

## ESTRATEGIAS PARA INTRODUCIR LA TEORÍA DE GRAFOSEN LA ESCUELA MEDIA

Patricia Lestón y Daniela Cecilia Veiga  
Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”  
Buenos Aires, Argentina  
[patricialeston@uolsinectis.com.ar](mailto:patricialeston@uolsinectis.com.ar); [veigadaniela@yahoo.com.ar](mailto:veigadaniela@yahoo.com.ar)

### Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo presentar a los docentes de la escuela media una propuesta para llevar la teoría de grafos al aula. Dicha rama de la matemática proporciona una variedad de ejercicios y problemas que, por su simpleza, llaman la atención de muchos alumnos, quienes se ven atraídos a resolverlos; por lo que resulta más ameno el aprendizaje de los conocimientos básicos de la teoría de grafos. Es así como se propone trabajar en el *el concepto de ‘número’, lo que da origen a la aritmética, y sobre el concepto de ‘forma’, la que da origen a la geometría. Muchas veces, sin embargo, se combinan ambos conceptos dando lugar a propiedades de los números vinculados con las formas de figuras geométricas. Un ejemplo de ello es la Teoría de Grafos que se inauguró con Leonardo Euler (1707-1783) y que ha tenido muchas aplicaciones teóricas y prácticas referentes a figuras de la geometría*”.

Esta teoría proporciona una variedad de ejercicios y problemas que, por su simplicidad, llaman la atención de muchos alumnos, quienes se ven atraídos a resolverlos; por lo que resulta más ameno el aprendizaje de los conocimientos básicos de la teoría de grafos.

Es así, como las autoras de este trabajo, proponen llevar al aula algunos problemas que por su importancia histórica o por la facilidad en su resolución permitirán a la vez iniciar a los alumnos en un terreno poco habitual de la matemática. Al mismo tiempo, desarrollar y perfeccionar en los alumnos una manera de pensar matemáticamente bastante alejada de los procedimientos mecánicos que muchas veces invaden nuestras aulas.

*“En la situación de cambios en que nos encontramos, es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros alumnos. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en lo que Whitehead llamó “ideas inertes”, ideas que forman un pesado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas del presente.”* (de Guzmán, 1994)

### Marco Teórico

El trabajo se realiza sobre la base de las nuevas teorías de enseñanza-aprendizaje de la matemática; en estas se considera a la resolución de problemas como el eje central de esta disciplina.

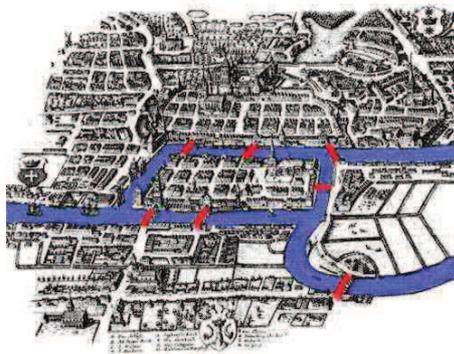
Como se dijo anteriormente, la teoría de grafos proporciona una herramienta que permite estimular en los alumnos el razonamiento matemático. Como sugiere Miguel de Guzmán: *“lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer*

*un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? ... Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra la vida propia de las matemáticas” (Corbalán, 1998).*

De la misma forma, se sabe que la sociedad actual exige personas cada vez más creativas, por lo cual, el docente, se ve obligado a dejar de lado los ejercicios rutinarios y las clases puramente expositivas con los que sólo se consigue el desinterés y se impide el desarrollo intelectual de los alumnos; para, finalmente, adoptar una nueva forma de trabajo que fomenta la creatividad, la discusión y la experimentación. En 1965, Polya expresó que si un profesor de matemática *“pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello”* (Santaló, 1986).

Es así como surgen los problemas como primeros protagonistas en la educación actual y lo que se propone en este trabajo, no es reemplazar esta nueva metodología, sino complementarla. Esto significa que los problemas que se resuelven con conceptos de la Teoría de Grafos no son más que eso, *problemas*; y como tales, permiten que el aprendizaje de los alumnos sea *significativo*. Sin embargo, muchos ejemplos se pueden acompañar por preguntas sencillas a partir de las cuales es posible definir conceptos básicos de esta rama de la matemática que, por otro lado tiene múltiples aplicaciones, por ejemplo, en las ciencias sociales y en medicina; entre otras disciplinas. Al mismo tiempo son útiles para estudiar las relaciones familiares en una sociedad trivial y la difusión de una enfermedad contagiosa, entre otros numerosos ejemplos de situaciones provenientes de diversas áreas.

En general, existen muchos problemas en la Teoría de Grafos que pueden ser resueltos aún sin tener conocimiento de esta rama de la matemática; de hecho, muchos de los problemas aparecen en revistas de entretenimiento al alcance de cualquier persona, y en general, se los resuelve aplicando conceptos básicos de esta disciplina. Es evidente que esto constituye una ventaja para su enseñanza. No obstante, el docente debe aprovechar este beneficio para enseñar conceptos nuevos y perfeccionar los procedimientos que los alumnos utilizan en su resolución; sobre esto Santaló (1986) señaló: *“Enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema... Naturalmente que se trata de problemas en el sentido amplio, no solamente de problemas reducibles a cálculos numéricos. Lo importante es que haya algo que buscar, o un enigma que aclarar dentro de un contexto bien planteado. Solamente hay que enseñar, como requisito previo, el lenguaje o la nomenclatura usual en matemáticas, para poder plantear los problemas correctamente y para entender la bibliografía corriente”*.



Anteriormente, se mencionó que gran parte de los alumnos, resuelven problemas de la Teoría de Grafos aún antes de conocerla y la ventaja que esto representa para su enseñanza. Sin embargo, es importante aclarar que el docente debe aprovechar esto para acercar a los alumnos, nuevas y mejores herramientas para la resolución de problemas; Schoenfeld explica esto advirtiéndolo que *“una de las diferencias entre los expertos matemáticos y los alumnos en la resolución de problemas estriba en que estos últimos carecen de metaconocimiento o control de sus propios recursos de solución. En ese sentido, el profesor debe ayudar mediante diversas técnicas a hacer explícitas las estrategias de las que dispone el alumno y su utilidad en la solución del problema”*. (Echeverría, 1997).

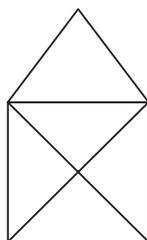
### Actividades propuestas

A continuación se proponen una serie de problemas, dentro de los que se encuentran algunos de los problemas más conocidos y otros que ayudan a complementar la enseñanza de la Teoría de Grafos. una serie de problemas, que por su importancia histórica o por la facilidad en su resolución permitirán a la vez iniciar a los alumnos en un terreno poco habitual de la matemática. Al mismo tiempo, desarrollar y perfeccionar en ellos una manera de pensar matemáticamente bastante alejada de los procedimientos mecánicos que muchas veces invaden nuestras aulas. De la misma forma, se sabe que la sociedad actual exige personas cada vez más creativas, por lo cual, el docente, se ve obligado a dejar de lado los ejercicios rutinarios y las clases puramente expositivas con los que sólo se consigue el desinterés y se impide el desarrollo intelectual de los alumnos; para, finalmente, adoptar una nueva forma de trabajo que fomenta la creatividad, la discusión y la experimentación. Muchos de los problemas aquí presentados se pueden acompañar por preguntas sencillas a partir de las cuales es posible definir conceptos básicos de esta rama de la matemática. En general, existen muchos problemas en la Teoría de Grafos que pueden ser resueltos aún sin tener conocimiento de esta rama de la matemática; de hecho, muchos de los problemas aparecen en revistas de entretenimientos al alcance de todos, y en general, se los resuelven aplicando conceptos básicos de esta disciplina. Es evidente que esto constituye una ventaja para su enseñanza. No obstante, el docente debe aprovechar este beneficio para enseñar conceptos nuevos y perfeccionar los procedimientos que los alumnos utilizan en su resolución

### Introducción

¿Quién no se ha encontrado alguna vez frente a un problema como el siguiente y ha pasado horas intentado resolverlo?

*Dibujar el siguiente esquema sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma línea.*



Es casi cotidiano la resolución de este tipo de problemas de ingenio en los que, sin darse cuenta, se aplican conceptos básicos de la teoría de grafos.

La elección de esta rama de la matemática para realizar un trabajo se debe a sus características tan particulares. Ya en 1995 Santaló afirmó: “*La matemática se edifica sobre*

### Problema 1: Los siete puentes de Königsberg

Sin duda, uno de los problemas más conocidos históricamente es el llamado: *Los siete puentes de Königsberg*; la resolución de este problema, se debe a Euler quién presentó su ingeniosa solución en la Academia rusa de San Petersburgo en 1735. Newman, comenta que *Euler trabajaba con tanta facilidad que se decía que escribía memorias durante la media hora entre la primera y la segunda llamada para la comida... El problema –cruzar los siete puentes en un paseo continuo, sin volver a cruzar ninguno de ellos- se consideraba como una pequeña diversión de los ciudadanos de Königsberg. Euler, sin embargo, descubrió un importante principio científico escondido en este acertijo.*

En pocas palabras, el problema es el siguiente:

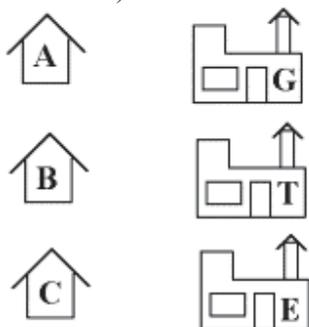
La ciudad de Königsberg está situada a orillas del río Pregel y sobre dos de sus islas, las diversas partes de la ciudad se conectan entre sí por medio de siete puentes. Un turista quiere dar un paseo por la ciudad, pero desea partir de un punto cualquiera, atravesar una sola vez por cada uno de los puentes, y regresar al punto de partida. ¿Es posible realizar este paseo?

El trabajo completo de Euler se puede encontrar en Newman, volumen 4 de *Sigma, el mundo de las matemáticas*, Grijalbo, 1997. No obstante, si se realiza un estudio del trabajo realizado por Euler, resulta admirable el análisis que realiza a lo largo de toda la resolución. Se observan con claridad todas las características propias de un problema: análisis de datos, clasificación, aplicación de algoritmos, etc.

### Problema 2: Las tres casas (Versión tomada de Piñeiro, 2000)

Otro problema muy conocido es el que se describe a continuación:

Tenemos tres casas (A, B y C) y tres centrales de servicios (de gas, de teléfonos y de electricidad).



El objetivo es conectar cada una de las casas con cada una de las centrales de modo tal que ninguna de las nueve líneas de conexión se cruce con otra.

La incertidumbre que crea este problema en los alumnos se debe a que no pueden “separarse del plano”. Es decir, tener una idea espacial del problema.

### Problema 3: El cartero chino

Otro problema histórico es el conocido como *El problema del cartero chino*. En este problema se desea minimizar el recorrido que debe hacer un cartero para cumplir con el reparto del correo. Una de las variantes posibles para trasladarlo al aula es plantear este problema para un cartero de la ciudad en la que se vive, tomando por ejemplo, la porción de mapa que corresponde a la escuela.

#### Problema 4:Coloreo de mapas

Un problema famoso es el conocido como problema de los cuatro colores. Se trata de probar que cualquier mapa plano coloreado con sólo cuatro colores teniendo en cuenta la región externa y que dos regiones fronterizas no pueden ser coloreadas con el mismo color. Otra opción posible para el trabajo en el aula, es pedirles a los alumnos un mapa de su país y que lo coloreen con la cantidad mínima de colores.

#### Otros problemas posibles:

1) En un país hay 7 lagos conectados por 10 canales de forma que se puede ir de cualquier lago a cualquier otro lago nadando, ¿cuántas islas hay?

2) Un barquero debe cruzar un río con un lobo, una cabra y un repollo. Su pequeño bote de remos no puede cargar más de una cosa en cada viaje; además no puede dejar al lobo solo con la cabra ni a la cabra con el repollo.

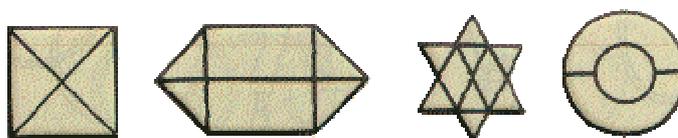
Represente la situación mediante un grafo, indicando en cada vértice del mismo lo que queda en la primera orilla y en la arista lo que viaja en la barca.

Indique una solución posible del problema a partir del grafo.

3) En una reunión familiar, la dueña de casa decide ubicar a los cinco invitados en una mesa redonda para cenar. Los invitados eran: Ana, la dueña de casa; Berta, actual esposa del ex marido de Filomena, Clara, íntima amiga de Filomena; Dorotea, suegra de Ana y hermana de Berta; Elsa, cuñada de Ana y finalmente, Filomena.

Esta tarea se presentaba como un dolor de cabeza dadas las enemistades entre ellas existentes. Por lo que se sabe, se ha podido determinar que Ana suele siempre discutir agriamente con Dorotea y con Elsa. Por su parte Berta no soporta la cercanía de Clara ni de Filomena; mientras que Dorotea está sumamente disgustada con Filomena. ¿Es posible sentar a las invitadas alrededor de la mesa redonda de modo tal que reine la paz? Por su parte, Elsa solamente aceptaría sentarse con sus amigas Berta y Filomena.

4) Intenta dibujar sin levantar el lápiz de la hoja ni pasar dos veces por la misma línea los siguientes grafos.



#### Conclusiones

La Teoría de Grafos presenta tanto a docentes como a alumnos un material que permite hacer que las clases de matemática pierdan la excesiva formalidad con la que se las trataba años atrás.

El interés que los alumnos pueden presentar hacia este tipo de actividades debe ser uno de los objetivos de los docentes. Generar en los adolescentes una atracción hacia un tema

puramente matemático es un logro con el que los docentes actuales pueden contar al hacer uso de este tipo de trabajo.

Cualquier aporte que pueda hacerse a las clases con temas que permitan el trabajo grupal, la discusión y el razonamiento debe considerarse como un avance en la enseñanza actual de la matemática. No debe olvidarse que uno de los principales objetivos de la enseñanza es desarrollar y perfeccionar el razonamiento lógico-matemático, la utilización del lenguaje propio de la matemática y, a la vez, crear en los alumnos una actitud crítica frente a los distintos desafíos que se propongan.

Es cierto que para muchos docentes puede ser más fácil trabajar con clases expositivas y que los alumnos sean simples espectadores. Sin embargo, es sabido que para que un aprendizaje sea significativo, el alumno tiene que generar sus propios conocimientos. A esto apunta la propuesta de utilizar problemas para enseñar la Teoría de Grafos y permitir el acercamiento entre la Matemática y la vida cotidiana.

### **Bibliografía**

- Corbalán, F. (1998). *Juegos Matemáticos para secundario y bachillerato*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Crespo Crespo, C. (2001). Cruzando puentes, pintado mapas, ... Una introducción a la teoría de grafos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Volumen 14, pp 89-92, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Crespo Crespo, C. (2002). Guía de ejercicios Matemática Discreta – Teoría de Grafos. Especialidad en Computación – ISP “Dr. Joaquín V. González”. Buenos Aires, Argentina.
- de Guzmán, M. (1994). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática, JAEM. En [http://www.minedu.gob.pe/dinesst/udcrees/material\\_docentes/amatematica/edumatematica\\_sxxi.doc](http://www.minedu.gob.pe/dinesst/udcrees/material_docentes/amatematica/edumatematica_sxxi.doc)
- Echeverría, M. (1997). *La solución de problemas en matemática*. En Pozo, J., Echeverría, M. y otros. La solución de problemas. En 54-83. Buenos Aires, Argentina: Editorial Santillana.
- Euler, L. (1736). Los siete puentes de Königsberg. En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Volumen 4, pp 164-171. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.
- Santaló, L. (1986). *La enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Docencia.
- Santaló, L. (1995). *Matemática 3. Iniciación a la creatividad*. Argentina: Editorial Kapelusz.
- Piñeiro, G. (2000, Marzo). Curiosidades Matemáticas: Los puentes sobre el río Pregel. *Axioma en línea*