LA TOPOLOGÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Carmen Sosa Garza, Roberto Torres Hernández
Universidad Autónoma de Querétaro, MÉXICO
carsg@uaq.mx, robert@uaq.mx

Resumen

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, en México, existe y funciona desde hace varios años la Maestría en Docencia de las Matemáticas. Este posgrado está dirigido primordialmente a maestros de Matemáticas en ejercicio, principalmente de los niveles medio y medio superior, cuya característica común es que no son matemáticos de profesión, es decir, no son egresados de una licenciatura en matemáticas. En este contexto, en dicha maestría se ofrece la materia de Topología como curso optativo de los últimos semestres. Como encargados de impartirla, hemos observado que los libros existentes de este tema están diseñados fundamentalmente para los estudiantes de las licenciaturas de matemáticas, con un rigor bien establecido, o bien son trabajos a nivel de divulgación que presentan solo ciertos aspectos geométricos del tema. De cualquier modo, estos dos extremos no nos parecen apropiados para los fines que se persiguen en esta maestría y en general en la formación de profesores.

Así pues, nos hemos dado a la tarea de diseñar apuntes y material de trabajo, tratando de tender un puente entre los textos de carácter matemático y los de divulgación. A grandes rasgos, la idea central consiste en iniciar cada tema de topología con ejemplos y conceptos conocidos, principalmente tomados del Cálculo infinitesimal e ir generalizando y abstrayendo definiciones y resultados para llegar finalmente a resultados y definiciones propios de la topología. El esquema completo es el siguiente:

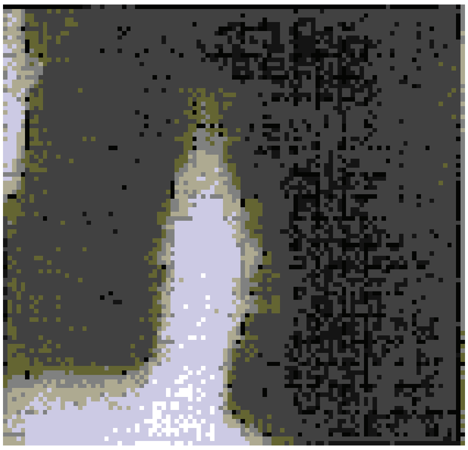
- El valor absoluto y la distancia usual en el plano como ejemplos de distancias o métricas. Ejemplos de diferentes distancias. El concepto de espacio métrico.
- La idea de conjunto abierto en el plano con varias métricas. La definición de espacio topológico.
- La definición de continuidad con epsilón-delta y su generalización a la definición topológica por abiertos.
- El concepto de homeomorfismo y su uso en las deformaciones topológicas. El Teorema de Clasificación de Superficies.
- Aplicaciones recientes de la topología a otras áreas del conocimiento, tales como la teoría de nudos y el ADN y en particular, la aplicación de la topología a la computación.

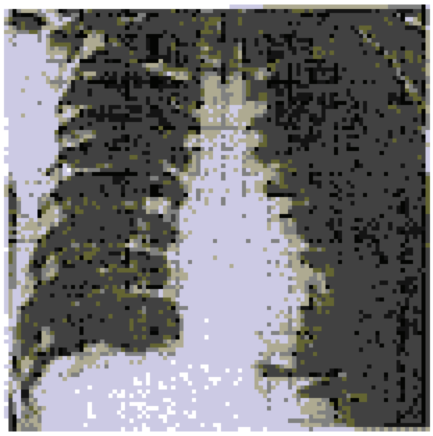
Es en este último punto donde incide este trabajo. La idea es presentar como en una “imagen digital” se encuentra ligada la topología, una de las geometrías del siglo XX, como ciertas propiedades cualitativas en la imagen están relacionadas a ciertas propiedades topológicas.

Antecedentes

La topología es una rama de las matemáticas que a últimas fechas a adquirido importancia por las diversas aplicaciones que se han encontrado. Según Victor Katz, el principio de la topología se encuentra en los trabajos de Karl Weierstrass en 1860 analizando el concepto de límite de una función. Con este objetivo, reconstruyó nuevamente el sistema de los números reales y reveló algunas propiedades que ahora se llaman "topológicas". Posteriormente Georg Cantor desarrolló la teoría de los conjuntos (1980) el cual es un fundamento donde la topología construye su "casa". Otro aspecto de la topología, es la llamada combinatoria o algebraica, que se inició en 1890 con el trabajo de Henri Poincaré. La palabra "topología” se deriva del griego τσπσ que significa "lugar" y αλσγια que significa "estudio”. Tradicionalmente la topología estudiaba las propiedades de las superficies de la geometría euclidiana.

Actualmente la topología estudia la "continuidad" siendo fundamental para entender el análisis. Pero lo más importante de la topología es que es una de las llaves para la matemática moderna.
Por otra parte, el procesamiento de una imagen digital se ha desarrollado rápidamente con muchas aplicaciones: en los negocios (lectura de documentos), la industria (la automatización), medicina (radiografías), geología (fotos a grandes distancias), entre otros.
El campo del tratamiento digital de imágenes está en continuo evolución. El interés por los métodos de tratamiento digital deriva de dos áreas principales de aplicación: la mejora de la información pictórica para la interpretación humana y el procesamiento de los datos de la escena para percepción autónoma por una máquina, este trabajo habla de la primera área.
Como muestra de las mejoras que se pueden lograr, considérense las dos siguientes imágenes:





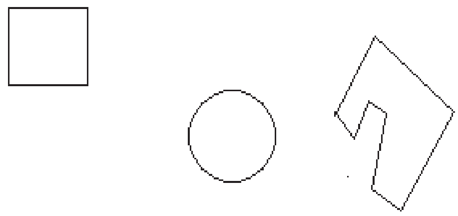
A partir de este momento, se relacionarán las ideas de imágenes digitales y de topología casi simultáneamente, a veces a doble columna, para resaltar la liga entre ellos.

¿Qué es una imagen digital?

Una imagen digital es una función bidimensional de intensidad de luz *f(x,y)* donde *x,y* representan las coordenadas espaciales y el valor de *f* en un punto *(x,y)* es proporcional al brillo (nivel de gris) de la imagen en ese punto al que se le llama *pixel*. Una imagen digital puede considerarse como un arreglo rectangular de puntos, donde cada punto se puede asociar con una pareja *(x,y)* , el número de renglón y el número de columna que se encuentra, y teniendo un nivel de gris. Por ejemplo, un tamaño típico, comparable a una imagen monocroma de televisión, es una matriz de 521x521 puntos con 128 niveles de grises. Etapas fundamentales del procesamiento de imágenes:
adquisición,
prepocesamiento,
segmentación,
descripción, reconocimiento.

¿Qué es topología?

La topología se considera la geometría del siglo XX y entre sus objetivos es clasificar superficies. También se le conoce como la geometría de hule, dos figuras son topológicamente equivalentes cuando una figura se puede deformar, sin desgarramientos o adherencias, y obtener la otra figura. Por ejemplo una circunferencia y un cuadrado son topológicamente equivalentes.



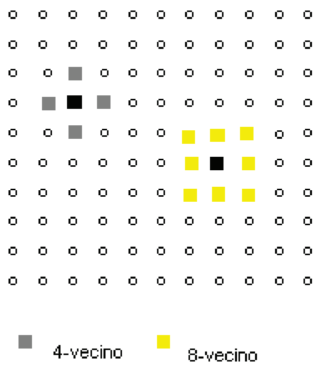
figuras equivalentes

Las propiedades que quedan invariantes bajo este tipo de transformación son las propiedades topológicas que no son más que las propiedades cualitativas de la figura y no como las que estudia la geometría euclidiana, las propiedades métricas.

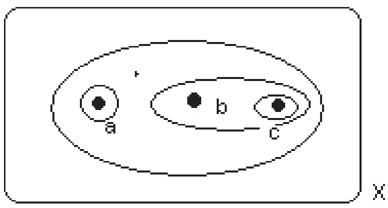
¿Cómo se pueden relacionar dos puntos?

Cada punto $P = (x,y)$ tiene **4-vecinos**, horizontal y vertical, $(x-1,y)$, $(x,y-1)$, $(x,y+1)$ y $(x+1,y)$. También tiene **4-vecinos diagonales**, $(x-1,y-1)$, $(x-1,y+1)$, $(x+1,y+1)$ y $(x+1,y+1)$ que junto con los 4-vecinos horizontales y verticales se llaman los **8-vecinos.**

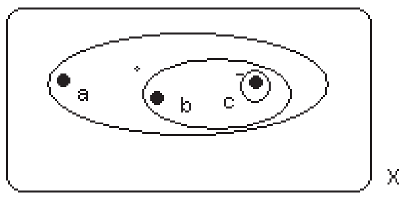
Nótese que si P se encuentra en el borde, algunos de sus vecinos pueden no existir.



En topología los puntos se relacionan dependiendo de las vecindades que se hayan definido, es decir dado un conjunto X, se define un conjunto de subconjuntos de X a los cuales llamaremos topología y tienen la propiedad de que la unión arbitraria y la intersección finita pertenece a él.



No es una topología



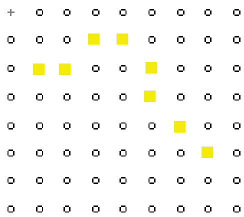
Si es una topología

La segmentación consiste en descomponer una imagen en subconjuntos o regiones donde Esta etapa del proceso determina el eventual éxito o fracaso del análisis. Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas generalmente se basan en una de las propiedades básicas de los valores del nivel de gris: discontinuidad y similaridad.

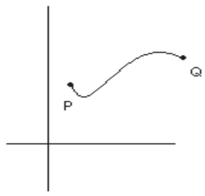
¿Cómo relacionar y encapsularlos los puntos para identificar las diferentes regiones?

Un 4-camino (8-camino) de P a Q, π de longitud n es una secuencia de puntos $P = P_0, P_1, \ldots, P_n = Q$ tal que P_i es 4-vecino (8-vecino) de P_{i+1}, $1 \le i \le n-1$. Por lo que se podría hablar de una función f,

f: [1,…,n] $\longrightarrow$ M tal que $f(j)=P_j$

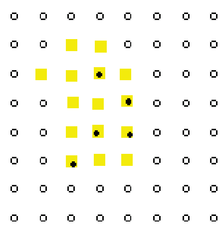


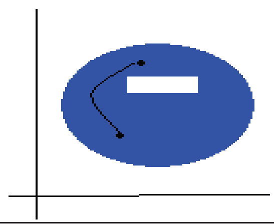
Una trayectoia topológicamente hablando es una función continua f,
f : (a,b)→X.



Cada segmentación debe ser completa; es decir cada píxel debe pertenecer a una región y que cada región debe ser **conexa.** Pero ¿cómo poder asegurar que dos puntos se encuentran en la misma región?

Topológicamente conexa significa que esta formada de una sola pieza, intuitivamente hablando, es decir A es conexa si no existen dos subconjuntos abiertos, B y C no vacíos, ajenos tales que la unión de estos, $B \cup C = A$.

Un subconjunto *S* se dirá que es 4- *conectado (8-conectado)* si para cualquier par de puntos en *S, P,Q,* existe una 4-camino (8-camino) de *P* a *Q* con puntos de *S*. Dado *P, la componente conexa de P con respecto a S,* son todos los puntos de *S* que se puedan conectar a *P* por medio de puntos de *S*.	

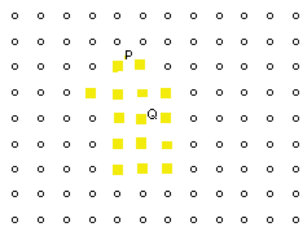
La componente arco-conexa de x en un espacio X, es el conjunto más grande que tiene la propiedad que para cualquier punto y en ella, x,y son arco-conexo. Que es equivalente a la unión de todos los subespacios conexos de X que contengan a x.	

¿Cómo se podría aislar cada componente? Se buscaría los puntos "frontera" y encontrar una un 4-camino (8-camino) π de longitud n donde $P_0 = P_n$. Es decir cada punto tiene exactamente dos 4-vecinos (8-vecinos) de π.
Nota: es necesario que contenga al menos 5 puntos.

Topológicamente se tiene la curva de Jordan, todo subespacio o figura homeomorfa a una circunferencia es una curva.
Teorema de Jordan: Si J es una curva en el plano, R^2, entonces separa al plano. Es decir $R^2 - \{J\}$ tiene dos componentes

Nota: Dando la topología adecuada a M, se puede definir una curva de Jordan y demostrar el teorema, toda curva tiene exactamente un agujero.

Uno de los objetivos de la segmentación es poder angostar, es decir eliminar puntos de un subconjunto de M sin afectar las propiedades de conexidad tanto de S como S^c.
Un punto P satisface que $S - P$ tiene el mismo número de componentes (en el sentido de *S)* y $S^c \cup P$ tiene el mismo número de componentes (en el sentido de S^c) como S^c, se le llama **punto simple**.
Dado *S,* un punto aislado de S o un punto interior de S no puede ser un punto punto simple mientras que un punto frontera de S siempre será un punto simple.



P es un punto simple   Q no es punto simple

La parte teórica puede continuar hasta temas cada vez mas complejos, pero no es ese el objetivo de este trabajo.
Resta solo por decir que el trabajar con este material con profesores que no son profesionales de la matemática, ha sido muy enriquecedor y motivante y esperamos que sea interesante para nuestra comunidad del RELME.

Bibliografía

Armstrong, M.A. (1987) *Topología Básica.* España, Ed Reverté S.A.
Chinn, W.G. y Steenrod, N.E. (1966) *First Concepts of Topology*. Nueva York, Random House Inc.
González, R., Woods, R. (1996) *Tratamiento digital de imágenes.* E.U.A., Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.
Rosenfeld, A. (1979) Digital topology. *American Mathematical Monthly*, 86. 621-630.
Wilson, R. (1990) Topología digital: una aplicación a las gráficas de computación. *Memorias del XXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*. Xalapa, Ver. 269-284.