FACTOREO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS: UNA INNOVACIÓN EN SU ENSEÑANZA

María Rey Genicio; Graciela Lazarte; Clarisa Hernández y Silvia Forcinito
Universidad Nacional de Jujuy, Argentina
tresm@imagine.com.ar

Resumen

La propuesta didáctica que se presenta se sostiene en un Proyecto de Investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. Se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo que adopta la «Ingeniería Didáctica» (Artigue, M. 1996), como metodología para la investigación. Ésta se sustenta en un conjunto de secuencias de clases concebidas y organizadas para efectuar un proyecto de aprendizaje que, una vez experimentado, es contrastado con los análisis a priori a fin de validar las hipótesis planteadas. Pretende brindar al profesor un material estructurado en forma clara, precisa y amena, elaborado con todos los elementos que consideramos necesarios para ser un instrumento eficaz para la enseñanza de Factoreo. Fue diseñado, no como algo prescriptivo sino, como una reflexión sobre la "buena receta", es decir, para que oriente el análisis y los criterios de acción, discuta y exprese los supuestos y permita al docente decidir entre alternativas y comprobar resultados (DAVINI, 1997, pag 132). Históricamente, la enseñanza de Factoreo de Expresiones Algebraicas ha presentado grandes dificultades. A nuestro criterio esto obedece a una enseñanza basada en la memorización y el mecanicismo. Es por ello que nos propusimos su abordaje a través de una serie de actividades mediante las cuales los alumnos podrán construir el concepto de factoreo, ya que se les propone una mayor implicación y razonamiento que en las propuestas tradicionales de enseñanza. En el desarrollo de las actividades se ha utilizado con frecuencia el marco geométrico, como una forma de darle mayor significación al concepto. Además de innovarse en la gestión de la clase por la formación de grupos de trabajo en los que los alumnos construyen el conocimiento y por la recuperación de sus saberes para la institucionalización de los conceptos, se han diseñado también una variedad de juegos que superan la ejercitación tradicional.

Consideraciones sobre la propuesta

En el marco de la investigación Estrategias Innovadoras en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Medio se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema: Factoreo de Expresiones Algebraicas. Esta investigación se nutre teóricamente de los aportes de la psicología del aprendizaje y de la didáctica de la matemática. Sintetizamos a continuación los aportes más relevantes de cada una.

De la fuente psicológica tomamos las teorías cognitivas que entienden que el aprendizaje efectivo requiere participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, ya que este proceso está mediado por procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado. Entonces la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje mientras que la acción del docente es aportar las ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

Se toma también el concepto de Interacción Socio–Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo, aunque en ellos se hace necesaria una intervención del docente cuidadosa, optimizando las actividades, facilitando los intercambios cognitivos, supervisando recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos. Complementariamente, desde la didáctica de la matemática, en la "Teoría de las situaciones" de Brousseau, el rol del docente consiste en organizar la secuencia de problemas que entregará a los alumnos de modo que éstos la acepten y se responsabilicen por encontrar la solución, y debe ser la misma situación la que permita al alumno juzgar el resultado de su trabajo. Una vez que los alumnos hayan encontrado al menos alguna solución o soluciones parciales procederá a la "institucionalización" en la que dará un estatuto cultural a las producciones de los alumnos, desprendiéndolas de todo aquello que sea irrelevante.

Por otra parte, de la fuente didáctica general tomamos el concepto de estrategia didáctica de Bixio: conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica, o sea, de lograr un aprendizaje en el alumno. Algunos de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en las construcciones de sentido previas de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

Ya en el campo de la didáctica de la matemática, la propuesta se apoya en la «ingeniería didáctica» (Douady, 1996): elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje. En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.

La concepción y el diseño de las actividades se encuadran dentro de «la teoría de las situaciones didácticas» de Guy Brousseau: proponer situaciones «adidácticas» en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; sino provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. Así, la llamada «Situación fundamental», dada por las situaciones adidácticas, enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Intervienen las «variables didácticas» para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad, y las «recontextualizaciones» de los conceptos tratados en los marcos geométrico y algebraico le otorgan significatividad a la propuesta.

En la resolución de los problemas, se espera que aparezcan distintas estrategias. También se sugieren puestas en común en las que se validen los resultados, se detecten los errores, se analicen las distintas propuestas y representaciones que se hayan utilizado, se elijan las más eficaces, se debatan las argumentaciones, se identifiquen los

conocimientos puestos en juego, etc. a fin de que esos conocimientos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el que se quiere construir.

Desde la «dialéctica instrumento – objeto» de Regine Douady, un concepto matemático funciona como «instrumento» cuando es la herramienta que permite resolver un problema; y funciona como «objeto» cuando es descontextualizado y aislado como objeto matemático. Los problemas diseñados responden a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Douady; ya que: los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (geométrico y algebraico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de «objeto matemático» (Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Complejidad de la tarea o nuevo problema).

Propuesta didáctica

En esta propuesta se pretende que el alumno construya el concepto de Factoreo de Expresiones Algebraicas a través de una serie de actividades que proponen una mayor implicación y razonamiento que en las propuestas tradicionales de enseñanza.

Se comienza el abordaje del tema "Producto de monomios por polinomios", presentando al alumno las siguientes actividades:

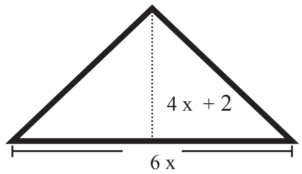
Actividad 1: En un curso de un colegio secundario un grupo de alumnos quiere realizar un afiche para promocionar un festival. El afiche a confeccionar tiene forma rectangular y su superficie tiene un área dada por la expresión**:** $A = (24x + 12)$. Cada alumno propone distintas medidas para la base (dada en dm.) del afiche, las que se indican a continuación**:**

	Esteban	Marta	Estela	Leonardo	Emilio	Mónica
base	4	2	6	12	24	5
altura						

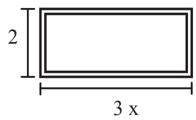
Escribe en la tabla la expresión algebraica para la altura b) ¿Qué procedimiento realizaste para obtener las distintas alturas? c) Propone una medida, para la base del afiche, que sea distinta a las indicadas en la tabla y encuentra la altura correspondiente.

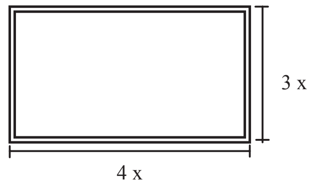
d) ¿Cómo puedes verificar en cada caso que el valor hallado es correcto? e) Expresa el área $A = 24\,x + 12$ como un producto. ¿De cuantas formas distintas puedes hacerlo?

Actividad 2: Juan y Mirta van a organizar un baile de disfraces para Carnaval y al finalizar el mismo quieren otorgar un premio al mejor disfraz. Juan propone elaborar tarjetas de invitación de forma triangular con las siguientes medidas (dadas en cm)



Mirta en cambio propone que sean dos tarjetas de forma rectangular, una donde se indique el horario y la dirección donde se llevará a cabo el baile y otra donde se especifiquen los elementos a tener en cuenta para la elección del mejor disfraz.





Después de una ardua discusión, deciden seleccionar la propuesta cuya tarjeta/s tenga menor superficie. a) ¿Con esta decisión se habrá solucionado la discusión?. b) Propone una sola tarjeta rectangular, cuyo base sea de**:** i) **6x** ; ii) **12x** y determina en ambos casos cuál deberá ser la altura para que el costo de confección sea el mismo que el que propone Mirta. c) Expresa $P(x) = 6x + 12\,x^2$ como un producto, de tres formas distintas. Encuentra los ceros de $P(x)$, es decir las raíces de la ecuación $6x + 12\,x^2 = 0$. Es el polinomio $P(x)$ divisible por $2x + 1$? y por $3\,x$?. Justifica tu respuesta.

Al incluir en la primera actividad factores que son divisores exactos de los coeficientes del polinomio y factores que no lo son, se introduce un aspecto innovador en la enseñanza de este tema en tanto supera el tratamiento habitual que focaliza la extracción del máximo común divisor, comúnmente denominado factor común. Se complejiza la actividad 2, al trabajar con factores que contienen una parte literal. Finalizadas las actividades, la puesta en común permitirá institucionalizar definiciones fundamentales como**:** factoreo, producto de monomios por polinomios y factor común.

A continuación se propone una serie variada de ejercicios con el objetivo de que el alumno reinvierta y se familiarice con el concepto recién construido, utilizando en alguno de ellos el marco geométrico. A través de distintos ejercicios se realiza la generalización al caso de Producto de expresiones algebraicas, ya que el procedimiento utilizado en el factoreo es similar al visto para los polinomios de una variable. Mediante las siguientes actividades se induce al alumno a construir el concepto de "Factor Común por grupo".

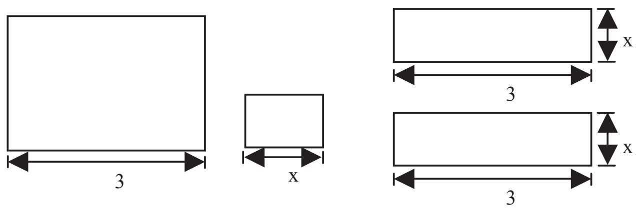
Actividad 3: Daniel desafía a Leonardo a factorear el polinomio $P(x) = x^3+5x+2x^2+10$. Daniel averiguó que el polinomio es divisible por $(x + 2)$ y realizó fácilmente el factoreo. Leonardo, que no tuvo acceso a esa información, no pudo realizarlo. Pero después de varios intentos, llegó a obtener la siguiente expresión $P(x) = x\,(x^2 + 5) + 2(x^2 +5)$. a) ¿Podrías factorear el polinomio de la forma en que lo hizo Daniel?. b) ¿Qué operaciones realizó Leonardo para llegar a la expresión indicada? Te animas a ayudarlo y completar el factoreo?

Actividad 4: Ahora es Leonardo quien le propone a Daniel factorear el polinomio $P(x) = x^5 + x - 3x^4 - 3$. Daniel no pudo obtener ninguna información sobre la divisibilidad de P(x) y no supo realizar el factoreo. Sin embargo Leonardo, después de pensar un tiempo lo factoreó con la misma idea que usó antes. ¿Puedes decir cómo lo hizo?

En la puesta en común se analizarán las dos estrategias, considerando las ventajas y dificultades de cada una, los conocimientos sobre los que se apoyan (divisibilidad, factor común), las condiciones de aplicabilidad de cada una y el sentido de la denominación de este caso.
Nuevamente se presenta una serie de ejercicios, de carácter variado, a fin de que el alumno pueda familiarizarse con el concepto de factor común por grupo. Continuando con el desarrollo de la propuesta se presenta la siguiente actividad (utilizando el marco geométrico) para abordar el tema Trinomio cuadrado perfecto

Actividad 5

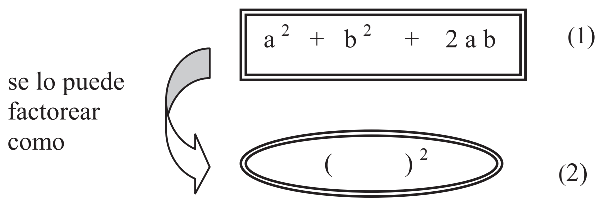
Susana le propone a Leonardo el siguiente desafío**:** Tengo dos rectángulos y dos cuadrados con las medidas dadas en el gráfico y quiero construir un cuadrado, utilizando todas las figuras y de forma que no haya solapamiento ni espacios libres entre ellas. Puedes ayudar a Leonardo a resolver el problema



a) Expresa el área total de la figura obtenida**:** 1º) como suma de las áreas de las figuras dadas y 2º) utilizando la fórmula del área de un cuadrado.

b) Realiza un procedimiento similar al del ítem a) para factorear la expresión**:** $a^2 + b^2 + 2ab$.

c) Completa y discute con tus compañeros porqué será que (1) recibe el nombre de Trinomio Cuadrado Perfecto y (2) el nombre de binomio al cuadrado. Indica qué características debe tener un trinomio para que sea Trinomio Cuadrado Perfecto

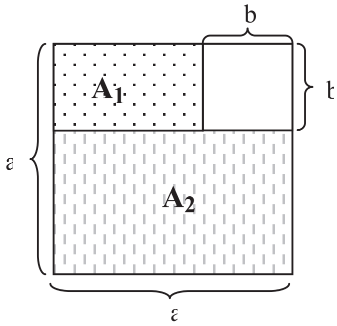


En esta Actividad, el ítem a) está pensado para que el alumno reconozca la igualdad de las dos expresiones (factoreada y polinómica). El ítem b) apunta a una generalización donde ya se incorpora el concepto de factoreo para este tipo de expresiones. El ítem c) tiene el propósito de que el alumno se desprenda del marco geométrico y trabaje en el algebraico.
Será conveniente llevar al alumno a que relacione este caso de factoreo con el desarrollo del cuadrado de un binomio, lo cual le permitirá enfrentar las situaciones en las que aparezcan términos negativos. En la ejercitación que se realiza a continuación, se incluye la siguiente actividad que tiene un doble propósito, por un lado por un lado profundiza el concepto de trinomio cuadrado perfecto y por otro, sienta las bases para trabajar el método de completar cuadrados**:**

Actividad 6: Determina el valor que debe tomar **h** para que la expresión dada sea un trinomio cuadrado perfecto. Luego reemplaza **h** por el valor obtenido y factorea la expresión**:** a) $y^2 + 10y + \mathbf{h}$ b) $9x^2 + \mathbf{h} - 36xt$ c) $\frac{1}{49}p^2 + 9q^2 - \mathbf{h}$

Luego se presentan actividades que plantean una forma alternativa al problema de factorear un trinomio (no cuadrado perfecto), con coeficientes enteros. Al mismo tiempo sienta las bases para cuando la factorización se realice a partir de las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente y para establecer las propiedades de las raíces de dicha ecuación. Se da gran importancia al trabajo en el marco geométrico. Las conceptualizaciones logradas para el factoreo del trinomio cuadrado perfecto con vinculaciones algebraicas y geométricas permiten abordar, desde un inicio, el factoreo del cuatrinomio cubo perfecto a partir de lo algebraico, sin que por ello se descuide su desarrollo geométrico. Para construir el concepto de factoreo de una diferencia de cuadrados se plantean 2 actividades

Actividad 7



a) Ubica las figuras A_1 y A_2 de tal manera que obtengas un rectángulo y luego utiliza ambas construcciones para factorear la expresión $a^2 - b^2$

b) ¿Qué nombre le pondrías a la expresión**:** $a^2 - b^2$ de forma que te permita identificarla sin ambigüedades?

c) Enuncia con palabras la expresión factoreada de $a^2 - b^2$

d) Indica si es verdadero o falso que todo número positivo se lo puede expresar como el cuadrado de un número

Actividad 8: Escribe el o los factores que faltan

a) $4x^2 - 25 = (2x - 5)(\qquad)$

b) $x^8 - 16y^4 = (x^4 + 4y^2)(\qquad) = (x^2 - 2y)(\qquad)(\qquad)$

c) $y^8 - 1 = (y - 1)(\qquad)(\qquad)(\qquad)$

d) $36a^2 - 5 = (6a - \sqrt{5})(\qquad)$

c) $(x + 2)^2 - 9 = (x + 5)(\qquad)$

En la Actividad 6 el ítem d) busca desestructurar al alumno sobre la idea de que si un número no es cuadrado perfecto no puede ser expresado como cuadrado de otro. La Actividad 7 ítem a), b) y c) están pensados en una secuencia de complejidad creciente que los lleva a realizar sucesivas factorizaciones de 2, 3 y 4 factores. En el ítem d) se incorpora un término que no es cuadrado perfecto y en el e) aparece uno cuya base es un binomio.

Luego se plantea una variada ejercitación con un doble propósito**:** aplicar este caso de factoreo (diferencia de cuadrados), y favorecer el cálculo mental y la reversibilidad del pensamiento (Por ejemplo**:** Se pide calcular 12 x 8 de otra manera que no sea realizando el producto indicado). Otros ejercicios permiten vincular las nociones de área de distintas figuras, semejanza de triángulos y relación pitagórica con este caso de factoreo

El factoreo de la "Suma o diferencia de potencias de igual exponente" se plantea a partir de la divisibilidad de polinomios, tomando primero un caso particular y luego realizando la

generalización correspondiente; trabajando el caso de factoreo tanto en el marco algebraico como geométrico. Finalmente se propone que el alumno analice un diagrama de flujo donde se sintetizan todos los casos de factoreo vistos, dado que es un buen recurso para que el docente integre todo lo trabajado y permite al alumno organizar su razonamiento y encontrar el procedimiento adecuado al enfrentarse al factoreo de una expresión algebraica dada.
Para aplicar los distintos conceptos, se introduce el juego matemático. Los juegos que promueven el descubrimiento y la construcción suponen, tanto en su diseño como en su práctica, una forma de actividad muy próxima a la "creación matemática", semejante a la del científico, y como consecuencia brindan grandes posibilidades de "hacer matemática". Los juegos de estrategias inducen a un tipo de actividad parecido a la resolución de problemas, núcleo central de las matemáticas. En definitiva el juego es un gran potenciador de la motivación y la integración de estrategias mentales.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática*. G.E.I. México.

Douady, R. Dialéctica instrumento–objeto. Juego de encuadres. Cuaderno de Didáctica de la Matemática Nº3. Edición mecanografiada

Brousseau, G (1994) Los roles del maestro Cap. de PARRA, C, SAIZ, I, otros. *Didáctica de la Matemática.* Compilación. Paidos. Bs. As. 1994

Bixio, Cecilia (1998) *Enseñar y aprender. Homo Sapiens.* Bs. As

Socas, Martín y otros. (1996) Iniciación al álgebra. Síntesis. Madrid.