas.

Proporcionar las herramientas para la solución de problemas que se relacionan con las raíces de ecuaciones polinómicas, y que a menudo son imposibles de resolver analíticamente.

Promover la comprensión de la importancia de los métodos numéricos en la resolución de situaciones problemáticas que involucren ecuaciones polinómicas, vinculadas con otras disciplinas.

Capacitar a los alumnos para que practiquen los métodos numéricos en una computadora, y comprueben la importancia de su utilización como una herramienta colaboradora para resolver distintas situaciones problemáticas de la vida real.

Proporcionar software que resulte fácil de comprender.

Fomentar el trabajo como miembro participante de una grupo para el desarrollo de las actividades, en función de favorecer la integración grupal.

Para alcanzar estos objetivos se deben tener en cuenta ciertos saberes previos:

El significado matemático de lo que es encontrar una raíz de una ecuación polinómica, sean reales o complejas, tanto gráfica como analíticamente.

Los métodos estándares para obtener las raíces de una ecuación polinómica, tanto con fórmulas directas como a través de casos de factoreo, del teorema del resto u otros.

Trazado de gráficos de funciones polinómicas, a partir de una tabla de valores.

Seguidamente presentamos algunas de las propuestas de trabajo (clase de ensayo) elaboradas por los participantes:

Grupo 1

Una fábrica decide envasar 385.84 cm^3 de jugo natural en envases de forma cúbica (tetrabrik) y cilíndrica (latitas), considerando que la base del cilindro es un círculo de 6.4 cm de diámetro. Determinar la altura de ambos envases, sabiendo que el cubo tiene 4.72 cm de altura menos que el cilindro.

La ecuación es $P(x) = x^3 - 14.16x^2 + 34.6852\,x - 105.15405$.

Aplica la Regla de Ruffini para acotar las raíces del polinomio.

Mediante la Regla de Hua verifica si el polinomio tiene raíces complejas.

Mediante el método de Newton aproxima el valor de la raíz del polinomio, utilizando como valor inicial, la cota inferior que hallaste en el punto nº 2, iterando 2 veces. La derivada del polinomio es $P'(x) = 3x^2 - 28.32\,x + 34.6852$.

Utilizando un software que realice gráficos de funciones, obtiene la gráfica para comprobar el resultado obtenido en el punto nº 4.

Solución

2) Regla de Ruffini

	1	-14.16	34.6852	-105.15
11.5		11.15	-30.59	47.0948
	1	-2.66	4.0952	-58.0552

Cota inferior = 11.5.

	1	-14.16	34.6852	-105.15
15		15	12.6	709.278
	1	0.84	47.2852	604.128

Cota superior = 15.

3) Regla de Hua

$14.16^2 > 1 * 34.6852$ $\qquad$ $34.685^2 > 14.16 * 105.15405$.

Por lo tanto, el polinomio tiene un par de raíces complejas.

4) Método de Newton

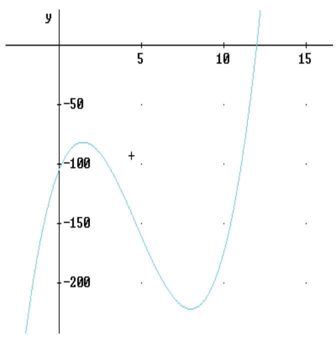
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,3} - 14.16x_n^{\,2} + 34.6852x_n - 105.15405}{3x_n^{\,2} - 28.32x_n + 34.6852}$$

$x_0 = 11.5$

$x_1 = 12.048997$

$x_2 = 12.000189$. Luego, $x \cong 12$.

5) Graficamos y obtuvimos una raíz real positiva en 12.



Respuesta.

La altura de la lata es de 12 cm y la altura del tetrabrik es de 12 cm - 4.72 cm = 7.28 cm.

Grupo 2

Se quiere estudiar la variación de la temperatura promedio de la superficie de un planeta, sabiendo que recibe radiaciones de una estrella cuya temperatura aumenta, aunque muy lentamente. La temperatura promedio del planeta se puede calcular a través de la siguiente fórmula: $T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$, con x en millones de años y T en ºC.

Se desea averiguar si en un período de 4 millones de años, la temperatura promedio puede llegar a tomar el valor de 0º C.

Paso 1: Se explicará a los alumnos la regla de Descartes.

Sea P(x) un polinomio de raíces reales y considérese la ecuación P(x) = 0, donde P(x) está escrito en orden decreciente de las potencias de x. Aplicaremos el teorema de Descartes:

El número de raíces positivas no es más grande que el número de variaciones de signos de P(x).

El número de raíces negativas no es más grande que el número de variaciones de signos de P(-x).

Se dice que tiene lugar una variación de signo en P(x) si dos términos sucesivos tienen signos opuestos, los términos que faltan son ignorados.

En la situación:

$T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$. Apliquemos la regla: +1 -6 +11 -5, luego hay tres o menos raíces reales positivas.

$T(-x) = -x^3 - 6x^2 - 11x - 5$. Apliquemos la regla: -1 -6 -11 -5, luego no hay raíces reales negativas.

Primera conclusión: Sabiendo que las raíces complejas aparecen de a pares, puede ocurrir: 1) Tres raíces reales positivas, o bien, 2) Una raíz real positiva y dos complejas.

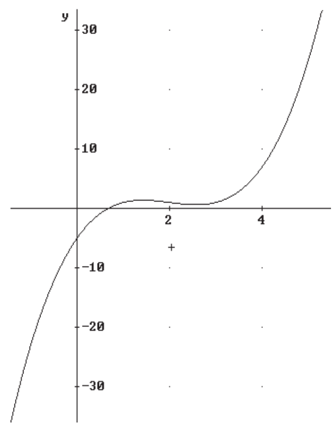
Paso 2: *Se aproximarán las raíces mediante el método gráfico. Se graficará la función T(x) para observar en este caso, donde cruza el eje x. Este punto proporcionará una aproximación inicial de la raíz.*

En la situación:

$T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = 0$.

Con esta tabla de valores se realiza la gráfica. La curva cruza el eje x entre 0 y 1, encontrando una aproximación de la raíz de 0.62, que se acerca a la raíz aproximada.

x	$T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$
-1	-23
0	-5
0.5	-0.875
0.6	-0.344
0.62	-0.248072
1	1
1.5	1.375
2	1
2.5	0.625
2.8	0.712
3	1



Paso 3: *Se aproximarán las raíces mediante un método gráfico, pero en este caso usando herramientas computacionales como pueden ser los programas Derive, Winfun o Graphmat.*

Aclaración. Este trabajo se puede hacer en la sala de cómputos, donde los alumnos en grupo puedan verificar que la gráfica que realizaron manualmente se aproxima a la obtenida con la PC. Asimismo, se podrá obtener una mejor aproximación a la raíz buscada.

***Paso 4*:** Se explicará a los alumnos el método de Newton y el método de Newton – Raphson. En cada iteración del método de Newton debemos evaluar no sólo f(x) sino también f'(x), lo cual suele ser tedioso de realizar. Surge así la siguiente variante del método de Newton que se conoce como método de Newton - Raphson, y que resulta de aproximar $f'(x_n)$ con $f'(x_0)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, ...$$

En la situación:

Se sabe que el valor aproximado a una raíz de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = 0$ se encuentra en el intervalo [0, 1]. Se realizarán unas tantas iteraciones, teniendo en cuenta ciertas consideraciones: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11, \ x_0 = 0$ Se obtienen los datos presentados en la tabla. Mediante el método de Newton - Raphson se ha encontrado el valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = 0$. Este valor: **x = 0.67455474,** es el que nos da la solución del problema propuesto.

n	x_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
0	0	0.45454545	-1.14575507
1	0.45454545	0.55870501	-0.55275215
2	0.55870501	0.6089552	-0.30063472
3	0.6089552	0.63628563	-0.17240826
4	0.63628563	0.65195911	-0.10163822
5	0.65195911	0.66119895	-0.06085024
6	0.66119895	0.66673079	-0.0367592
7	0.66673079	0.67007253	-0.02232465
8	0.67007253	0.67210205	-0.01360174
9	0.67210205	0.67333857	-0.00830323
10	0.67333857	0.67409341	-0.00507471
11	0.67409341	0.67455474	-0.00310376
0.67455474			-0.00310376
Raíz aproximada:		**x =**	**0.67455474**

Paso 5: *Se aproximarán las raíces mediante el uso de un software específico. En este caso, se utiliza un programa hecho en MATLAB.*

Puesta en común. Esta se realizará mediante el debate entre los grupos de alumnos y la explicación pertinente del profesor a cargo. Mediante la misma se llegará a la solución del problema propuesto como disparador de este trabajo.

Conclusión. Se ha constatado que la temperatura promedio puede llegar a tomar el valor de 0° C, y como consideramos a x en millones de años, esto se producirá aproximadamente a 674555 años de comenzada la irradiación de calor de la estrella sobre el planeta

Resultados y conclusiones

Hubo una muy buena respuesta por parte de todos los grupos de trabajo. La experiencia resultó positiva. La presentación y discusión de las propuestas de trabajo (clase de ensayo) permitió aclarar algunas dudas que no se habían presentado durante el desarrollo del Curso. Los participantes observaron además, que esta propuesta metodológica podían implementarla en los temas subsiguientes a ecuaciones polinómicas: ecuaciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, con amplia aplicación en otras disciplinas (como física, química, estadística, etc.). Si bien algunos de los participantes no daban este tema en la actualidad (por ser docentes de otros Cursos) observaron y propusieron su aplicación en el área de Tecnología. Los principales aportes de este trabajo son:

La incorporación y contemplación de aspectos pedagógicos y educativos.

La aplicación de una variedad de estrategias apropiadas para resolver distintas situaciones problemáticas.

El incremento de la motivación y el desarrollo de las destrezas.

Bibliografía

Ausubel, D., Novak, J. (1997) *"Psicología Educativa. Un punto de vista cognitivo",* México, Trillas.

Brousseau, G. (1987) *"Fondements et méthodes de la didactique. Recherches en Didactique des Mathematiques"*, Vol. 7, Nº 2, pp. 33-115, La Pensée Sauvage, Grenoble France.

Chevallard, Y., Bosch, M. - GASCÓN, J. (2000) *"Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje",* 2º Ed., Barcelona: ICE, Universidad Autónoma de Barcelona, Horsori.

Gerald, C., Wheatley, P. (2000) *"Análisis Numérico con Aplicaciones",* México, Pearson Educación.

Kaczor, O., Schaposchnik, R. (1999) *"Matemática I"*, Argentina, Santillana.

Nakamura, S. (1992) *"Métodos Numéricos Aplicados con Software",* México, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.