LOS NÚMEROS REALES Y PROCESOS INFINITOS EN EL BACHILLERATO

José Arredondo, Benjamín Zúñiga y Roberto Torres
Universidad Autónoma de Querétaro, México.
carlosarremx@yahoo.com.mx, benja@sunserver.uaq.mx, robert@sunserver.uaq.mx

Resumen
El presente trabajo expone ciertos aspectos de los números racionales e irracionales que generalmente son poco trabajados en las clases sobre los números reales en el bachillerato. La célebre paradoja de Aquiles y la tortuga sirve de pretexto para analizar a los números racionales y su periodicidad vía la noción de serie. Por lo que respecta a los números irracionales, la comparación del lado de un cuadrado y su diagonal nos sirven para introducir el concepto de inconmensurabilidad. Se presenta también un pequeño software, a manera de demo para apoyo de los temas tratados.

Introducción: La manera usual de impartir el tema de los números reales en el bachillerato, consiste generalmente en la presentación de los diversos subconjuntos importantes tales como los números naturales, enteros, racionales e irracionales, para después ilustrar algunas de sus características mas importantes. La idea del presente trabajo es la profundizar un poco mas, particularmente con lo que respecta a los números racionales e irracionales.

Dos de las principales cualidades del presente texto pretenden ser:

- Introducir al lector, con lo que respecta a los números racionales, a los procesos infinitos, vía la expresión decimal y la noción de serie. Esta aproximación es valiosa como recurso para iniciar las ideas del Cálculo Infinitesimal, sobre todo a nivel preuniversitario. Con los irracionales, la idea de inconmensurabilidad de segmentos también involucra procesos y argumentos con la idea del infinito.
- Eslabonar diversos aspectos geométricos y algebraicos, condensándolos sobre un problema común, unificando con este material que se encuentra diseminado a lo largo de los semestres previos al inicio del Cálculo.

Los números racionales: Un número es *racional* si puede expresarse como el cociente de dos números enteros, con el denominador distinto de cero. Generalmente, se conoce también la definición equivalente sobre periodicidad, esto es, un número es *racional* si su expresión decimal es periódica. Que el Profesor promedio de secundaria y bachillerato conozca la demostración de esta equivalencia es ya mas dudoso.
De hecho, la demostración de que un número racional tiene expresión decimal periódica, involucra el algoritmo de la división y es muy interesante desde el punto de vista didáctico, pues ilustra el uso de una propiedad de los números enteros en la construcción y conocimiento del conjunto numérico que "le sigue" en complejidad, que son los números racionales.
Sin embargo, aquí nos referiremos principalmente a la otra implicación, esto es, que un número cuya expresión decimal es periódica debe ser necesariamente el cociente de dos enteros, es decir, un número racional.
La prueba de esto es la siguiente:

Supongamos que el decimal periódico es de la forma

$$q = D.d_1d_2d_3\ldots d_m\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n}$$

Se puede observar que el periodo de este número es

$$\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n}$$

Si multiplicamos q por 10^m entonces el punto decimal se recorre m dígitos hacia la derecha, esto nos permitirá localizarlo al inicio del periodo

$$q \cdot 10^m \quad = \quad Dd_1d_2d_3\ldots d_m \quad .\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n}$$

Parte entera Parte no entera

Si multiplicamos ahora el número q por 10^n, el punto se recorrerá n dígitos hacia la derecha, quedando al final del periodo

$$q \cdot 10^n \quad = \quad Dd_1d_2d_3\ldots d_md_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n \quad .\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n}$$

Parte entera Parte no entera

Obtengamos la diferencia de ambos números

$$\begin{array}{rcrr}
q \cdot 10^n & = & Dd_1d_2d_3\ldots d_md_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n & .\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n} \\
q \cdot 10^m & = & Dd_1d_2d_3\ldots d_m & .\overline{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n} \\
\hline
q(10^n - 10^m) & = & E & .000000000
\end{array}$$

En la resta se puede observar que la parte no entera por ser la misma en ambos números da como resultado cero, si llamamos E a la diferencia de las partes enteras de los decimales

$$E = Dd_1d_2d_3\ldots d_md_{m+1}d_{m+2}\ldots d_n - Dd_1d_2d_3\ldots d_m$$

Entonces se tendría que el valor de q es

$$q = \frac{E}{(10^n - 10^m)}$$

Como

$$E, (10^n - 10^m) \in Z \text{ y } (10^n - 10^m) \neq 0$$

Entonces

$$q \in Q$$

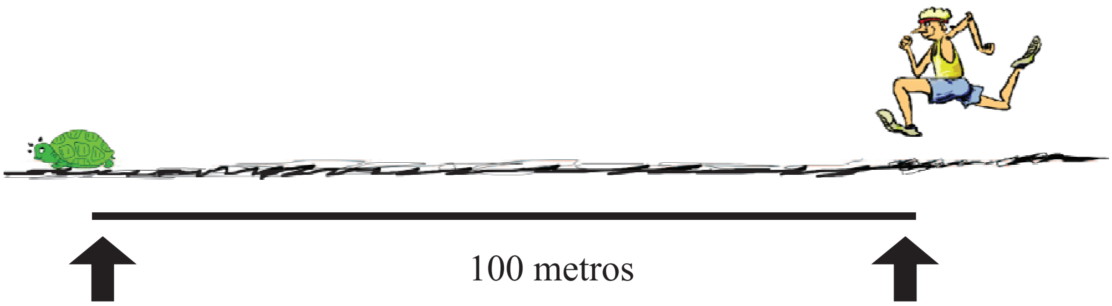
Que era lo que se quería probar.

La Paradoja de Aquiles y la tortuga: Conectemos esta idea con la siguiente historia.

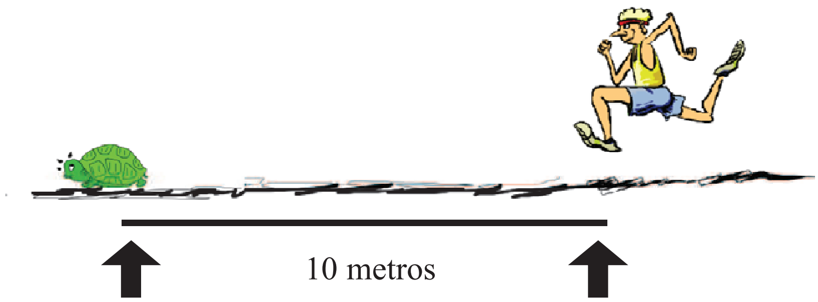
Aquiles, famoso guerrero griego, es considerado el más veloz de los mortales. Una intrépida tortuga reta a Aquiles a una carrera, aún sabiendo que Aquiles es 10 veces más rápido que ella. Por tal circunstancia Aquiles concede a la tortuga una ventaja de 1 km. (1000 mts.), con esta ventaja podríamos preguntar *¿Cuándo Aquiles alcanzará a la tortuga?*

Para dar respuesta a esta pregunta pensemos en lo siguiente:

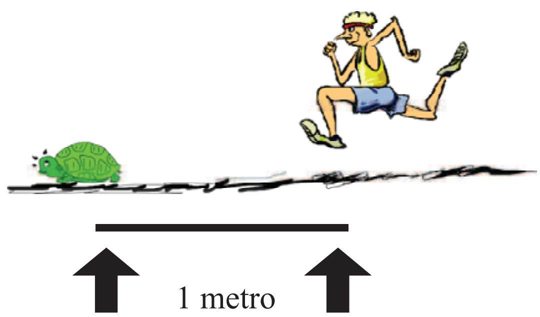
Si Aquiles recorre el kilómetro de ventaja, la tortuga habrá recorrido 100 metros más, en ese momento los 100 metros serán su nueva ventaja.



Mientras Aquiles recorre los 100 metros que los separan, la tortuga tomará una nueva ventaja de 10 metros.



Es claro entonces, que si Aquiles recorre los 10 metros de nueva ventaja, la tortuga tomará otra ventaja de 1 metro.



Puede entenderse con base en el anterior razonamiento, que si la tortuga tiene cualquier ventaja, entonces el tiempo que tarda Aquiles en recorrer esta ventaja permitirá a la tortuga tomar una décima parte de la ventaja anterior como su nueva ventaja.

Aquí podríamos afirmar "Aquiles nunca alcanzará a la tortuga"
Ya que en la realidad intuitivamente se percibe que Aquiles debe, no sólo alcanzar a la tortuga, sino ganarle y por mucho aplicaremos nuestros conocimientos sobre los números racionales y expresiones decimales para aclarar el problema.
La confusión en el razonamiento radica justamente en la solución de una suma infinita de potencias de base 10.
Para poder explicar esto comparemos las distancias que recorren ambos en los diferentes tiempos señalados:

En el mismo tiempo:

La tortuga recorre (en Km.):	**Aquiles recorre (en Km.):**
$\frac{1}{10}$	1
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$	$1+\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$

Entonces Aquiles alcanzará a la tortuga después de recorrer:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots \text{ Kilómetros}$$

Pero esta suma infinita, en notación decimal es:

$$1.111\ldots = 1.\bar{1}$$

cambiando este decimal periódico a cociente se tiene que

$$1.\bar{1}=\frac{10}{9}=1+\frac{1}{9}$$

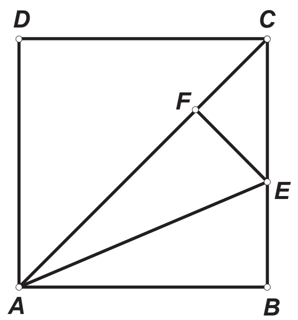
De lo anterior concluimos que Aquiles debe recorrer $1+\frac{1}{9}$ de kilómetros para alcanzar a la tortuga (que en su caso habrá recorrido hasta el momento $\frac{1}{9}$ de kilómetro).
Finalmente podemos concluir que: “Aquiles sí alcanza a la tortuga”

Los irracionales y segmentos inconmensurables: Ahora, relacionaremos el aspecto algebraico de los números irracionales (que se definen como aquellos números que no son racionales) con la idea geométrica de la inconmensurabilidad. Para ello, necesitamos la siguiente

Definición: Dos segmentos de recta son conmensurables si existe una unidad (tercer segmento) que quepa un número entero ***n*** de veces en el primer segmento y un número entero ***m*** de veces en el segundo.

Dados los dos segmento en la parte izquierda de la figura anterior, podemos ver que el segmento mas pequeño en la parte derecha cabe tres veces en el primero y cinco veces en el segundo. De esta forma decimos que dichos segmentos son conmensurables.
Notemos en este momento que para afirmar que dos segmentos no son conmensurables (y que a partir de aquí les llamaremos inconmensurables) debemos estar seguros que ninguna unidad mide un número entero de veces a dichos segmentos.
Un ejemplo de la situación anterior se da al considerar el lado de un cuadrado y la diagonal:

El argumento para observar que es imposible la existencia de un segmento unidad que pueda caber un número entero de veces en el lado y la diagonal involucra un proceso que se repite indefinidamente.
Supongamos que existe una unidad que cabe un número entero de veces en el lado del cuadrado y otro número entero de veces en la diagonal. A partir de aquí, diremos simplemente que la unidad ***mide*** al lado y ***mide*** a la diagonal. De ser así, consideremos el siguiente esquema:



Dado el lado AB y la diagonal AC, constrúyase el punto F sobre AC tal que $AF = AB$. Sea E el punto en CB tal que EF es perpendicular a AC. Observemos ahora que los triángulos

EFA y *EBA* son congruentes, por ser ambos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa (*AE*) y un cateto igual ($AF = AB$). Esto nos dice que $EF = EB$.
Claramente, $\angle ECF = 45^o$ por ser *AC* la diagonal de un cuadrado y como el ángulo en *F* es recto y la suma de los ángulos interiores del triángulo *CFE* debe de ser 180^o, se tiene que $\angle FEC = 45^o$. Todo esto dice que el triángulo *CFE* es isósceles y por lo tanto $CF = EF$.
En conclusión, $CF = EB$.
Ahora, como la unidad (que está fija) mide a *AC* y a $AF = AB$, debe de suceder que mide también a la resta de estos segmentos, es decir, mide a $AC - AF = CF$.
Análogamente, como la unidad mide a *BC* (lado del cuadrado) y a $CF = EB$, mide también a la resta $BC - EB = EC$.
Resumiendo, tenemos que la unidad mide a *CF* y a *EC*.

Pero si observamos nuestra situación, tenemos que *EC* es la diagonal del cuadrado con lados *EF* y *CF*, que es un cuadrado más pequeño que el original y al que también mide la unidad con la que empezamos.
Repitiendo todo el argumento anterior sobre este nuevo cuadrado llegaremos a un tercer cuadrado (mucho más chico) y al que nuestra unidad deberá medir su lado y su diagonal.

Finalmente notemos que si se repite este argumento indefinidamente, encontramos segmentos (lados y diagonales de cuadrado) cada vez mas chicos y a los que nuestra unidad deberá medir, lo cual no es posible por que eventualmente dichos segmentos serán mas pequeños que la misma unidad.
De esta manera, nuestra suposición inicial acerca de la existencia de una unidad con las características descritas no puede sostenerse, demostrándose así la inconmensurabilidad de el lado de un cuadrado y su diagonal.

Pero, ¿qué tiene que ver esto con los irracionales?
Para responder a esta pregunta, primero notemos que por el Teorema de Pitágoras, si llamamos a a la longitud del lado l del cuadrado, la longitud de la diagonal d será $\sqrt{2}a$. El hecho de que estos dos segmentos sean inconmensurables nos dice que no existe una unidad u ni enteros n y m tales que

$$l = nu$$
$$d = mu$$

Esto en longitudes, se escribe

$$a = n$$
$$\sqrt{2}a = m$$

Al dividir la segunda ecuación entre la primera se tiene

$$\frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

lo que afirma que $\sqrt{2}$ es irracional.

Bibliografía

Anaya, S. (1990). *Carrusel Matemático.* México, D.F. Limusa-Noriega Editores.
Fregoso, A. (1980) *Los elementos del lenguaje de las matemáticas.* Vol. III y IV. México, D. F. Trillas.
Rodemacher y Toeplitz. (1970). *Números y figuras.* Madrid, España. Alianza Universidad.