LA VISUALIZACIÓN EN EL TRATAMIENTO DE EXPRESIONES NUMÉRICAS CON EXPONENTES Y RADICALES MEDIANTE EL ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Alicia Ávalos, Vicente Carrión
U. Latina de América – Morelia; DME del CINVESTAV - México
aliavacau@hotmail. com , vcarrion@mail.cinvestav.mx

Resumen
A partir de un estudio en proceso con profesores del nivel medio sobre errores en el uso de expresiones numéricas que contienen exponentes y radicales se propone una forma de enseñanza basada en recursos de visualización usados en la graficación de funciones. Además de reconocer la visualización como la habilidad de los sujetos para formar y manipular imágenes mentales se acepta como la habilidad para trazar diagramas apropiados para representar un concepto matemático o un problema. Son reconocidos el valor y la importancia de las imágenes visuales, en los diagramas y de otras herramientas visuales en los procesos heurísticos, para el descubrimiento, en la enseñanza de la matemática. Se propone una forma integral de abordar el aprendizaje de exponentes y radicales que consideran recursos visuales, numéricos y algebraicos para obtener sus propiedades. La graficación de funciones que comprenden formas de expresiones con exponentes y radicales, realizada por puntos, por intervalos y en forma global, favorece el análisis de la forma en que cambian las variables e ilustra el dominio de definición de las expresiones algebraicas. Del análisis de las representaciones gráficas se obtienen las propiedades de expresiones numéricas que incluyen exponentes y radicales definidas tanto en los números reales como en los complejos. Utilizando el álgebra de estas curvas se obtienen otras propiedades numéricas. Se hace uso de la calculadora graficadora y la computadora para obtener las gráficas de las funciones y para verificar las propiedades numéricas que se establecen.

Marco teórico.

La importancia del enfoque sugerido es que relaciona varios aspectos de la matemática, aparentemente ajenos. Se interrelacionan las formas numérica, gráfica y algebraica de presentar los conceptos matemáticos. La lectura de representaciones gráficas presupone distinguir las variables visuales correspondientes en la escritura algebraica mediante una interpretación global. De acuerdo con las consideraciones visuales Duval (1993) propone tres maneras de construir una representación gráfica, una cuantitativa de punteo, una cualitativa-cuantitativa de extensión de trazo y una de interpretación global de las propiedades de las figuras. La primera se caracteriza por utilizar como único recurso puntos obtenidos con fórmulas algebraicas. Los valores de las variables independiente y dependiente se disponen en una tabla. Esta forma de graficar se limita a unir con segmentos de curva puntos marcados en el plano coordenado. La extensión del trazo efectuado corresponde a actividades de interpolación y extrapolación. No sólo se apoya en un conjunto finito de puntos, se basa en el trazo de segmentos de curvas asociados a conjuntos infinitos de puntos potenciales, contenidos en un intervalo que se define entre dos puntos predeterminados de la curva. La interpretación global de las propiedades de una representación gráfica requiere de una imagen para un "objeto" descrito por una expresión algebraica. Una modificación de la imagen que conduce a un cambio en la escritura de la expresión algebraica determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica. Esta vía de graficación requiere de la asociación de una variable visual de la representación con una la unidad significativa de la escritura algebraica.

El término visualización no es muy familiar en matemáticas. Desde esta perspectiva no es usual restringir la visualización a la habilidad de los sujetos para formar y manipular imágenes mentales como es el uso común en psicología; se toma como la habilidad para trazar un diagrama con lápiz y papel con calculadora o computadora. El diagrama sirve para representar un concepto matemático, ayuda a comprenderlo; o para representar un problema, ayuda a resolverlo. La visualización es un medio para conseguir comprensión en el aprendizaje de los conceptos matemáticos (Zimmermann & Cunningham;1991). No se habla de visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o un problema. La visualización de un diagrama significa formar una imagen mental del diagrama; la visualización de un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen visual. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología, para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas, utilizándola con efectividad. Los psicólogos se han interesado en la relación entre la visualización y los procesos mentales del razonamiento humano. Los matemáticos reconocen el valor de los diagramas y de otras herramientas visuales, en la enseñanza de la matemática y en los procesos heurísticos, para el descubrimiento de la matemática. Sin embargo, conscientes de la importancia obvia de las imágenes visuales en las actividades cognitivas humanas las representaciones visuales permanecen en segundo término, tanto en la matemática como en su enseñanza (Barwise & Etchemendy; 1991). Múltiples causas de las dificultades en el aprendizaje de la matemática se deben a problemas con las conexiones entre los aspectos visuales y analíticos de los conceptos y de los procedimientos matemáticos. Razonar a partir de lo visual demanda hechos cognitivos de mayor nivel que hacerlo algorítmicamente y resulta más natural para los estudiantes actuar lejos del pensamiento visual. Eisenberg & Dreyfus (1991) afirman que la preferencia de los estudiantes para hacer argumentos no visuales no es accidental. El argumento analítico es corto, claro, con pocas suposiciones y da el resultado sin implicaciones extensas; para el estudiante es fácil de aprehender y aplicar a ejercicios procediendo mecánicamente en los cálculos; para el profesor, es fácil de enseñar, no requiere la preparación de una gráfica o elaborar un programa, o correrlo. El argumento visual requiere prerrequisitos relacionados con cierto manejo de conocimiento visual, muestra información adicional relacionada, es difícil de entender y provoca discusión. Los autores citados distinguen tres tipos de razones que tienen los estudiantes para evitar la visualización, una cognitiva: lo visual es más difícil de comprender; una sociológica: lo visual es más difícil de enseñar; y una relacionada con la naturaleza de la matemática: se dice que lo visual no pertenece a la matemática.

Metodología . Se presentó a profesores de bachillerato un examen que incluyó las siguientes expresiones aritméticas con radicales.

1. $\sqrt{(-3)^2} =$	*6*. Resolver la ecuación $x^2 = 4$
2. $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} =$	*7*. $-\sqrt{3} \cdot \sqrt{-3} =$
3. Resolver la ecuación $x^2 = (-3)^2$	*8*. $-\sqrt{(-2)^2} =$
4. $\sqrt{-6^2} =$	*9*. Resolver la ecuación $x^2 = -(5)^2$
5. $-\sqrt{7^2} =$	*10*. $-\sqrt{-2^2} =$

Se aplicó a 52 profesores del nivel medio superior. Se analizaron los resultados. Del análisis se vio la necesidad de implementar actividades de enseñanza tendientes a la comprensión de las propiedades de los radicales, dirigidas a profesores. Se presentan las respuestas diferentes que dieron los profesores para la expresión 2.

$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-2)}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$	14	26.9%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-2)}=\sqrt{(-2)^2}=-2$	11	21.2%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(\sqrt{-2}\right)^2=-2$	5	9.6%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}=\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}=(4)^{\frac{1}{2}}=2$	1	1.9%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}=(-2)^1=-2$	7	13.5%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}=\left((-2)^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{-2}\right)^2$ $=\left(i\sqrt{2}\right)^2=2i^2=-2$	1	1.9%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}=(-2)^1=-2$	1	1.9%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(\sqrt{-2}\right)\left(\sqrt{-2}\right)=\left(i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)=2i^2=-2$	3	5.8%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(\sqrt{-2}\right)^2=\left(i\sqrt{2}\right)^2=2i^2=-2$	4	7.7%
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)=\left(i\sqrt{2}\right)^2=2i^2=-2$	5	9.6%

Algunos errores que están presentes en la resolución del problema 2 son los siguientes. Se relacionan con definiciones mal establecidas o con el uso de propiedades que son válidas en el sistema de números reales y no lo son en el sistema de los números complejos.

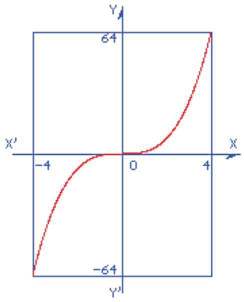
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)(-2)}$	$\sqrt{(-2)^2}=-2$	$(-2)^{\frac{2}{2}}=-2$
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{(-2)^2}$	$(-2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2)^{\frac{1}{2}}=(-2)^{\frac{2}{2}}$	$(-2)^{\frac{2}{2}}=\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}=(4)^{\frac{1}{2}}=2$
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=\left(\sqrt{-2}\right)^2$	$(-2)^{\frac{2}{2}}=\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{-2}=(-2)^{\frac{1}{2}}$

Se propone una forma integral de abordar el aprendizaje del tema de exponentes y radicales poniendo en juego recursos visuales, numéricos y algebraicos. La graficación de funciones que comprenden expresiones con exponentes y radicales, realizada por puntos, por intervalos y en forma global, favorece el análisis de la manera en que cambian las variables e ilustra el dominio de definición de expresiones algebraicas. En esta parte se examinan las gráficas de curvas de la forma $\boldsymbol{y}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{m}}$, donde m y n son números enteros positivos y primos relativos. Otras fórmulas para expresar estas curvas son las siguientes: $\boldsymbol{y}=\sqrt[\mathrm{n}]{\boldsymbol{x}^{\mathrm{m}}}$ o $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}}$; sin embargo, debe precisarse el dominio donde las tres expresiones algebraicas representan una misma curva. Del análisis de las representaciones gráficas se obtienen las propiedades numéricas de las expresiones en estudio. En lo que sigue $\boldsymbol{x}$ representa un número real y ***m*** y ***n*** son números naturales.

1. Se exhiben ejemplos de casos en que m y n son impares positivos $m \geq n$.

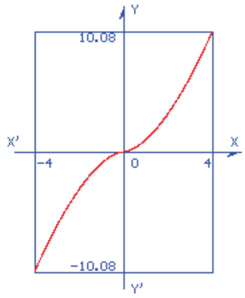
$0 < m < n, \quad n = 1$

$y = x^3$



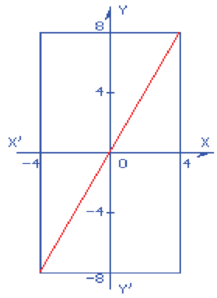
$0 < n < m, \quad n \neq 1$

$y^3 = x^5$ o $y = \sqrt[3]{x^5}$



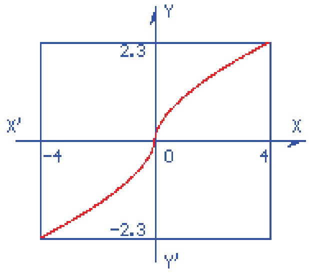
$0 < m = n$

$y = x$



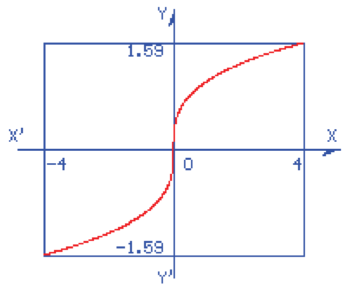
$0 < m < n, \quad m \neq 1$

$y^5 = x^3$ o $y = \sqrt[5]{x^3}$



$0 < m < n, \quad m = 1$

$y^3 = x$ o $y = \sqrt[3]{x}$

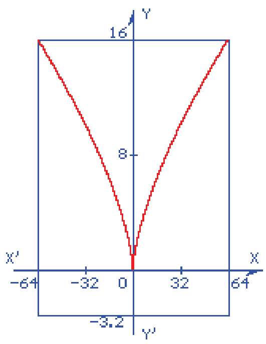


La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ es un número real si m y n son enteros impares. Es positivo si x es positivo, cero si x es cero y negativo si x es negativo.

2. Se muestran ejemplos de casos en que m es entero par y n es entero impar, ambos positivos $m < n$.

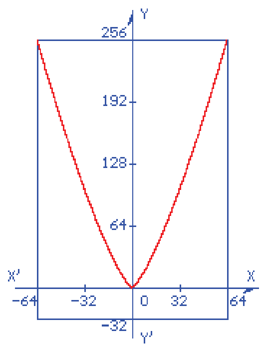
$1 < m < n$

$y^3 = x^2$ o $y = \sqrt[3]{x^2}$



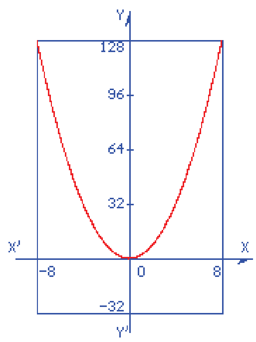
$1 < n < m$

$y^3 = x^4$ o $y = \sqrt[3]{x^4}$



$m \geq 2, \quad n = 1$

$y = x^2$

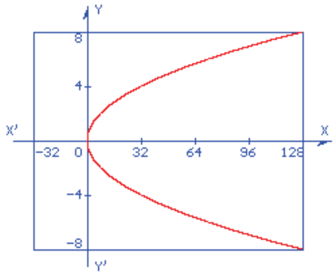


La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ es un número real positivo si m es entero par y n es entero impar, ambos positivos; es cero si x es cero.

3. Se ilustra con ejemplos el caso en que m impar positivo, n par positivo y m > n.

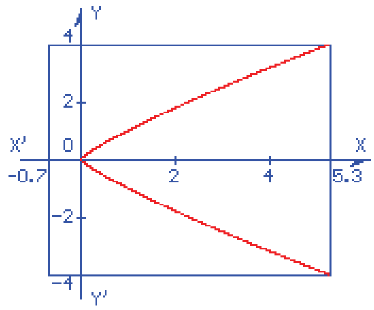
$m = 1, \quad n \geq 2$

$y^2 = x \quad \text{o} \quad y = \pm\sqrt{x}$



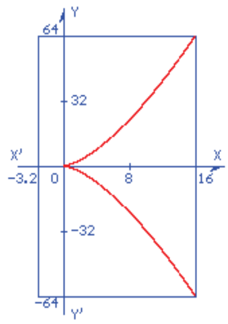
$1 < m < n$

$y^6 = x^5 \quad \text{o} \quad y = \pm\sqrt[6]{x^5}$



$1 < m < n$

$y^2 = x^3 \quad \text{o} \quad y = \pm\sqrt{x^3}$



La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ es un número real positivo si m es entero impar y n es entero par, ambos positivos; es cero si x es cero. Además, $-\sqrt[n]{x^m}$ es número real negativo si m es entero impar y n es entero par, ambos positivos; es cero si x es cero.

Obsérvese que si x es menor que cero, para los mismos valores de m y n la expresión $\sqrt[n]{x^m}$ no está definida en los números reales. Este hecho es punto de partida interesante y buena motivación para introducir el sistema de números complejos y las propiedades de expresiones con exponentes y radicales en este sistema de números.

Se describen los casos posibles para expresiones numéricas con exponentes y radicales.

Características del índice **n** del radical y del exponente **m** (**m** y **n** son primos relativos)			**Expresión radical o potencial**	**Dominio e imagen de las expresiones radicales o potenciales**
m y n números impares positivos	m > n	n = 1	$Y = x^m$	• Si x es número real positivo y es real positivo. • Si x es número real positivo y es real positivo. • Si x es cero y es cero.
		n > 1	$y = \sqrt[n]{x^m}$	
	m = n	m = 1 y n = 1	$Y = x$	
	m < n	m = 1	$y = \sqrt[n]{x}$	
		m > 1	$y = \sqrt[n]{x^m}$	
m número par positivo y n impar positivo	m > n	n = 1	$y = x^m$	• Si x es número real positivo y es real positivo. • Si x es número real negativo y es real positivo. • Si x es cero y es cero.
		n > 1	$y = \sqrt[n]{x^m}$	
	m < n	n ≥ 1	$y = \sqrt[n]{x^m}$	
m número impar positivo y n par positivo	m > n	m = 1	$y = \pm\sqrt[n]{x}$	• Si x es número real positivo $\sqrt[n]{x^m}$ es real positivo y $-\sqrt[n]{x^m}$ es real negativo. • Si x es número real negativo y no es número real. • Si x es cero y es cero.
		m > 1	$y = \pm\sqrt[n]{x^m}$	
	m < n	m ≥ 1	$y = \pm\sqrt[n]{x^m}$	

Algunas propiedades sobre expresiones numéricas que contienen exponentes y radicales que pueden derivarse del análisis de las gráficas de las funciones anteriores son las siguientes:

1. Si a es un número real positivo la ecuación $x^2 = a$ tiene dos soluciones reales, las raíces cuadradas de a: $x_1 = -\sqrt{a}$ y $x_2 = \sqrt{a}$. Si $a = 0$ entonces $x = 0$.
2. Si n es número entero positivo par la ecuación $x^n = a$, $a > 0$, tiene dos soluciones reales, $x_1 = -\sqrt[n]{a}$ y $x_2 = \sqrt[n]{a}$; tiene otras raíces que no son reales. Si $a = 0$ entonces $x = 0$.
3. Si $x \in \Re$ entonces $\sqrt{x^2} = |x|$ y $-\sqrt{x^2} = -|x|$.
4. Propiedades que se derivan del álgebra de funciones. $x \in \Re$, y $x \geq 0$, m y n enteros positivos.

a. $x^m x^n = x^{m+n}$	*b.* $(x^m)^n = x^{mn}$	*c.* $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $x \neq 0$
d. $(xy)^n = x^n y^n$	*e.* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^m}{y^n}$, $y \neq 0$	m > n exponente entero positivo. m = n exponente cero. m < n exponente entero negativo.

5. Otras propiedades derivadas del álgebra de funciones; $x \geq 0$, m y n enteros positivos.

f. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$	*g.* $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$	*h.* $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x}$
i. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	*j.* $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$, $y \neq 0$	*k.* $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[m\cdot n]{x^n y^m}$
l. $\dfrac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[m\cdot n]{\dfrac{x^n}{y^m}}$, $y \neq 0$	*m.* $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[m\cdot n]{x^{m+n}}$	*n.* $\dfrac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x^{m-n}}$, $x \neq 0$

6. De las propiedades 1-5, ¿cuáles se cumplen, y cuáles no lo hacen, para los números complejos?
7. ¿Para qué valores de m, n y x se cumple la igualdad $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$? ¿Para qué valores de m, n y x no se cumple la misma igualdad?
8. Hacer una lista de propiedades de los exponentes y radicales válidas para números complejos.

Conclusiones

Con un ejemplo se han ilustrado los errores en los que incurren los profesores del nivel medio en la transformación de expresiones numéricas que contienen exponentes y radicales. Se propone una forma de abordar la enseñanza del tema con el uso de recursos visuales para graficar cierta clase de funciones y en operaciones algebraicas definidas entre ellas. Se hace uso de la calculadora graficadora y la computadora para obtener las gráficas de las funciones y para verificar las propiedades numéricas establecidas, relacionadas con los exponentes enteros y racionales, positivos cero o negativos, y determinar los dominios donde tales expresiones representan números reales o complejos relacionando las formas numérica, gráfica y algebraica de presentar los conceptos matemáticos. Con ello se propicia que el estudiante construya e incremente su propio discurso matemático.

Bibliografía

Barwise, J & Etchemendy J. (1991).Visual Information and Valid Reasoning. En *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Editores: W. Zimmermann y S. Cunnungham.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotica et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique el de Sciences Cognitives,* 5 (1993), pp. 37-65. IREM de Strasbourg. Traducción: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Eisenberg, T. & Dreyfus T. (1991). *On the Reluctance to Visualize in Mathematics. En Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Editores: W. Zimmermann y S. Cunnungham.

Zimmermann, W. & Cunningham S. (1991). Editors'Introduction: What is Mathematical Visualization? En *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Editores: W. Zimmermann y S. Cunningham.