

HORMIGAS Y ALGORITMOS

Emilia Barreda y Jorge Yones
 Colegio de Humanidades, Villarrica, Chile
embace13@netexplora.com

Resumen

El propósito principal de esta comunicación, en el contexto de un módulo mayor, es presentar un ejemplo ilustrativo del modelo de las hormigas para introducir en los el trabajo con modelos a los estudiantes y favorecer además su motivación para el trabajo en aula. Idealmente, el profesor dará una charla en una sesión breve, antes de pasar a trabajar los demás materiales contenidos en el módulo. Sin embargo, también es posible utilizar la charla como forma de difusión independiente, hacia otras audiencias (como apoderados u otros alumnos). El módulo cuenta con textos de apoyo sobre las materias que se abordan, así como la Guía del Profesor de las actividades de aula, además de un cuaderno del alumno para desarrollar su trabajo. El ejemplo que se presenta: hormigas y matemáticas. ¿Qué tienen que ver? En principio el nombre sorprende, incluso a los matemáticos. No se trata de usar las hormigas reales para resolver problemas matemáticos, ni de usar las matemáticas para resolverle sus problemas a las hormigas. De lo que se trata es de estudiar cómo las hormigas resuelven los problemas, e imitarlas para resolver los nuestros (con *hormigas virtuales*). En este artículo, se habla de hormigas. Luego, de algunas "gracias" que hacen las hormigas. Después se toma un par de problemas interesantes y se presenta la forma en que las hormigas los resuelven. Finalmente se muestra la forma en que estos modelos del comportamiento de las hormigas ayudan a resolver nuestros problemas.

Introducción

En general, un MODELO es una representación simplificada de algo que existe en la realidad, y lo usamos para entender mejor esa realidad, o para relacionarnos mejor con ella. En este caso, lo que estamos haciendo es un MODELO del comportamiento "ordenador" de las hormigas, tratando de abstraer todo lo que no es relevante para ese fin. Pero además, entendiendo estos modelos, podemos copiarles la idea a las hormigas y tratar de usarla para resolver problemas que se nos presentan a nosotros.

Cuando en ciencias uno dice "este fenómeno se explica por tal cosa", la forma de mostrar que efectivamente esa explicación *da cuenta* del fenómeno, es hacer un *modelo*, y ver si el modelo reproduce el fenómeno que queríamos explicar. La pregunta entonces: si el modelo se basa en el comportamiento de las hormigas, ¿tiene otras "gracias" este modelo para resolver problemas, y tiene otras aplicaciones concretas? ¿Y qué ventajas tienen estos métodos de hormigas? Existen otros métodos para resolver problemas; los matemáticos llevan décadas inventando métodos ("algoritmos"), para resolver el problema de camino más corto, el del vendedor viajero, etc. Una primera ventaja, es que para algunos problemas (como el de ruteo de llamadas telefónicas), la mejor solución conocida es la que se obtuvo con hormigas. Además, los métodos "hormiguísticos" tienen varias gracias, que los distinguen de otros métodos. Nos concentramos en la forma en que las hormigas resuelven *un par de problemas particulares*; imitándolas, logramos resolver un montón de problemas. En resumen, no sólo nos interesan las hormigas por todo lo que se pueda decir de ellas. También nos interesa porque son un ejemplo de *sistema complejo*: un sistema formado por unidades simples, que interactúan de manera simple, pero que en su conjunto produce comportamientos muy complejos.

Hablemos, entonces, de las hormigas

Recordemos cómo son: Las hormigas exploran el mundo por huellas, en largas filas, y así buscan su alimento. Todos los caminos conducen al hormiguero. A veces es un montículo, otras veces está por completo bajo tierra. Dentro del hormiguero, hay muchos túneles y cámaras, donde se almacena comida, se cuida a las larvas, vive la Reina, descansan las hormigas, etc. La Reina suele ser más grande que las demás hormigas. No gobierna ni nada parecido: lo único que hace es poner huevos. Las obreras recogen los huevos y comienzan la crianza. En ciertos días del año las "princesas" (posibles nuevas Reinas) emprenden el vuelo, y también vuelan los machos (que sólo existen en esa época). Se juntan las hormigas de todos los hormigueros de la zona, se cruzan, y con eso la hembra queda fecundada para el resto de su vida. Se instala en algún rincón, y empieza a poner huevos. Cuando las primeras hijas –obreras- empiezan a salir, empiezan a buscar comida y a excavar, hasta que al cabo de un tiempo el hormiguero ya está formado.

Algunas gracias de las hormigas. Esta no es una lista exhaustiva de lo que las hormigas hacen, sólo son algunos ejemplos. Tampoco debe entenderse que *todas* las hormigas hacen *todo* esto; en realidad, no existe ninguna especie de hormigas que haga todas estas cosas a la vez. Se reparten las tareas de manera eficiente: distintos grupos de hormigas desempeñan las distintas tareas en el hormiguero. Si uno "secuestra" las hormigas que están desempeñando una tarea, de manera casi instantánea algunas hormigas que estaban haciendo otra cosa van a cambiar de tarea, de modo que ninguna tarea quede sin hacer. Construyen nidos extremadamente complejos: a veces muy profundos, pero perfectamente organizados, con cámaras especiales dedicadas a alimentos, larvas, la reina, "descanso"... Y aunque la reina esté muy abajo, y no vea la luz del sol en años, se las arreglan para que tenga un buen sistema de aireación, y de regulación de temperatura. Son capaces de encontrar comida a distancias enormes del nido, y "explotar" esa comida de manera organizada. Obviamente, "enorme" es en términos hormiguiles.

Tienen agricultura: cuando una hormiga camina con una hoja, no es para comerla, pues no son capaces de digerir celulosa. Lo que hace es llevarla a una cámara del nido en que las hormigas cultivan hongos... Le dan las hojas a los hongos, que se las comen, y luego las hormigas se alimentan de los hongos. También *tienen ganadería*, por ejemplo con los pulgones de las rosas: las hormigas los cuidan, se preocupan de alimentarlos, y ellas a su vez se alimentan de una sustancia lechosa que secretan los pulgones.

Saben de guerra (hay especies que atacan hormigueros ajenos, matan las hormigas, las comen, etc.), *esclavitud* (algunas obligan a otras especies a trabajar para ellas), y también de algo que aquí llamo *espionaje*, pero es más bien infiltración: es el caso de una especie de hormigas que no construye nido propio, sino que roba nidos ajenos. Cuando una "princesa" (una hormiga destinada a fundar un hormiguero y ser su reina) abandona su nido materno, lo que hace es ponerse a trabajar de obrera en alguna colonia de otra especie de hormigas. Al comienzo la rechazan, porque huele distinto, pero lentamente, en la medida en que se va impregnando del olor de sus nuevas compañeras, se le permite el acceso a zonas más cercanas al nido, hasta que finalmente, cuando las otras ya no la distinguen como una extraña, logra llegar hasta la cámara de la reina... y la mata. A partir de ese momento, la reemplaza, y los huevos que las hormigas recogen, y cuidan, son los suyos, y no los de la especie original. Por lo tanto, al cabo de un tiempo todas las nuevas hormigas serán hijas suyas, y el hormiguero se habrá transformado en uno de la especie invasora.

Organizan marchas de cientos de miles de individuos: ríos de hormigas. Y que están bien organizadas: llevan consigo sus huevos, sus larvas, su reina...

Forman puentes con sus propios cuerpos: hay hormigas que cuelgan unas de otras, para cerrar una hoja, juntando sus bordes. Una vez que lo hayan hecho, llegará otra hormiga, trayendo una larva, y usará la baba de esa larva como pegamento para cerrar la hoja definitivamente (la larva se usa como una especie de stick-fix). Luego la hoja podrá ser usada para almacenar comida, agua, etc...

Una de las que nos va a interesar: las hormigas *encuentran los caminos más cortos hasta la comida*. Es raro que habiendo más de un camino entre la comida y el nido, las hormigas prefieran el más largo. Normalmente, logran encontrar el más corto. Y encontrar caminos más cortos es un problema que a los matemáticos nos interesa resolver.

Hormigas ingenieros. Aquí se puede hacer la pregunta: ¿cómo hacen lo que hacen?

Ilustraré lo que NO ocurre con las hormigas. No tienen lenguaje para hablarse unas a otras. No tienen memoria, salvo muy, muy breve, así que incluso si tuvieran lenguaje, no podrían decirse mucho. No existe un mando central. Es una sociedad "democrática", o más bien "anárquica", en el sentido de que nadie da las órdenes. La "reina" NO GOBIERNA, su función es sólo poner huevos. No sólo no hay mando central, ni control alguno, sino que tampoco hay información centralizada. No hay planos del hormiguero. No hay mapas del terreno circundante, en los cuales se pudiera estudiar cómo llegar rápido a la comida. No contestaremos el "¿cómo lo hacen?" respecto a todas las "gracias" de las hormigas (en algunos casos, todavía no se conoce la respuesta), sino que nos concentraremos en dos ejemplos particulares: *el apilamiento de cosas*, y *la búsqueda de los caminos más cortos*.

Otra de las cosas que hacen las hormigas es "ordenar" cosas. Lo hacen en varias situaciones. Por ejemplo, con la basura que está cerca de la entrada del hormiguero: van formando con ella una rumita. También ocurre con las hormigas muertas: en lugar de dejar un desparramo de pequeños ataúdes, las hormigas forman una gran ruma con todos los cadáveres. ¿Quién ordena la formación de un cementerio de hormigas? Algo parecido hacen con las larvas, claro que ahí la cosa es un poquito más complicada: ordenan las larvas según su tamaño, las más chicas con las más chicas, las más grandes con las más grandes.

Si todas las hormigas son tontas, no tienen memoria, casi no tienen vista, y nadie les da instrucciones, ¿cómo pueden ordenar los distintos tamaños en distintos lugares? ¿Quién decide dónde se va a acumular tal o tal cosa? Ese es el misterio, y queremos hallar una solución.

Tomar lo esencial: un modelo. *De aquí en adelante hablaremos de basura, aunque ya sabemos que se puede tratar de diversas cosas*. Las hormigas ordenan la basura; eso es un hecho. La pregunta es, ¿cómo? Hay algunas cosas que nuestro sentido común nos aconseja descartar: es difícil, por ejemplo, que el mecanismo de reproducción de las hormigas tenga algo que ver con lo que hacen al ordenar basura. Tampoco la forma en que están hechas por dentro. Intuitivamente, sea lo que sea lo que hagan las hormigas, uno esperaría que fuese algo reproducible, imitable, que sólo dependiera de la forma en que se están comportando. O sea, queremos capturar aquellos aspectos del comportamiento de las hormigas que son esenciales para se produzca el apilamiento. Así estaremos más seguros de descubrir el mecanismo. En este caso, lo que estamos haciendo es un MODELO del comportamiento "ordenador" de las hormigas, tratando de abstraer todo lo que no es relevante para ese fin. Lo primero es preguntarse, ¿qué es lo que uno ve, si se pone a mirar a un grupo de

hormigas que está ordenando basura, o larvas? Da la impresión de que no estuvieran haciendo nada. Las hormigas caminan de un lado para otro (“al tuntún”), recogen algo, lo botan, recogen otra cosa, la botan por ahí, y no parece que estuvieran haciendo nada planificado. Por eso, un primer modelo de la situación sería imaginar que las hormigas hacen precisamente eso: caminar al azar. Para simplificar, nuestro mundo será una hoja cuadrículada, donde las hormigas se podrán mover de un cuadrado a otro (hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha, o hacia la izquierda). Se moverán al azar: la probabilidad de que se muevan en cualquiera de las direcciones es la misma. Cada hormiga podrá andar cargada (con una unidad de basura), o descargada. Si una hormiga que anda descargada encuentra basura, la recoge. Si una hormiga que anda cargada se topa con más basura (es decir, si el cuadrado al que se piensa mover tiene basura), entonces deja en el suelo la basura que traía.

Formación de rumas. Se han propuesto dos elementos que podrían añadirse al modelo; ambos tienen justificación en las observaciones que han hecho los mirmecólogos. Uno es que la hormiga no recoja *de inmediato* después de que ha botado algo (que haya un *tiempo de espera* entre botar y recoger). El otro es que el comportamiento de la hormiga, al botar y al recoger, esté determinado por *la cantidad de basura* que hay alrededor suyo: mientras más basura hay alrededor, es más probable que bote, y menos probable que recoja. Mientras menos basura hay, por lo tanto, es menos probable que bote, y más probable que recoja. Ya sabemos que el sólo vagar/recoger/botar no es capaz de producir la acumulación, y sabemos que al agregar la consideración de la *densidad, sí es capaz...* lo que no quiere decir que de verdad sea ese el mecanismo en juego entre las hormigas reales (aunque se cree que sí lo es, incluyendo además el tiempo de espera). El tiempo de espera. Será la cantidad mínima de pasos que la hormiga dará después de haber soltado algo, antes de estar dispuesta a recoger algo. El efecto de la densidad. No hace falta explicar muy en detalle, pero por si acaso, lo que ocurre es lo siguiente. Se consideran las 8 posiciones alrededor de la hormiga (los cuadrillos que tocan, al menos en una esquina, al cuadrado en que la hormiga está parada). Sea n la cantidad de cuadrillos, de entre esos 8, que tienen basura. Si la hormiga lleva basura, la probabilidad de que la bote es proporcional a n . Si la hormiga no lleva basura, y encuentra un poco, entonces la probabilidad de que la recoja es proporcional a $8-n$ (o sea, proporcional a la cantidad de cuadrillos *sin* basura). Para justificar el primer agregado: la hormiga acaba de soltar algo, por algún motivo (cansancio, por ejemplo), y por eso, mientras le dure su breve memoria, esa razón sigue existiendo, y no querrá recoger. Para justificar lo segundo: si hay demasiada basura alrededor, a la hormiga le cuesta caminar, más aún si lleva carga, así que se siente inclinada a botar la que lleva, o a no recoger la que encuentre.

¿Cómo se forman las rumas? El mismo efecto está presente a todo nivel, y hace que a partir de un desparramo, se vayan formando rumitas, cada vez mayores. Si hay 10 rumas de tamaños distintos, las más grandes tienden a “comerse” a las más chicas. Es cosa de probabilidades, así que siempre es posible que la chica se coma a la grande... pero es muy poco probable. ¿Y si son del mismo tamaño? No importa: como siempre hay movimiento entre las rumas, al azar, se van a producir ligeros desniveles de tamaño, y esos desniveles van a echar a andar el proceso. Un poco más difícil que juntar cosas en un lugar, es juntar las cosas en varios lugares, dependiendo de cómo son. No una ruma, sino varias, cada una de un tipo distinto de “basura”. Las hormigas hacen esto en varias situaciones. La más típica es al ordenar las larvas: si están desordenadas, las hormigas son capaces de dejar las más grandes en un lugar, las más chicas en otro, etc... La utilidad que eso tiene para las

hormigas es que cada tipo de larva requiere distintos cuidados (distinta alimentación, por ejemplo), y al estar separadas por grupos, es más fácil que las hormigas “nanas”, tontas como son, alimenten a cada una de manera apropiada.

Una posible aplicación. A estas alturas ya alguien puede estarse preguntando para qué sirve todo esto. Primero que nada, estamos entendiendo cómo las hormigas resuelven algo, que al comienzo parecía difícil para ellas. Había un misterio, una contradicción entre lo “tonto” de las hormigas y el efecto de su comportamiento, y eso lo estamos resolviendo.

Pero además, ahora que entendimos, podemos copiarles la idea y tratar de usarla para resolver problemas que se nos presentan a nosotros. Ejemplos: las grandes bases de datos de genética. O textos científicos en Internet. O simplemente páginas web. O información sobre personas. Los ejemplos son innumerables. Y la gracia es que con las “hormigas”, los conjuntos de datos se pueden “ordenar solos”. Pasamos al otro ejemplo. Olvidémosnos de la basura, del recoger y el botar. Ahora el fenómeno que queremos entender, es cómo las hormigas, sin memoria ni mapas, encuentran los caminos más cortos para ir desde el hormiguero hasta la comida. Después de ver el ejemplo anterior, ya no es tanta sorpresa enterarnos de que encuentran los caminos más cortos *sin buscarlos*. La hormiga no tiene idea de que sus actos la harán recorrer el camino más corto. De hecho, así como las otras hormigas “no tenían pensado” juntar la basura, aquí la hormiga no *quiere* buscar el camino más corto, ni *piensa* en eso. Como dijimos: ¡es demasiado simple! Es la evolución la que ha hecho el trabajo, dándole a las hormigas la pauta de comportamiento que resulta más exitosa. Es decir, la conducta de las hormigas está *grabada* en sus genes, son sus instintos, y el efecto que resulta (ya veremos cómo) es que se encuentran las rutas más cortas. En el caso de la formación de ruma, se puede decir lo mismo. La clave para este fenómeno está en una cierta sustancia química, llamada *feromona*. Muchos animales usan feromona, para distintas cosas (es parte de la química de la atracción sexual en los humanos, por ejemplo). Pero el uso que hacen las hormigas es otro: ir marcando los caminos por los que pasan. Una hormiga, cuando va hacia la comida, lo que hace es ir siguiendo la feromona que va encontrando. O sea: si está parada en un cierto punto, va a caminar en la dirección en que huele más feromona. O mejor dicho: va a caminar en cualquier dirección, pero la *probabilidad* de que se vaya en una cierta dirección será proporcional a la cantidad de feromona que haya ahí. Si un camino tiene 2 (gramos, miligramos, da lo mismo en qué se mida, importa la relación) de feromona, y otro tiene 1, entonces más o menos dos de cada tres hormigas escogerán el primero, y una de cada tres escogerá el segundo. Además, la hormiga cuando pasa por alguna parte va dejando feromona, que se agrega a la que ya había.

¿Cuál es la consecuencia? Supongamos que al comienzo no hay feromona. La mitad de las hormigas tomará un camino, la otra mitad otro. Las primeras hormigas que lleguen a la comida, serán las que se vinieron por el lado más corto. Así que en el momento de devolverse, ese camino tendrá más feromona que el otro (pues aún no llegan las que se fueron por ahí). Así que serán más las que tomen ese camino, que las que tomen el otro. Cuando lleguen las que habían tomado el camino viejo, le agregarán un poco a ese, pero al devolverse la mayoría elegirá el corto, porque ya tiene más feromona que el largo. El mecanismo se *retroalimenta*: la mayoría de las hormigas irá tomando el más corto, y eso acentuará la diferencia de feromona entre uno y otro, y eso hará que el favoritismo de las hormigas aumente, etc... Es una retroalimentación, un “círculo vicioso” (aunque virtuoso en este caso), al igual que antes, cuando la ruma grande tendía a comerse a la ruma chica. Un

dato extra: además una hormiga que camina mucho se va agotando y va dejando menos feromona. Así que eso también contribuye a "empobrecer" los caminos largos.

Ok. Suena bonito. ¿Pero funciona? Cuando en ciencias uno dice "este fenómeno se explica por tal cosa", la forma de mostrar que efectivamente esa explicación *da cuenta* del fenómeno, es hacer un *modelo*, y ver si el modelo reproduce el fenómeno que queríamos explicar. Este modelo está hecho en el computador, aunque también se podría hacer con pequeños robots que siguieran las mismas reglas que vamos a explicar (en el MIT lo han hecho). Aquí las "hormigas" serán unos puntitos que se moverán por un *grafo*, trasladándose en cada paso de un *vértice* a otro. (Ejemplos: los niños y quién es amigo de quién, los países y quién es aliado de quien, ciudades y de cuál se puede volar a cuál, etc.,etc.) Pondremos un hormiguero en una punta del grafo, y un lugar de comida en el otro. Las hormigas irán del nido a la comida, de la comida al nido, del nido a la comida, etc... Para decidir hacia donde ir en cada paso, verán cuánta feromona hay en las aristas que van en la dirección correcta (las que van hacia abajo, si van a la comida, o las que van hacia arriba, si van al nido). Y escogerán entre ellos de manera aleatoria, dándole a cada arista una probabilidad proporcional a la cantidad de feromona que tiene. En cada paso que den en una arista, dejarán un poco de feromona. Esa cantidad va bajando: en el primer paso dejan 1, en el segundo 1/2, en el tercero 1/3, etc... Cuando llegan a su destino, y parte de vuelta, vuelven a partir de 1, luego 1/2, etc. Existe una pequeña probabilidad, además, de que la hormiga decida de manera completamente arbitraria, sin hacer caso a la feromona. Pero es una probabilidad muy pequeña. La feromona se va evaporando (esto también ocurre en la realidad), de modo que si no pasan hormigas, disminuirá. La pregunta entonces: si el modelo es así, ¿encontrarán las hormigas el camino más corto? OK, ¿y qué hay con eso?

Es claro que con esto podemos encontrar los caminos más cortos en un grafo. Pero además, se pueden hacer adaptaciones ingeniosas (pega para matemáticos), para utilizar los mismos mecanismos y resolver otros problemas, como el del vendedor viajero, el de árboles de peso mínimo (un trabajo que se hizo aquí en Chile). Asignación de tareas (un ejemplo que no es originariamente de grafos), y un etcétera que fue creciendo a lo largo de los años 90. Un ejemplo concreto fue la aplicación en la British Telecom. Ahí el grafo representaba una red de centrales telefónicas, y para cada llamada que se generaba en una central y tenía otra central como destino, había que rutearla a través de las centrales, de modo que ojalá se usaran pocas centrales intermedias, y que la red NO se congestionara. Así que se hizo circular "hormigas virtuales" por la red, que se demoraba más en recorrer un camino si estaba muy congestionado, y de ese modo los "caminos más cortos" eran las rutas óptimas de las llamadas. Después, para rutear la llamada, era cosa de que siguiera la pista de feromona dejada por las hormigas. Como las hormigas estaban permanentemente recorriendo, la solución se iba actualizando según los cambios en los niveles de congestión. Hasta ahora, es la mejor solución que se ha encontrado para este problema. Existen otros métodos para resolver problemas; los matemáticos llevan décadas inventando métodos ("algoritmos"), para resolver el problema de camino más corto, el del vendedor viajero, etc. Una primera ventaja, es que para algunos problemas (como el de ruteo de llamadas telefónicas), la mejor solución conocida es la que se obtuvo con hormigas. Además, los métodos "hormiguísticos" tienen varias gracias, que los distinguen de otros métodos. Una ventaja es que no existe información ni control centralizados. En el caso de la red telefónica, no hace falta que las centrales estén conectadas a un computador "jefe", que esté resolviendo el problema y diciéndole a cada llamada por dónde debe irse. Esto facilita

mucho la implementación en una red de vértices autónomos. Si se tratara de rutear emails en internet, por ejemplo, sería imposible tener un computador en alguna parte del planeta controlando las rutas que deben seguir los millones de emails diarios... En cambio, con información *local* en cada computador, se puede encontrar la solución. Más encima, la solución se va actualizando *online*. Es decir: si el problema cambia (cambia el grafo en un caso, cambia la basura en el otro), no hace falta hacer todo de nuevo, sino que la solución se va actualizando junto con el problema. Como se trata de agentes simples, no hacen falta cálculos complejos, es un sistema "barato" en términos computacionales. Se está "aprovechando el terreno para hacer el mapa". En otras palabras, las hormigas dibujan el mapa en el mismísimo terreno, y gracias a eso pueden, siendo simples, resolver problemas complejos, pues aprovechan la propia complejidad del problema.

A modo de cierre

Otros ejemplos de sistemas complejos son el cerebro (muchas neuronas simples interactuando, y produciendo en conjunto fenómenos como la conciencia, la memoria, los chistes, las matemáticas...), la biosfera (animales y plantas haciendo sus vidas, pero produciendo una historia natural compleja, con ciclos de poblaciones, extinciones, invasiones...), las sociedades humanas (como ejemplo, la economía: es posible modelar el comportamiento de los agentes económicos, pero el comportamiento global es complejísimo, y nadie puede predecir la bolsa), la evolución de las especies (aquí habría que pensar más bien en "la evolución del DNA", la explicación es más larga).

Vimos que las hormigas que andan "al azar" son necesarias para encontrar las soluciones novedosas en el problema del camino más corto. Compárese eso con lo que pasa en la evolución: las especies no saben cómo deben mutar para evolucionar, sino que se producen mutaciones al azar, y es la selección natural la que escoge las que son útiles, y así se produce la evolución. Sin el "error" (las mutaciones al azar), no habría evolución.

Bibliografía

- Moreira, A. (ene.; 2003). "Hormigas y Matemáticas". Conferencia dictada en el contexto del proyecto Idea+, en "Primera Estadía de Especialización de Matemáticas" - Centro de Modelamiento Matemático (CMM) y Departamento de Ingeniería de Matemática (DIM) de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.
<http://www.ideamas.cl/>
<http://www.cmm.uchile.cl/>
<http://www.dim.uchile.cl/>