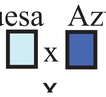
IMÁGENES PARA EL ALGEBRA

Ema Barreda y Felipe Saavedra
Colegio de Humanidades, Villarrica, Chile
embace13@netexplora.com, fhilip@netexplora.com

Resumen
Estas experiencias de aula, surgen como una propuesta de ejercicios tanto de operatoria como de representación gráfica, poniendo énfasis en el uso de material propio inspirado en el *software* "Primer Concurso Nacional de la Enseñanza Matemática - AutoMind Educación", a partir del Libro "Inteligencia Matemática". Están dirigidas fundamentalmente a alumno(a)s de 1er. año de Educación Media, existiendo contenidos que han nacido a partir de las actividades, correspondientes a cursos superiores. Ella trata principalmente de permitirle a lo(a)s alumno(a)s utilizar materiales concretos, para que ésto(a)s resuelvan ecuaciones y representen expresiones numéricas y algebraicas; además *despierten su curiosidad y creatividad* a través de la construcción de recursos para que sean protagonistas de su propio aprendizaje, los "aprehendan" significativamente y se reencanten con esta disciplina. Se les entrega una guía que motive al trabajo en equipo y se les propone ejercicios tanto de operatoria como de representación gráfica, poniendo énfasis en el uso de material propio inspirado en figuras construidas en cartón de colores. Cada grupo tiene la misión de co y autoevaluar su propuesta y luego presentar un informe. Se reagrupan recibiendo la guía de invitación, y trabajan en su desarrollo; generando interacciones explicables en el producto logrado y que constituye un testimonio de las numerosas y diversas acciones de aprendizaje, que el(la) alumno(a) debe confrontar con los objetivos y traducirlo en un producto concreto, observable, evaluable y socializable. Los productos logrados están referidos a los siguientes contenidos: representación de Números Enteros; operatoria con Números Enteros; regularidades numéricas; representación geométrica de polinomios; adición de expresiones algebraicas; factorización de expresiones algebraicas; ecuaciones de 2º grado y sistemas de ecuaciones

Representación de Números Enteros
Materiales: A lo menos 20 cuadrados de dos colores a elección, por ejemplo:

Turquesa Azul



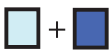
Los números enteros los podemos representar con las baldosas así, por ejemplo:

 **+ 1**  **- 1**

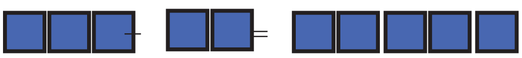
Luego, el número entero representad por  es 4
Y, así  es -3

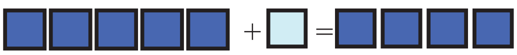
Operatoria con Números Enteros

Adición de Números Enteros
Para asignar el valor cero**, lo representamos con la suma de las baldosas azul y turquesa, por ejemplo:**

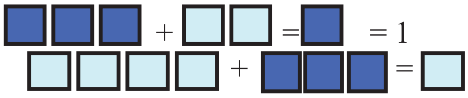
 **= -1 + 1 = 0**

Luego;

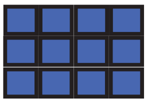
3 + 2  = 5

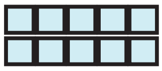
5 + (– 1)  = 4

Sustracción de Números Enteros
Análogamente a la adición. Para resolver la sustracción, la representamos con la suma del valor opuesto del sustraendo. Así: 5 – 2 = 5 + (-2).
Luego;
3 – 2 = 3 + (-2) = 1
-4 – (-3) = -4 + 3 = -1



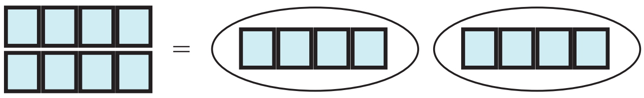
Multiplicación de Números Enteros
a) $3 \bullet 4$ b) $2 \bullet (-5)$





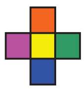
Buen desafío: Observar el producto de valores negativos…

División de Números Enteros
-8 : 2 = = -4

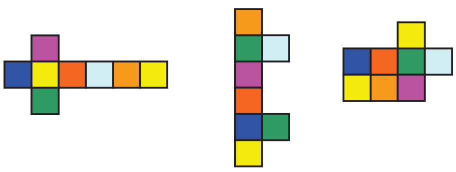


Otro desafío: Divisiones con divisor negativo…

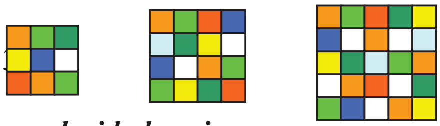
Regularidades Numéricas
Materiales: A lo menos 50 cuadrados de colores a elección.
Ejemplo 1. Construcción de figuras con un número determinado de cuadrados, considerando éstos como área 1. Así:
Con 5 cuadritos se puede construir una cruz, cuya área es de cinco cuadrados, como se ve en la siguiente figura:



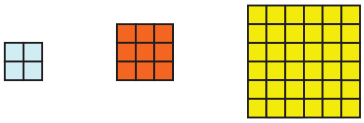
Con los mismos 5 cuadritos, pero en distinta posición, se construyen otras figuras geométricas, cuya área sea equivalente al área de la figura anterior.
Pregunta: ¿Cuántas figuras se puede construir con los 5 cuadros de manera que el área sea equivalente a las anteriores?
Si con 8 cuadritos pueden formarse diversas figuras geométricas, algunas de ellas aparecen a continuación:



Calcule el número de figuras geométricas que ha construido.
Ahora; calcule el número de figuras construidas con 15 cuadritos.
Finalmente; generalice y responda ¿Cuál es el número de figuras geométricas construidas con "n" cuadritos?
Ejemplo 2. Con ayuda de los cuadritos dados, se construyen cuadrados de lado 3 y de lado 4; al juntar los cuadritos formando un solo cuadrado, se puede expresar la igualdad de las potencias siguientes:



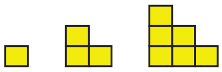
He aquí una regularidad curiosa:
En forma análoga construya un cuadrado de lado 2, otro de lado 3 y otro de lado 6, al juntar los cuadraditos y construir un solo cuadrado determinando el lado, se expresa la igualdad:



$2^2 \quad + \quad 3^2 \quad + \quad 6^2 \quad = \quad ....$

En forma análoga, construya y exprese la igualdad: $3^2 + 4^2 + 12^2 = ...$
Además: $4^2 + 5^2 + 20^2 = ...$;
¿Se atreve a continuar? Entonces, exprese la igualdad que empieza con 10; con 18; y la que empieza con n.

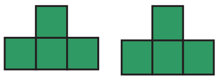
Ejemplo 3. Observando la secuencia de dibujos



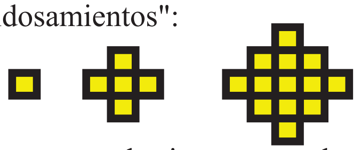
Y contando los cuadritos, para la primera figura se necesita 1 y para la segunda 3.
Luego, ¿Cuántos cuadritos se necesitan para la quinta figura? Y, ¿para la décimo segunda? Y, finalmente, ¿Cuántos cuadritos se necesitan para la n-ésima figura?

Ejemplo 4. Si la segunda figura, en lugar de ser una escalera para un solo lado, es una escalera hacia los dos lados, así:

¿cuántos cuadritos son necesarios para la n-ésima figura?

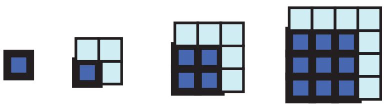


Ejemplo 5. Observe la siguiente secuencia de "embaldosamientos":



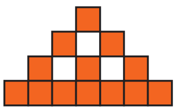
¿Cuántas baldosas (cuadritos) se ocupará, sucesivamente, para el primer, segundo, tercero y cuarto embaldosado?
Luego, determine el número de baldosas (cuadritos) necesaria(o)s para el embaldosado n - ésimo.

Ejemplo 6. Otra secuencia:



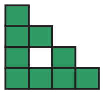
Determine el número de baldosas que es necesario para construir cada uno de estos embaldosados. ¿Qué números son los que va agregando? (Recuerde que ésta es una suma aritmética notable). Al agregar baldosas, ¿qué números son los que se van formando? Determine el número de baldosas necesarios para construir el n-ésimo motivo, o sea, la suma de los n primeros números impares y analice la relación con los cuadrados perfectos.

Ejemplo 7. Visualización geométrica de sumas notables:



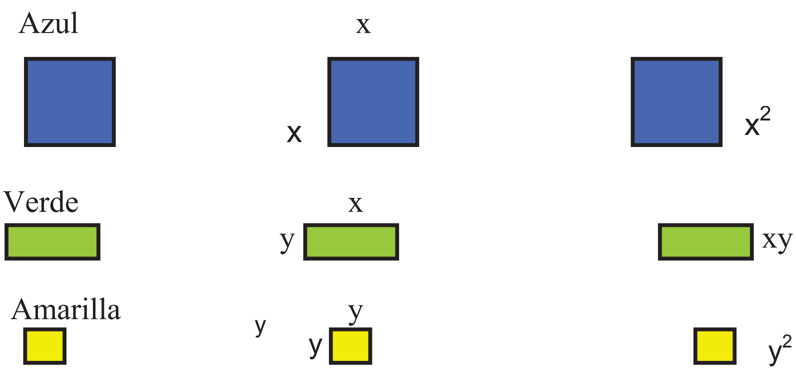
La suma 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1), se puede representar como:
Visualice cuántos cuadritos hay, sin contarlos. Y, ¿cuánto es el total de cuadritos con 6, 7, 8, ... filas? (recuerde que las filas corresponden a impares consecutivos)
Luego, ¿a qué es igual la suma 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)?

Ejemplo 8. Otra suma notable:
1 + 2 + 3 + ... + n, se puede representar:



¿Cuántos cuadritos ve a simple vista, sin contarlos? Dado que la disposición de los cuadritos es un triángulo rectángulo, exprese el número de cuadritos como producto.
Y, ¿cuánto es el total de cuadritos con 7, 8, 9,... filas? (recuerde que las filas corresponden a números consecutivos)
Luego, ¿a qué es igual la suma 1 + 2 + 3+ 4 +..... + n?

Representación Geométrica de Polinomios
Materiales: A lo menos 10 cuadriláteros de cada forma, cuya medida de los lados se relacionan. Todos ellos deben se "reversibles", de colores fuertes en el anverso y una tonalidad más baja en el reverso.
COLOR LONGITUD DE LOS LADOS ÁREA



Representaciones Polinomiales
Con las baldosas y utilizando la expresión de área en cada caso podemos rep
modelos de polinomios, por ejemplo:

xy

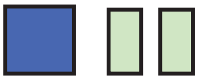
a) **$2\,x^2$** + **$3\,x\,y$** + **y^2**

b) **$3x^2$** + **$6xy$**

Para **asignar un valor negativo**, lo representamos con **las baldosas por el reverso**, así:

Por ejemplo:

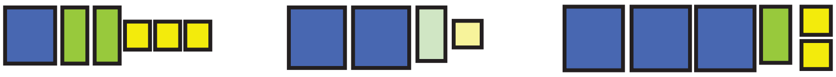
X^2 + (-2xy)



Luego, lo(a)s alumno(a)s pueden usar las baldosas para construir el modelo que representa cada expresión polinomial.

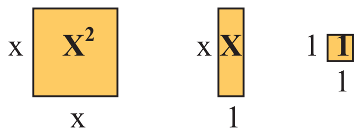
Adición de expresiones algebraicas. Dado el material anterior y usando el concepto de "cero", se pueden eliminar aquellas baldosas que se anulan, siempre que sea posible.
Por ejemplo:

$(x^2 + 2xy + 3y^2) \quad + \quad (2x^2 - xy - y^2) \quad = \quad 3x^2 + xy + 2y^2$

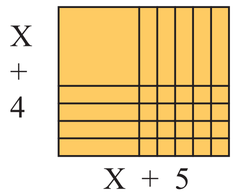


Como actividades exploratorias, lo(a)s alumno(a)s pueden representar los modelos con sus baldosas, escribir el polinomio de cada modelo y encontrar la suma de dos o más polinomios, dibujarlos y escribir su expresión.

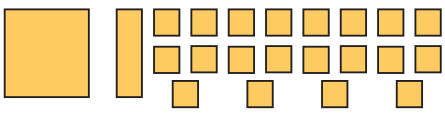
Factorizacion de trinomios. **Materiales:** A lo menos cinco cuadrados "grandes", 20 rectángulos y 50 cuadrados "chicos", con las dimensiones y área que se indican y "reversibles" con tonalidad fuerte en el anverso y más débil en el reverso:



Ejemplo 1. Si se construye un **cuadrilátero** con el área formada por $X^2 + 9X + 20$, así:



Observamos que sus lados miden $(x + 4)$ y $(x + 5)$, luego y como el área $X^2 + 9X + 20 = (x + 4)(x + 5)$, entonces, el trinomio $X^2 + 9X + 20$ ha quedado factorizado.
Ejemplo 2. Para construir un cuadrilátero con el área formada por $X^2 + X – 20$, el material a utilizar sería

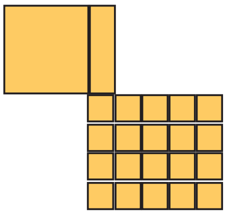


¿Imposible?…

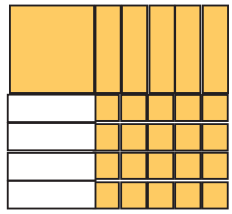
¡NO!, Es posible si se procede así:

X + 5

y luego completamos con "ceros", quedando:

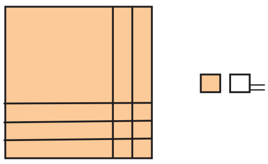


X
-
4



Luego, $X^2 + X - 20 = (x + 5)(x - 4)$.
El(la) alumno(a) puede construir un cuadrilátero con el área correspondiente a trinomios cualesquiera, y además, determinar una regla general.

Ecuaciones de 2º grado
¡Qué gran título!... No te preocupes,... es sólo eso... puro título, nada complicado.
Si el(la) alumno(a) recuerda cómo factorizamos trinomios, ¡Excelente!... Empecemos, entonces...
Ejemplo 1. En forma análoga a las factorizaciones, debemos construir **cuadriláteros** con los trinomios, y luego, igualarlos a cero, por ejemplo:
a) Dibuja el área formada por $X^2 + 5X + 6 = 0$:



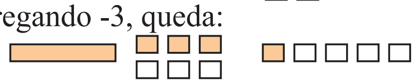
X + 2

Como el área $X^2 + 5X + 6 = (x + 3)(x + 2) = 0$, entonces,
(x + 3) = 0 o bién **(x + 2) = 0**, que al resolverlas en forma independientes, resulta:

Si x + 3 = 0, entonces:

=


agregando -3, queda:

=


Luego:

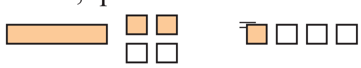

=

x = -3

Si x + 2 = 0, entonces:

=


agregando -2, queda:



Luego:


=

x = -2

Finalmente, las soluciones de la ecuación $X^2 + 5X + 6 = 0$, son "x = -3" y "x = -2"
Ahora, puedes resolver ecuaciones de 2º grado ¡Claro que sí, y sin quedar sólo en el intento!

Sistemas de ecuaciones de primer grado
¡Con este título sí que estamos grandes!...

Las variables (o incógnitas) "x" (también "y"), se representan por barras y los coeficientes numéricos por cuadraditos. Sus correspondientes valores negativos con colores más débiles al reverso; así:

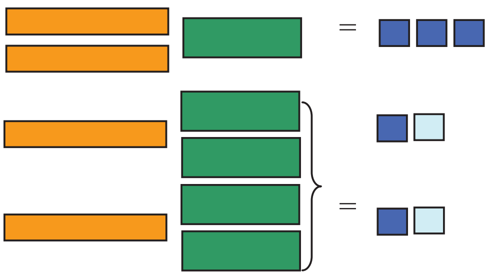
X **Y** **1** **-1**

Ejemplo 1. Para resolver un sistema de ecuaciones, se construirán éstas mediante las representaciones correspondientes, por ejemplo:

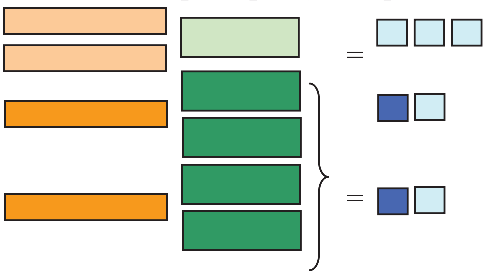
$$\begin{aligned} 2\,x + y &= 3 \\ x + 2\,y &= 0 \end{aligned}$$

Su representación sería:

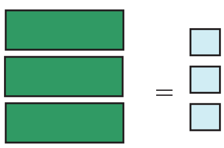
Si se igualan los coeficientes numéricos de una de las incógnitas. Por ejemplo, al igualar las "x", multiplicando por 2 en la segunda ecuación, se visualiza el doble y el sistema quedaría:



Ahora, se multiplica por (-1) la primera ecuación:



Y, sumando, queda:

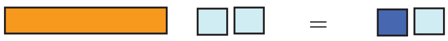


Entonces:

Luego:

$$Y = -1$$

Continuemos: si reemplazamos $y = -1$ en la segunda ecuación, por ejemplo, resulta:



Y queda:

Entonces:

Luego: **X = 2**

Las soluciones del sistema $\begin{array}{r|} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \\ \hline \end{array}$ son "$x = 2$" e "$y = -1$"

Bibliografía

Araya Schulz, R. (2000). *Inteligencia Matemática*. Editorial Universitaria. ChileAutoMind Educación, proyecto IDEA+http://www.ideamas.cl/ Idea+, el proyecto FONDEF (2002)responsable de la creación de este concurso, desarrollado durante el mes de Enero, Chile.